

目次

弾性波動論

大好直

秋田大学教授

(工学資源学部機械工学科)

1. 弾性体の一次元運動の解析	(1)
序	(1)
一次元の非線形連続体力学	(1)
{運動、変形、時間変化率、質量保存、運動量保存、エネルギー保存、線形理論、線形理論の表記}	
一様衝撃圧を受ける半無限体	(12)
反射と透過	(17)
一軸応力状態の波	(20)
調和波	(21)
{進行波、複素数表記、定在波、自由振動モード}	
調和波におけるエネルギー則	(23)
{時間平均パワー、エネルギー束速度、定在波とエネルギー流れ}	
フーリエ級数とフーリエ積分	(27)
フーリエ積分の用法	(30)
2. 線形弾性理論	(33)
緒言	(33)
記号と数学的準備	(33)
{指標記法、ベクトル演算子、ガウスの定理、記号}	
運動学と動力学	(36)
{変形、並進運動量、応力テンソル、角運動量}	
均質等方な線形弾性体	(38)
{応力ひずみ関係、偏差応力と偏差ひずみ、ひずみエネルギー}	
動的弾性問題の設定条件	(41)
一次元問題	(42)
二次元問題	(43)
{面外せん断、面内運動}	
エネルギー恒等式	(45)
ハミルトンの原理	(46)
{原理の説明、変分方程式、原理の誘導}	

変位ポテンシャル(49)	点対称波動(112)
直角座標系における基礎式群のまとめ(51)	{支配方程式、内圧を受ける球空洞、調和波の重ね合わせ}
直交曲線座標系(52)	軸対象二次元波動(119)
{尺度因子と基底ベクトルの微分、勾配、発散、回転、ラプラス演算子、ダイアデック}	{支配方程式、調和波}
円柱座標系における式のまとめ(59)	波頭の伝播(121)
球座標系における式のまとめ(62)	{不連続量の伝播、波頭における、波頭と波線}
理想流体(64)	波頭の後方近辺における展開(128)
	特性波による軸せん断波の解析(133)
3. 動弾性理論..... (65)	半径方向運動(137)
緒言(65)	波動方程式の自己相似解(139)
解の一意性(66)	{チャップリン変換、無限体に面外線荷重、クサビ形弾性体の面外せん断波}
動的相反恒等式(67)	
変位ポテンシャル(70)	5. 弾性半空間における平面調和波..... (145)
{変位表示、完全性}	平面境界における反射と屈折透過(145)
ベクトルのヘルムホルツ分解(72)	平面調和波(146)
体積力によって生ずる波動(73)	時間調和波におけるエネルギー束密度(146)
{放射、動弾性解}	異種半無限弾性体の接合体(148)
二次元の放射(77)	S H波の反射(149)
動弾性学の基本特異解(80)	P波の反射(151)
{点荷重、圧縮中心}	S V波の反射(156)
三次元積分表示(86)	自由面によるエネルギーの反射と分布(159)
{キルヒホッフの公式、動弾性表現定理}	S H波の反射と透過(160)
二次元積分表示(89)	P波の反射と透過(162)
{基本特異解、面外線荷重、面内線荷重、積分表示}	レーレー波(163)
境界値問題(95)	ストーンレー波(171)
定常の時間調和応答(98)	スローネス線図(173)
{時間調和波源、ヘルムホルツの式、第一公式、第二公式、二次元定常解}	
4. 無限体における弾性波..... (107)	6. 導波体を伝わる調和波..... (177)
平面波(107)	はじめに(177)
時間調和平面波(109)	弾性単層内の面外せん断変形波(178)
{不等振幅平面波、スローネス線図}	面外変形モードの周波数スペクトル(182)
	S H波によって単層内を伝わるエネルギー(184)
	エネルギー伝搬速度と群速度(187)
	ラブ波(193)
	弾性単層における平面ひずみ状態の波動(196)

レーレー・ラム周波数スペクトル(201)	垂直点荷重による表面波(301)
弾性円柱内の波動(212)	例題解(304)
中実円柱の周波数スペクトル(216)	{ガンマ関数の漸近形、球形空洞内の衝撃圧による応答、介在球のねじり振動による弾性波}
{ねじり波、縦モードの波、たわみモードの波}	
棒に対する近似理論(224)	
{伸縮運動、ねじり運動、たわみ運動、ベルヌーイ・オイラーモデル、ティモシェンコモデル}	
板に対する近似理論(228)	
{たわみ運動の古典理論、横せん断と回転慣性の効果、伸縮運動}	
長波極限の位相速度のまとめ(232)	
7. 半無限体の強制振動…………… (241)	8. 弾性単層と弾性柱における衝撃波…………… (311)
積分変換法(241)	概説
指数関数変換(243)	弾性単層の面外変形せん断運動(312)
{指数型フーリエ変換、両側ラプラス変換、片側ラプラス変換}	{定常状態の調和振動、過渡応答、弾性単層端に異種保護材のついた時のせん断衝撃}
その他の積分変換(249)	衝撃負荷による面内変形応答(321)
{フーリエ・サイン変換、フーリエ・コサイン変換、ハンケル変換、メリン変換}	{解法、逆変換、停留位相法の応用}
積分の漸近展開(251)	単層に集中点荷重(331)
{一般的考察、ワトソンの補助定理、フーリエ型積分の漸近展開、鞍点法}	衝撃を受ける棒(333)
停留位相法と最急降下の方法(255)	{厳密解、逆変換、長時間解}
{停留位相法、最急降下法、鞍点法の応用例}	
面外表面荷重を受ける半無限体(267)	9. 亀裂による弾性波の回折…………… (343)
{厳密解、漸近表示、最急降下法による評価}	混合境界値問題(343)
時間調和線荷重のラムの問題(273)	面外せん断運動(344)
{面内ひずみ状態を支配する式、定常解}	{グリーン関数、混合境界値問題}
無限体に急激に作用する線荷重(278)	ウィナー・ホフ技法(350)
カニアール・デフック法(281)	関数の分割(353)
線荷重解に関する結果と考察(284)	{一般的方法、レーレー関数の分割、アーベル型積分方程式の解}
半無限体の過渡応答(287)	水平偏向せん断波の回折(368)
表面垂直点荷重による半無限体の過渡応答(293)	縦波の回折(368)
{解法、表面の垂直変位、 $\lambda = \mu$ の特別な場合}	{定式化、ウィナー・ホッフ技法の応用、逆変換}

第 1 章

弾性体の一次元運動の解析

1.1 序

平易にするため、ただ一つの空間変数 x と時間 t に依存する弾性波を考えて、そのいくつかの特徴を明らかにする。運動の本質をつかむため、連続体力学的取扱いの考え方や原理を理解し、導出される一次元非線形支配方程式系の線形化条件などを調べる(2節)。一次元の線形弾性理論は、簡単な偏微分方程式によって支配され、初等数学によって求まる一般解を有する。もともと静止している物体に外乱を与えれば、その解より、ある定まった速度で乱れが波動となって伝わるのがわかり、もともと静止している物体点(質点, 粒子; *particle*)は、その波が到来するまで静止を保っている。(3節)。波は物体の境界で反射する(*reflection*)。厳密には、波の伝ばしている弾性体の外界が真空である時に完全反射し、そうでない時は反射のみならず界面を通して波の透過(*transmission*)も生ずる。この透過現象は、二つの媒体の弾性係数や質量密度が極端に違わないときには、波動特性の一つとして現われ、その効果を調べる必要が出て来る。(4節)。線形理論では、任意形状の波形が定常調和波の重ね合せによって表現できる。従って波動特性の本質を知るには定常調和波の性質を調べるのも一つの方法であり重要である。定常波の重ね合せは *Fourier* 級数か、*Fourier* 積分に基づいてなされ、その解析の様子を、一次元の簡単な場合を例に説明する(6~9節)

1.2, 一次元の非線形連続体力学

1.2.1, 運動

純粋な一次元縦運動は、すべての物体点が平行に運動し、その動く方向に垂直な平面で一様である。従って、その一次元運動を表わすには、長さを示す座標と、時間のみで十分である。いま、ある時刻を $t=0$ とおき、その時の物体点の自然位置を座標 X で定めると、変形運動した後の $t=t$ における物体点の位置 x は

(1)

$$x = P(X, t) \quad (1.1)$$

と表わせる。この写像 $x = P(X, t)$ をその運動の物質表示(*material description*)と呼ぶ。また、この表示は X と t を独立変数とする *Lagrange* の表示(*Lagrangian description*)とも言う。式(1.1)において変数 X の値は、すべての時間に対して同一の物体点を定め、その値は、その物体点の基準位置(*reference position*)に等しい。従属変数 x の値は、基準位置が X の物体点の時刻 t における位置を示す。

運動を別の方法で表現する空間表示(*spatial description*)がある。これは *Euler* 表示とも呼ばれ、独立変数は t と x である。 x と t の値は、

$$X = p(x, t) \quad (1.2)$$

で関係づけられる。式(1.2)で、従属変数 X の値は、時刻 t における位置 x にある物体点の基準位置を与える。この運動に対する二つの表記は当然、お互いに矛盾があってはならない。すなわち、式(1.2)は式(1.1)を X に対して解くことによっても得られる。

独立変数に対応した場の量を表現するために、物質表示の量を大文字で、空間表示の量を小文字で区別する。たとえば変位の物質表示と空間表示のそれぞれを

$$U(X, t) = P(X, t) - X \quad (1.3)$$

$$u(x, t) = x - p(x, t) \quad (1.4)$$

1.2.2, 変形

一次元運動する要素を図1.1に描写する。動く方向の位置によって運動が一様ではないので、要素は伸縮する。一次元の場合、最も簡単な変形量の表わし方は、同一要素について、変形前の長さで変形後の伸びを割った値によるものである。この変形量は

$$\lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{\Delta x - \Delta X}{\Delta X} = \frac{\partial u}{\partial X} \quad (1.5)$$

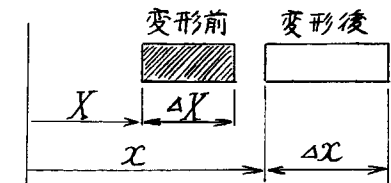


図 1.1 要素の運動と変形

(2)

これは変形量として、物質座標で表わした変位勾配 $\partial U / \partial X$ である。三次元変形では変形量として要素の長さの2乗の差を考えると便利である。これにより Lagrange 表示のひずみテンソルが導びかれる。一次元問題では Lagrange ひずみは

$$E = \frac{1}{2} \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 - (\Delta X)^2}{(\Delta X)^2} = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 \quad (1.6)$$

式(1.5)(1.6)は、基準状態に基づく変形状態を表わしている。もちろん、変形は空間座標系でも表わせるが、弾性体の場合、外力を取除けば変形のない基準状態にもどるので、変形量の表現(1.5)と(1.6)は、より自然な表現であるとも言えよう。

1.2.3, 時間変化率 媒体の物体点の速度は一定基準位置 X に対する $x = P(X, t)$ の時間変化率である。

$$V(X, t) = \frac{\partial P(X, t)}{\partial t} \quad (1.7)$$

この式は物体点の速度の物質表示である。空間表示は式(1.2)の X を上式に代入して得られ

$$v(x, t) = V[P(x, t), t] \quad (1.8)$$

式(1.8)は、ある空間の固定位置 x を時刻 t に通過する物体点の速度を与える。さて変位 u を用いて時刻 t における物体点の速度 v を表わしてみよう。微小時間 Δt の間に物体点の位置が $v\Delta t$ だけ移動するから、時刻 $t + \Delta t$ には位置 $x + \Delta x$ にきている。従ってこれに伴う変位の変化 Δu は

$$\Delta u = u(x + v\Delta t, t + \Delta t) - u(x, t)$$

$v\Delta t$ と Δt を微小な量と考えてテーラー展開すれば

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot v\Delta t + O[(\Delta t)^2]$$

ここで、 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta u / \Delta t) \equiv \partial u / \partial t$ と書けば

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.9)$$

左辺の $\partial(\quad) / \partial t = \frac{\partial}{\partial t}(\quad) + v \frac{\partial}{\partial x}(\quad)$ (1.10)

[3]

は、物体点の運動を追跡して行った時の時間微分を表わすので物質導関数又は Lagrange 微分と言われる。式(1.9)の右辺は、その空間表示になっている。偏微分 $\frac{\partial}{\partial t}$ は他の変数を固定した時の時間微分である。場の量を大文字と小文字で、独立変数が何であるかわかるように区別しているので他の変数は自明であろう。

物質表示で、加速度は次のように定義される。

$$A = \frac{\partial V(X, t)}{\partial t} \quad (1.11)$$

もし、物体点速度が位置と時間の関数として既知ならば、空間表示で

$$a = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.12)$$

で与えられる。式(1.12)の右辺第2項は加速度の位置移動依存項である。

後ほど質量の保存と並進運動量の平衡を論じるため、領域 $x_1 \leq x \leq x_2$ に含まれる物体点集合に関する積分値の瞬間的な時間変化率を空間表示で考える。物体点に対応する個々のある物理量を f とすれば、この領域の全物理量は $\int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx$ で与えられるが f が時々刻々変化するのみならず積分範囲も物体点の移動に伴って変化している。そこで数学公式

$$\frac{d}{dt} \int_{A(t)}^{B(t)} f(x, t) dx = \int_{A(t)}^{B(t)} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx + f(B(t), t) B'(t) - f(A(t), t) A'(t)$$

を用いれば次の様になる。

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial t} dx + \left[f(x, t) v(x, t) \right]_{x=x_1}^{x=x_2} \quad (1.13)$$

式(1.13)の左辺は空間領域 $x_1 \leq x \leq x_2$ に存在する全物理量 $f(x, t)$ の瞬間 t における増加の時間率を示す。右辺の物理的意味は第1項が領域内部の増加率で、第2項が x_1 と x_2 を通過して流出する正味量の割合である。式(1.13)は次の形にも書ける。

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} f(x, t) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (fv) \right] dx \quad (1.14)$$

[註] 寺沢寛一編、「数学概論」岩波書店、80頁。
森口 ほか3名著「数学公式I」岩波書店 53頁

関数にフイロは引数 t による微分を示す。

[4]

1. 2. 4. 質量の保存

古典力学の基本となる原理の一つに、物質は発生も

消滅もしないというのがある。そこで空間領域 $x_1 \leq x \leq x_2$ を占める質点系を考えよう。空間表示で x, t における質量密度を $\rho(x, t)$ 、また基準状態の関数である質量密度を $\rho_0(X)$ とすれば、質量保存は表示によらず一定だから

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \int_{p(x_1, t)}^{p(x_2, t)} \rho_0(X) dX$$

ここに $\rho(x, t)$ は式(1.2)によって与えられる。この式の左辺を式(1.1)に従って変数変換する。積分範囲は同一物体点集合に注意して変換すれば

$$\rho_0(X) = \rho(x, t) \frac{\partial P(X, t)}{\partial X} \quad (1.15)$$

質量保存則は、また物体点集合の質量の時間変化率が 0 になることも意味するから、

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = 0$$

ここで式(1.14)を用いれば

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad (1.16)$$

この式は空間表示の質量保存則で、以下に示すように、 ρ と関数 f の積の積分の物質導関数を簡単にするために利用される。すなわち式(1.14)より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho f dx &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho f v) \right] dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} f + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} f \right\} + \rho \frac{\partial f}{\partial t} + \rho v \frac{\partial f}{\partial x} \right] dx \end{aligned}$$

従って式(1.16)と D/Dt の定義(1.10)より

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho f dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{Df}{Dt} dx \quad (1.17)$$

この結果は運動量やエネルギー平衡を論ずる上で役立つだろう。

1. 2. 5 運動量の平衡

並進運動量のつりあいより、系の並進運動量

の時間変化率は、特定の時刻に外から系に作用する合力に等しい。従って、ある瞬間に領域 $x_1 \leq x \leq x_2$ を占める単位断面積当りの質量を考えれば

[5]

$$\tau(x, t) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) v(x, t) dx \quad (1.18)$$

ここに、 $\tau(x, t)$ は点 x における空間表示の応力であり、体積力は考えない。左辺を積分形にし、右辺を式(1.17)によって単純化すれば、上式は

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \tau}{\partial x} dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) \frac{Dv}{Dt} dx \quad (1.19)$$

明らかに式(1.19)は次式に等価である。

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho \frac{Dv}{Dt} \quad (1.20)$$

これは空間座標における運動方程式である。物質の座標で運動方程式を表示するためには、式(1.18)にもとって座標を写像(1.1)に従って変換する。

$$\tau[P(X, t), t] \Big|_{x_1}^{x_2} = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) v[P(X, t), t] \frac{\partial P}{\partial X} dX$$

$\rho_0(X)$ と $\rho(x, t)$ との関係(1.15)を用いれば、上式より

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \tau}{\partial X} dX &= T(X, t) \Big|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \rho_0(X) \frac{dV}{dt} dX = \int_{x_1}^{x_2} \rho_0(X) \frac{\partial V}{\partial t} dX \\ \therefore \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial V}{\partial X} \frac{dX}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} \end{aligned}$$

そして任意の X_1, X_2 で成立するためには、被積分関数が等しく

$$\frac{\partial \tau}{\partial X} = \rho_0(X) \frac{\partial V}{\partial t} \quad (1.21)$$

ここに $T(X, t) = \tau[P(X, t), t]$ は物質表示の応力である。応力で表わした運動方程式は、応力と変形との関係によって補足されなければならない。理想的な弾性体の応力はひずみのある関数となるが、一次元の取扱いは物質表示の応力 $T(X, t)$ を変位勾配 $\partial U / \partial X$ の関数として考えても取扱える。すなわち

$$T(X, t) = \mathcal{L}(\partial U / \partial X) \quad (1.22)$$

従って、物質表示の運動方程式は次のようになる。

$$C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1.23)$$

[6]

ただし
なぜならば¹⁾

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\mathcal{L}}{d(\partial U/\partial X)} \quad (1.24)$$

\mathcal{L} は $\partial U/\partial X$ のみの関数だから式(1.22)より

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \frac{d\mathcal{L}}{d(\partial U/\partial X)} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$$

これが式(1.21)に等しいから $\rho_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{d\mathcal{L}}{d(\partial U/\partial X)} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$ 。と3で $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ だから式(1.23)を得る。

1.2.6 エネルギー平衡 エネルギー保存則は、ある物体の運動エネルギーと内部エネルギーとの和の時間変化が、単位時間にその系に入出入りするエネルギーの和(外力による仕事や、熱エネルギーの流入などをさし、また、エネルギー源はその物体内にないとる)に等しいことを述べたものである。ある瞬間における単位質量当りのエネルギーを $e(x,t)$ で記せば、領域 $x_1 \leq x \leq x_2$ にその時含まれている内部エネルギーと運動エネルギーは

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho e(x,t) dx, \quad \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \rho v^2 dx$$

領域の境界に作用する応力は機械的仕事の形でその系にエネルギーを与え、その仕事の単位時間量を入力パワー P 又は仕事率という。式で書けば

$$P = -T(x_1, t)v(x_1, t) + T(x_2, t)v(x_2, t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(\tau v) dx \quad (1.25)$$

ここで体積力や熱の効果は考えないものとする。以上より、純粋に機械的なエネルギーに対するエネルギー保存則は次のようになる。

$$P = \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho e dx + \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \rho v^2 dx \quad (1.26)$$

右辺は内部エネルギーと運動エネルギーの時間増加率であり、積分は式(1.17)を用いて評価できる。すなわち式(1.25)(1.26)より

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(\tau v) dx &= \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho e dx + \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \rho v^2 dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial e}{\partial t} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \rho \frac{\partial(v^2)}{\partial t} dx \end{aligned}$$

x_1 と x_2 は任意だから被積分関数を等置して

[7]

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tau v) = \rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} \cdot v$$

式(1.20)を考慮すれば

$$\tau \frac{\partial v}{\partial x} = \rho \frac{\partial e}{\partial t} \quad (1.27)$$

これは局所的エネルギー保存を表わしている。

1.2.7 線形理論 非線形理論に基づいて次元解析をすることもできるが、多くの力学的に基本的な現象を理解するためには、取扱いが煩雑となって割に合わないことが多い。そこで線形化すれば重ね合せの原理の適用ができ数学的取扱いが容易になる。現象も簡潔に記述されるので直感的に理解し易く実際の物理的状態を把握する上でかなり考え易くなるだろう。しかし、線形化の根拠となる仮定が現象解明のために正しいかどうか常に検討できていなければならない。なぜなら基礎式の上で小さな非線形項であっても、現象上ではかなり異った結果になることを考えられるからである。逆に、非線形性の効果が予期したよりも小さいこともある。従って線形理論の成立条件を調べるのが大切である。

さて、 $T(X, t)$ が $\partial U/\partial X$ に比例する特別な場合、すなわち構成関係式(1.22)で

$$T = S_1 \frac{\partial U}{\partial X} \quad (1.28)$$

となる場合を考える。 S_1 は比例定数である。この関係は関数 \mathcal{L} を $(\partial U/\partial X) = 0$ で展開したと考えれば $|\partial U/\partial X| \ll 1$ の時に近似的に適用できる。また、ある材料では次元理論の取扱いの範囲で $|\partial U/\partial X|$ の比較的大きな値に対しても、ある意味で厳密となるだろう。もし、式(1.28)が成り立てば式(1.23)は線形波動方程式

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1.29)$$

になる。ここに $c^2 = S_1/\rho_0$ (1.30)

線形波動方程式に対する一般解は、置き換え

$$\alpha = t - \frac{X}{c}, \quad \beta = t + \frac{X}{c} \quad (1.31a, b)$$

[8]

により、次式に帰着させて得られる。

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \quad (1.32)$$

これより $\partial U / \partial \alpha$ は α のみの関数であり、さらに積分すれば $U(X, t)$ は次の形をとらねばならないことがわかる。

$$U = F(\alpha) + G(\beta) = F\left(t - \frac{X}{c}\right) + G\left(t + \frac{X}{c}\right) \quad (1.33)$$

上式は、任意関数 $F(\)$ と $G(\)$ によって線形波動方程式(1.29)の解を表わしている。もし時間 t が任意の値だけ(これを Δt とする)経過すると同時に、 X が $c\Delta t$ だけ増えるとすれば、明らかに引数 $t - X/c$ は不変である。従って $F(t - X/c)$ は値が一定のまま X の正方向に移行する(伝わる)ことを表わしている。同様に $G(t + X/c)$ は X の負の方向に伝わることを表わしている。伝ば中に各項の値が不変、すなわち波形が不変となるから、この伝ばはゆがみのない(*distortionless*)、損失のない(*lossless*)波動伝ばと言われている。

一次元取扱いで、物質座標(基準座標)における線形波動方程式を誘導するために、必要とされる条件は、物質表示の応力と変位勾配の関係が比例関係にあればよい。しかしながら、運動の空間表示による取扱いは依然として非線形である。位置 x に立っている観測者が変位 $u(x, t)$ を見るならば、物質点の速度や加速度の表示に移動依存項(*convective terms*)が現われる。式(1.9)と式(1.12)を用いれば明らかになる。すなわち、厳密な取扱いで

$$v = \frac{\partial u / \partial t}{1 - \partial u / \partial x} \quad (1.34)$$

$$a = \frac{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^3} \quad (1.35)$$

$$\text{式(1.4)より } \frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{\partial X}{\partial x} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)}$$

と3で式(1.3)より $\frac{\partial U}{\partial X} + 1 = \frac{\partial x}{\partial X}$ だから

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U / \partial X}{1 + \partial U / \partial X} \quad (1.36)$$

[9]

さて、 $|\partial u / \partial x| \ll 1$ で正当化される、線形波動方程式(1.29)の誘導条件式(1.28)のみを用いて式(1.34)(1.35)(1.36)を考えてみよう。式(1.36)と式(1.34)より

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\partial U}{\partial X}, \quad v \approx \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.37a, b)$$

を得る。式(1.35)を単純化することは、この条件だけではできない。 $\partial u / \partial t$ と二次導関数の大きさの程度が明白でないためである。そこで式(1.35)を完全に線形化する条件を決めるために運動方程式を空間座標表示する。式(1.20)は、(1.12)を用いて

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{d v}{d t} = \rho a$$

さらに(1.15)(1.35)を右辺に、(1.28)を左辺に用いれば

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(S_i \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial x}{\partial x} \left\{ \frac{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^3} \right\}$$

と3で前頁で用いた $\partial U / \partial X = (\partial u / \partial x) / (1 - \frac{\partial u}{\partial x})$ の関係と $\partial x / \partial x = 1 - \frac{\partial u}{\partial x}$ を利用すれば

$$c^2 \left\{ \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \right\} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left\{ \frac{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)} \right\}$$

従って次の非線形方程式になる。 c^2 は式(1.30)で与えられる。

$$\left[c^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right) \quad (1.38)$$

式(1.38)の解を求めれば

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (1.39)$$

の形になる。直接代入すれば解として満足していることが確かめられる。したがって

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f', \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -f'/c \quad (1.40a, b)$$

ここにプライムは引数による微分を示す。条件 $|f'| \ll c$ が考慮できるならば式(1.35)と

$$\text{式(1.38)は } a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.41)$$

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.42)$$

[10]

式(1.41)(1.42)は線形式となっている。そこで条件

$$|f'| \ll c \quad (1.43)$$

を検討すれば(1.40b)と(1.36)より $|\partial u/\partial x| \ll 1$ もしくは $|\partial u/\partial x| \ll 1$ を意味する。以上より、物質表示の時は $|\partial U/\partial X| \ll 1$ 、空間表示の時は $|\partial u/\partial x| \ll 1$ の条件のもとに線形化した。本質的には同じレベルの規制条件であり、一次元問題では外乱によって生ずる振幅の変化率が小さい時、すなわち式(1.43)が成立する時、線形理論によって運動が完全に表現できる。

1.2.8 線形理論のための表記 問題が完全に線形化されれば物質表示も空間表示も区別はなくなる。したがって物質表示のための大文字も空間表示のための小文字も使用できるが、長年の習慣で線形理論では小文字を用いている。なお、応力成分と変位勾配 ($\partial u/\partial x$) はギリシヤ文字 τ_x と ϵ_x で表わされ、それらの比例係数 S_1 は後述するように Lamé の定数 λ と μ により $S_1 = \lambda + 2\mu$ になる。(参式(1.28))

従って

$$\tau_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.44)$$

応力表示の運動方程式は

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.45)$$

と書ける。ここに ρ は一定な質量密度である。式(1.44)を式(1.45)に入れば波動

方程式

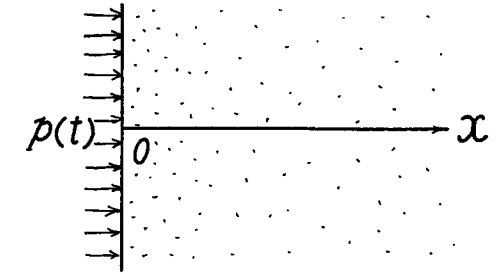
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.46)$$

ここに

$$c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (1.47)$$

1.3 一様衝撃圧を受ける半無限体

線形問題の簡単な例として、一様な衝撃圧が均質等方な半無限弾性体の表面に作用して生ずる応答を考え、過渡的な波動現象の特徴ある点を調べてみよう。図1.2に示すように半無限体は $x \geq 0$ の空間を占めるものとし、境界面に圧力 $-p(t)$ が作用するものとする。すなわち x 方向の垂直応力を $\tau_x(x, t)$ で記述すれば $x=0$ の境界条件は



$$\tau_x = -p(t) ; \quad t > 0 \quad (1.48)$$

図 1.2 ; 半無限体に衝撃圧 $p(t)$

と書ける。ただし $t \leq 0$ では $p(t)$

は 0 とする。他の応力成分は $x=0$ で恒等的に 0 である。明らかに x 軸に平行な任意の平面は対称平面であり横変位は起こり得ず半空間の運動は、 x と t のみの関数となって x 方向変位によって表わされる。その変位を $u(x, t)$ とする。変形は一次元状態であり、前節で定義した方程式が使える。そして半空間の変形は単一ひずみ成分

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.49)$$

によって完全に表わされる。式(1.44)により、応力とひずみの関係は

$$\tau_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.50)$$

また、変位運動方程式は、式(1.47)の c_L^2 を用いて

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.51)$$

半空間 $x \geq 0$ が、時刻 $t=0$ 以前で静止しているとして初期条件は

$$u = \dot{u} = 0 ; \quad t=0, \quad x > 0 \quad (1.52)$$

これで、式(1.48)と式(1.52)の条件のもとに式(1.51)の解を求めることになる。式(1.51)の一般解は

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c_L}\right) + g\left(t + \frac{x}{c_L}\right) \quad (1.53)$$

表面圧力 $p(t)$ が x の正方向のみに伝播する波を生じさせることは直感的に明らかであるが、関数 $g(t + \frac{x}{c_L})$ を初めから省略しないで数学的取扱いに従って考えてみる。式(1.53)と初期条件(1.52)から $x > 0$ に対して

$$f(-x/c_L) + g(x/c_L) = 0 \quad (1.54)$$

$$f'(-x/c_L) + g'(x/c_L) = 0 \quad (1.55)$$

ここに $'$ は引数による微分を示す。(1.55)を積分すれば $2A$ を積分定数として

$$f(-x/c_L) - g(x/c_L) = 2A$$

となるから(1.54)と連立させて関数 f と g を求めれば、 $x > 0$ において

$$f(-x/c_L) = -g(x/c_L) = A \quad ; \quad x > 0 \quad (1.56)$$

x の適用範囲からわかるように f の引数は常に負の時に上式が成り立つ。従って解の形の引数 $t - x/c_L$ に書きあらためた時 $f(\cdot)$ の値が A になるのは $t - x/c_L < 0$ の場合である。 $t - x/c_L > 0$ の場合は不定でそのまま $f(t - x/c_L)$ と書いておく。 $g(t + x/c_L)$ については対象とする時刻 $t > 0$ で常に引数が正なのでその値は $-A$ となる。これらの結果を(1.53)に入れて整理すれば

$$u(x, t) = \begin{cases} f(t - \frac{x}{c_L}) - A & ; \quad t > \frac{x}{c_L} > 0 \\ A - A \text{ すなわち } 0 & ; \quad \frac{x}{c_L} > t > 0 \end{cases} \quad (1.57)$$

式(1.57)で場合により \Rightarrow に分けられていることから、この解は、乱れのない処女領域と波の擾乱を受けた領域に分ける波頭が速度 c_L で媒体中を伝播することを示している。言い換れば $x = \bar{x}$ にある物体点は、時刻 $t = \bar{t} = \bar{x}/c_L$ まで静止している。

式(1.50)と $x=0$ の境界条件式(1.48)より

$$-\left(\frac{\lambda+2\mu}{c_L}\right) f'(t) = -p(t)$$

この式を積分して

$$f(t - \frac{x}{c_L}) = \frac{c_L}{\lambda+2\mu} \int_0^{t-x/c_L} p(s) ds + B \quad (1.58)$$

ここに B は定数、式(1.48)より $s < 0$ に対して $p(s) \equiv 0$ だから $p(s)$ の積分は

[13]

$t < x/c_L$ の時 0 となる。式(1.58)が式(1.56)と矛盾しないから $B=A$ を得る。よって式(1.57)の変位に対する表示式は式(1.58)の $f(t - \frac{x}{c_L})$ を入れれば

$$u(x, t) = \frac{c_L}{\lambda+2\mu} \int_0^{t-x/c_L} p(s) ds \quad (1.59)$$

これを式(1.50)に入れて対応する応力を求めると

$$\tau_x = -p(t - \frac{x}{c_L})$$

横方向の垂直応力 τ_y と τ_z を、フックの法則で $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$ として求めれば

$$\tau_y = \tau_z = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} p(t - \frac{x}{c_L})$$

によって算出される。 $u(x, t)$ と $\tau_x(x, t)$ の式では常に $t < 0$ で $p(t) \equiv 0$ であることを考慮しなければならない。

変位あるいは応力の解から、表面の衝撃圧によって、速度 c_L で伝播する擾乱が、半無限体内に生ずることがわかる。 $x = \bar{x}$ にある物体点は、擾乱域と処女域とに分ける波頭の到着時刻 $\bar{t} = \bar{x}/c_L$ まで静止している。到着後のその点における垂直応力は圧縮であって引数 $t - \bar{x}/c_L$ の荷重関数 p の値に等しく、また変位 u は引数に関して荷重関数 p を積分した値に比例する。このような過渡的波動を与える簡単な本例題では、衝撃波の媒体を伝播する間の波形は不変である。

物体点速度 $\dot{u}(x, t) = \partial u / \partial t$ は、式(1.59)より

$$\dot{u} = \frac{c_L}{\lambda+2\mu} p(t - \frac{x}{c_L}) \quad (1.60)$$

で算出されるから、 x の正方向に伝播する波で、応力 $\tau_x(x, t)$ と速度 $\dot{u}(x, t)$ との間に

$$\tau_x = -\rho c_L \dot{u} \quad (1.61)$$

の関係が成り立つ。応力と速度の比、すなわち ρc_L を機械インピーダンス (mechanical impedance) といい、それは運動をひきおこすに必要な応力の尺度を与えるので、媒体の波動抵抗 (wave resistance) とも呼ばれる物質定数である。

x 軸に直交する単位面積要素に作用する合応力の単位時間にする仕事は、その応力 $\tau_x(x, t)$ と速度 $\dot{u}(x, t)$ のベクトル積である。この仕事の時間割合を単位面積当りのパワー (仕事率、

[14]

能率; power) という。これを \mathcal{P} で記すと

$$\mathcal{P}(x, t) = -\tau_x \dot{u} \quad (1.62)$$

負符号は、引張を正とする応力ベクトルと速度ベクトルが同一方向の時に正值となるように付けられている。

式(1.61)を用いると

$$\mathcal{P}(x, t) = \rho c_L \dot{u}^2 \quad (1.63)$$

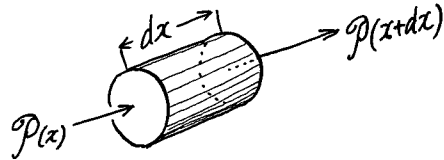
パワーは、単位時間、単位面積当りに通過するエネルギーの割合、すなわち、エネルギー束密度を表わすから全エネルギー密度 \mathcal{L} に関する。単位体積当りの全エネルギーは運動エネルギー密度 \mathcal{K} とひずみエネルギー密度 \mathcal{U} との和であるから

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} + \mathcal{U} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (1.64)$$

もし、位置 $x=x$ を横切るエネルギー束より、 $x=x+dx$ を横切るエネルギー束の方が多いとすれば、媒体の長さ dx に含まれるエネルギーは減少する。

すなわち

$$\mathcal{P}(x+dx) - \mathcal{P}(x) = -dx \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$$



あるいは、左辺が $dx \cdot (\partial \mathcal{P} / \partial x)$ と表わ

せるから

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

これはエネルギーの連続の式である。式(1.62)と(1.64)を上式に代入すれば

$$-\left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \rho \ddot{u} \right) \dot{u} - \left\{ \tau_x - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} = 0$$

明らかに上式は式(1.50)(1.51)が成立すれば恒等的に満されている。エネルギーの保存を考えると、表面圧力の半空間にした仕事が擾乱域の運動エネルギーとひずみエネルギーの和に等しくなければならないから、ある経過時間 t の瞬間において

$$\int_0^t \mathcal{P}(0, t) dt = \int_0^{c_L t} \mathcal{L}(x, t) dx \quad (1.65)$$

となる。これを検討すれば次のようになる。

[15]

式(1.65)の左辺は式(1.62)と式(1.60)より

$$\int_0^t \left[p(t - \frac{x}{c_L}) \cdot \frac{c_L}{\lambda + 2\mu} p(t - \frac{x}{c_L}) \right]_{x=0} dt = \frac{c_L}{\lambda + 2\mu} \int_0^t [p(s)]^2 ds$$

一方、右辺は、式(1.64)から、式(1.59)を用いれば

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{c_L}{\lambda + 2\mu} \int_0^{t-x/c_L} p(s) ds \right] \right\}^2 + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{c_L}{\lambda + 2\mu} \int_0^{t-x/c_L} p(s) ds \right] \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{c_L}{\lambda + 2\mu} p(t - \frac{x}{c_L}) \right\}^2 + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{c_L}{(\lambda + 2\mu)(-c_L)} p(t - \frac{x}{c_L}) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{\lambda + 2\mu} [p(t - \frac{x}{c_L})]^2 \quad \because \rho c_L^2 = \lambda + 2\mu \end{aligned}$$

であるから

$$\int_0^{c_L t} \mathcal{L}(x, t) dx = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \int_0^{c_L t} [p(t - \frac{x}{c_L})]^2 dx$$

$s = t - \frac{x}{c_L}$ とおけば $ds = -\frac{1}{c_L} dx$, 積分区間は $(0, c_L t)$ が $(t, 0)$ になるので

$$\int_0^{c_L t} \mathcal{L}(x, t) dx = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \int_t^0 [p(s)]^2 (-c_L) ds = \frac{c_L}{\lambda + 2\mu} \int_0^t [p(s)]^2 ds$$

よって式(1.65)の等式が成立することが確かめられた。

慣性項のない静的問題のための支配方程式は、式(1.51)より $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$ であるから一度積分すれば、境界条件(1.48)を用いてただちに応力が求まり

$$\tau_x = (\lambda + 2\mu) \frac{du}{dx} = -p(t)$$

慣性項を考慮した解は $\tau_x = -p(t - \frac{x}{c_L})$ であったから、前者との比較のため $p(t)$ を単調増加関数として $t=t$ でテラー展開近似すれば

$$\tau_x \approx -p(t) + \frac{x}{c_L} \dot{p}(t)$$

従って、右辺第2項が第1項に比べて無視できない時 ($x \dot{p}(t) / c_L p(t) \gg 1$) に動的効果として慣性項を考慮しなければならない。次に(1.59)(1.59)から $|f'| = \left| \frac{c_L}{\lambda + 2\mu} p(t - \frac{x}{c_L}) \right|$ 従って、式(1.43)の線形化条件を本例題にあてはめれば次となる。

$$\frac{1}{\lambda + 2\mu} p(t) \ll 1$$

[16]

1.4 反射と透過

材料定数の異った二つの媒体の界面に波が入射すれば、一部は反射し、一部は界面を透過する。第2媒体が真空の特別な場合として機械的な波動を全く伝えないとすれば「入射波は完全反射する。まずこの場合を考えてみよう。入射応力波が

$$(\tau_x)_i = f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) \quad (1.66)$$

で与えられたとする。ただし関数 f の引数が負の時、その関数値は0とする。反射応力波は x の負の方向に伝播するから

$$(\tau_x)_r = g\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \quad (1.67)$$

の形で表わせるだろう。境界面座標を $x=a$ とすれば「一方が真空のため、応力 τ_x が0の自由面となるから

$$\tau_x = (\tau_x)_i + (\tau_x)_r = 0 \quad ; \quad x=a$$

上式は、式(1.66)の条件から $t < a/c_1$ の時、 $g\left(t + \frac{x}{c_1}\right) \equiv 0$ を意味する。 $t \geq a/c_1$ では

$$g\left(t + \frac{a}{c_1}\right) = -f\left(t - \frac{a}{c_1}\right)$$

さて、 $s = t + \frac{a}{c_1}$ とおくと $g(s) = -f\left(s - 2\frac{a}{c_1}\right)$ となるから式(1.67)を考慮すれば反射波は、次式によって表わせる。

$$(\tau_x)_r = -f\left(t - \frac{a}{c_1} + \frac{x-a}{c_1}\right) \quad (1.68)$$

式(1.68)は、反射パルスが入射パルスと同一の波形 f で、自由境界の反射によって応力の符号が変わることを示している。従って、たとえば引張パルスは自由面で圧縮パルスとして反射する。

しかし、この反射によって変位の符号(方向)は変わらない。

圧縮衝撃波がこのように反射によって引張衝撃波に変わる現象は、相対的に引張強度の低い材料の破壊に関連して重要になるだろう。すなわち、波の反射効果のため引張破壊が生じ、これを *spalling* もしくは *scabbing* と呼んでいる。この効果は B. Hopkinson によって実験的に確かめられている。

さて、入射波形が式(1.66)で与えられる時、異種材料の界面における反射と透過を考える。反射波と透過波は、それぞれ

$$(\tau_x)_r = g\left(t - \frac{a}{c_1} - \frac{a-x}{c_1}\right)$$

$$(\tau_x)_t = h\left(t - \frac{a}{c_1} - \frac{x-a}{c_2}\right)$$

と表わせる(図1.3参照)。これは左側媒体中を伝播して $x=a$ まで到着し、次にそれぞれの媒体中を伝播して $x=x$ の点まで達するために要する時

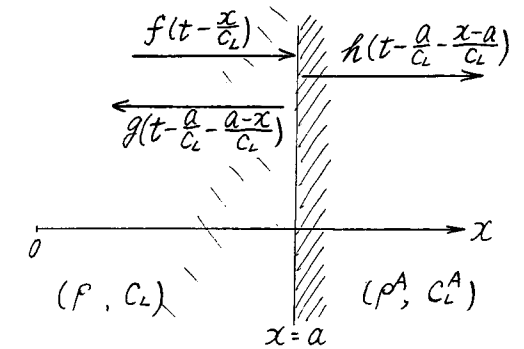


図1.3 入射、反射、透過

間を遅れ時間として考慮し、関数の引数を時間移行して与えてある。そして界面における応力と物体点速度の連続性を条件として、 g と h が f で表わせればよい。すなわち、

$$[(\tau_x)_i + (\tau_x)_r]_{x=a} = [(\tau_x)_t]_{x=a}$$

これより、 $g\left(t - \frac{a}{c_1}\right) + f\left(t - \frac{a}{c_1}\right) = h\left(t - \frac{a}{c_1}\right)$ を得るが、任意の t で成立するから、 c_1 、 c_2 を定数としてそれぞれの関数値間に $g = C_r f$ 、 $h = C_t f$ の関係を有する。ただし

$$C_r + 1 = C_t$$

次に式(1.61)より速度はそれぞれの波に対し

$$\dot{u}_i = -\frac{1}{\rho c_1} (\tau_x)_i, \quad \dot{u}_t = -\frac{1}{\rho_A c_2} (\tau_x)_t, \quad \dot{u}_r = \frac{1}{\rho c_1} (\tau_x)_r$$

上式の最後の式は式(1.60)(1.61)より分かるように波の伝播方向が他と逆なので符号が正符号となっている。各応力成分が f によって表わせるので速度の連続性 $[\dot{u}_i + \dot{u}_r]_{x=a} = [\dot{u}_t]_{x=a}$ を用いれば

$$-\frac{1}{\rho c_1} \left\{ f\left(t - \frac{a}{c_1}\right) - C_r f\left(t - \frac{a}{c_1}\right) \right\} = -\frac{1}{\rho_A c_2} C_t f\left(t - \frac{a}{c_1}\right)$$

よって、

$$\frac{1 - C_r}{\rho c_1} = \frac{C_t}{\rho_A c_2}$$

ここに $C_r + 1 = C_t$ だから C_r と C_t について解けば

$$C_r = \frac{\rho^A c_L^A / \rho c_L - 1}{\rho^A c_L^A / \rho c_L + 1}, \quad C_{tr} = \frac{2 \rho^A c_L^A / \rho c_L}{\rho^A c_L^A / \rho c_L + 1}$$

この定数は、導入過程から分かるように入射振幅に対する反射波と透過波の比であるから、それぞれ反射係数、透過係数とよび、いずれも二つの媒体の機械インピーダンス比 $(\rho^A c_L^A / \rho c_L)$ によって完全に定められる。反射係数と透過係数を機械インピーダンス比に対して求めれば図1.4のようになる。特別な場合として第2媒体のない場合 $\rho^A c_L^A / \rho c_L = 0$ であるから $C_r = -1$ 、 $C_{tr} = 0$ となって式(1.68)の結果に一致し、二つの媒体が同じ時(つまり界面のない時)、 $\rho^A c_L^A / \rho c_L = 1$ となってパルスは透過波のみとなる。もし $\rho^A c_L^A / \rho c_L > 1$ ならば反射パルスは入射波と同符号であり、透過波はインピーダンス比によらず常に同符号になる。具体例として入射側を鋼(SUS 304)、透過側をアルミニウム合金(5052)とした時のインピーダンス比はほぼ 0.37 になる。ただし計算データとして次を用いた。

SUS 304. ; $E = 20,000 \text{ kgf/mm}^2$, $\nu = 0.291$, $\rho = 7.7$

5052 アルミ合金 ; $E^A = 7,090 \text{ kgf/mm}^2$, $\nu^A = 0.327$, $\rho^A = 2.7$

たくさん層を積層して、個別に扱えば過渡的波形の一次的取扱いができる。また反射と透過の繰返しのため、圧縮衝撃で高い引張応力が生ずることが起りうる。

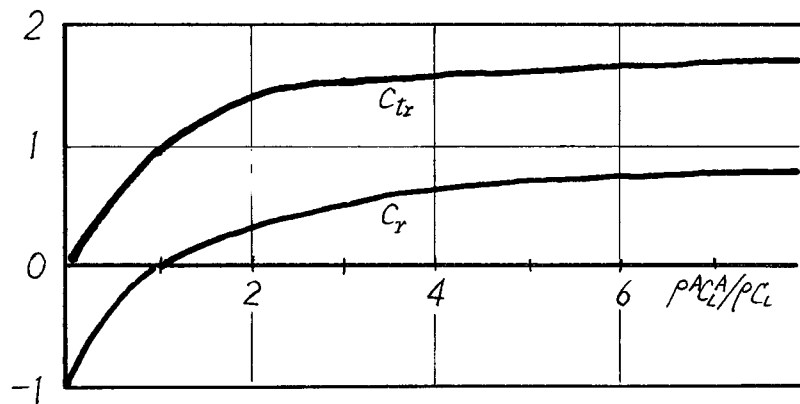


図1.4. 反射係数 C_r と透過係数 C_{tr}

1.5 一軸応力状態の波

伝ば方向のみ擾乱を与える一軸ひずみの波だけが一次元の波動ではない。一軸応力状態の波動伝ばも考えられる。この時、垂直応力 σ_x のみが恒等的に 0 とならない応力成分となる。一軸応力下にある要素の変形(図1.5)と、一軸ひずみ下にある変形(図1.1)の大きな違いは、前者は横方向の変形が自由である点であり、一軸応力で要素を引張れば断面積が減少する。この場合 σ_x と ϵ_x とは

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (1.69)$$

で関係づけられる。Eは縦弾性係数である。運動方程式を書けば

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.70)$$

(1.69)(1.70)より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1.71)$$

$$\therefore C_0^2 = E / \rho \quad (1.72)$$

応力の一次元状態の波動は、細い棒を伝ばする波のよい近似を与える。式(1.72)の C_0 は、この波の伝ば位相速度で、ふつう棒波速度(bar velocity)と呼んでいる。細い半無限長棒の棒端 $x=0$ で圧力 $p(t)$ を受けるとすれば $x \geq 0$ の棒に生ずる応力波は

$$\sigma_x = -p(t - \frac{x}{C_0}) \quad (1.73)$$

になる。これは非常に細い棒に対して成立つ近似解で、もし棒が極端に太いならば、その変形は一軸ひずみ状態に近くなるのが予想できる。棒が細いか太いかという判断は、応答を支配する周波数成分の波長と、棒の径などの断面寸法や棒端からの距離に関係づけて論じなければならない。非常に細くも太くもない棒では双方の一軸状態近似ができないので、厳密な二次元、三次元の弾性波動解析が必要となる。しかし、一軸応力近似の波動解析によって満足できる解の得られる問題も多い。

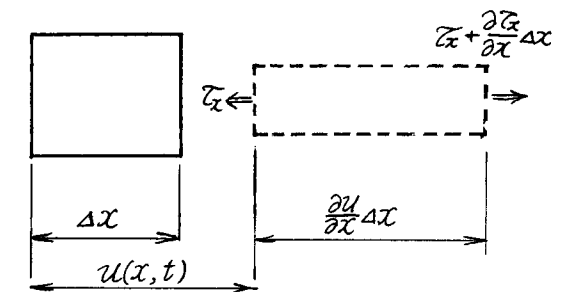


図1.5 一軸応力による変形

1.6 調和波

1.6.1 進行波 (progressive wave, traveling waves) 縦変位に対して

$$u(x, t) = A \cos[k(x - ct)] \quad (1.74)$$

の表式を考えよう。ここに振幅 A は x と t に依存しない。式(1.74)は一般形 $f(x - ct)$ の形をしているので明らかに x の正方向に時間とともに進行する波を表わしている。引数の $k(x - ct)$ を波の位相と呼び、一定の位相値に対応する x の値が速度 C で移動している。従ってこの C を波動伝ばの位相速度という。任意時刻 t に対し、 $u(x, t)$ は x の空間的周期関数で波長 λ を有する。ただし $\lambda = 2\pi/k$ である。ここに k は波長 λ の 2π に含まれる数になるので波数といっている。任意位置 x に対し、 $u(x, t)$ は時間 t の周期関数で周期 T を有する。ただし $T = 2\pi/\omega$ である。式(1.74)より角周波数 (円振動数; circular frequency) ω は

$$\omega = kC \quad (1.75)$$

になるから $u(x, t)$ を別の表現にすれば

$$u(x, t) = A \cos\left[\omega\left(\frac{x}{C} - t\right)\right] \quad (1.76)$$

式(1.74)と(1.76)は進行調和波 (traveling harmonic waves) と呼び、無限媒体中を伝わるサイン又はコサイン関数状の波の移行する連なりである。調和波は後述するように定常状態の波であって過渡的な衝撃波とは相対をなしている。式(1.74)を1.2.8節と1.5節の波動方程式に代入すると、それぞれ(1.46)と(1.71)から

$$C = C_L \quad \text{と} \quad C = C_T \quad (1.77a, b)$$

を得る。式(1.77a, b)の - 軸ひずみと - 軸応力の位相速度は波長 λ に無関係な定数となっている。位相速度が波長の長短によらず一定ならば、その波動系は非分散的であると言う。一方、材料が純粋に弾性的でなく、^[註] 散逸的ふるまいを示すならば、調和波の位相速度が波長に依存するので、その系は分散的 (dispersive) であるという。分散は、分散性媒体を伝ばするにつれてパルス波形の変形してゆく重要な現象である。分散は非弾性体

[註] たとはは「機械的な波動エネルギーが材料内部の摩擦などにより熱エネルギーや永久変形の仕事などに使われ、波動の減衰する現象

に限らず弾性導波体内でも、幾何学的な波の干渉の結果としておこる。位相速度 C は

$$\dot{u}(x, t) = A k C \sin[k(x - ct)]$$

として得られる物体点速度とは明らかに別のものである。たとえば「一軸縦ひずみ変形するとき物体点速度 \dot{u} と位相速度 C_L との比の最大値を考えれば

$$(\dot{u}/C_L)_{\max} = A k = 2\pi A/\lambda$$

になるが、線形理論の成立する範囲では A/λ の比は 1 よりずっと小さいはずである。

1.6.2 複素数表記 数学的取扱いに便宜を計るため、式(1.74)の代わりに

$$u(x, t) = A \exp[ik(x - ct)] \quad , \quad t = \sqrt{t} \quad (1.78)$$

の表式をよく用い、そして実部もしくは虚部がその解の物理的意味をかつものと理解する。具体的に述べなくとも以下においてはこのようにする。一軸応力の時、式(1.78)に対応する応力と変形速度(物体点速度)は次のように書ける。

$$\tau_x(x, t) = iEAk \exp[ik(x - ct)] \quad (1.79)$$

$$\dot{u}(x, t) = -iAkc \exp[ik(x - ct)] \quad (1.80)$$

1.6.3 定在波 (standing wave) 周波数、波長ともに等しい進行方向の異なる二つの波を合成する。

$$u(x, t) = A_+ e^{i(kx - \omega t + \gamma_+)} + A_- e^{i(kx + \omega t + \gamma_-)} \quad (1.81)$$

ここに A_+ と A_- は実数値の振幅であり、 γ_+ と γ_- は位相角である。もし二つの調和波の振幅が等しいならば $A_+ = A_- = A$ とおいて

$$\begin{aligned} u(x, t) &= A e^{i(kx + \frac{1}{2}\gamma_+ + \frac{1}{2}\gamma_-)} \left[e^{-i(\omega t - \frac{1}{2}\gamma_+ + \frac{1}{2}\gamma_-)} + e^{i(\omega t - \frac{1}{2}\gamma_+ + \frac{1}{2}\gamma_-)} \right] \\ &= 2A \exp[i(kx + \frac{1}{2}\gamma_+ + \frac{1}{2}\gamma_-)] \cos(\omega t - \frac{1}{2}\gamma_+ + \frac{1}{2}\gamma_-) \end{aligned}$$

$$\text{実部をとれば} \quad u(x, t) = 2A \cos(kx + \frac{1}{2}\gamma_+ + \frac{1}{2}\gamma_-) \cos(\omega t - \frac{1}{2}\gamma_+ + \frac{1}{2}\gamma_-) \quad (1.82)$$

上式は、波の形が移動しないので定在波を表わしている。 $\cos(kx + \frac{1}{2}\gamma_+ + \frac{1}{2}\gamma_-) = 0$ の点では二つの進行波が常に打消合ってその媒体要素は静止している。これらの点を節点 (node point) と呼ぶ。節点と節点の間点を腹 (antinode) といい、ここでは振幅の最も大きな運動となる。

1.6.4 自由振動モード 弾性体のある自由振動状態を定在波によって説明することができる。例として、長さ l の棒の振動を考えよう。まず第1の境界条件として $x=0$ で変位がないとすれば、可能な調和運動は限定される。式(1.78)は $x=0$ で変位を常に0にすることができないので、 $x=0$ で節点となるような位相角 γ_+ と γ_- をもつ定在波形(1.82)を用いなければならない。すなわち、

$$\gamma_+ + \gamma_- = \pi$$

$$u(x, t) = 2A \sin(kx) \cdot \sin(\omega t - \gamma_+) \quad (1.83)$$

第2の境界条件として $x=l$ で $u=0$ を加え両端支持棒とすれば、式(1.83)で表現される調和運動は、さらに $x=l$ で節点をもつ運動に限定される。そのためには $\sin(kl) = 0$ とすればよい。これは n を $1, 2, 3, \dots$ として $kl = 2\pi n/l = n\pi$ を意味する。このように n の値に対応する個々の振動様式をモードという。節点間距離は半波長となるから、それらは $l, \frac{l}{2}, \frac{l}{3}, \dots$ となる。そして対応する角周波数 ω は

$$\omega = kc_c = \frac{n\pi c_c}{l}$$

$n=1$ の最低次(基本)モードの角周波数を基本角周波数(fundamental angular frequency)とよび

$$\omega = \frac{\pi c_c}{l} \quad [\text{rad/sec}]$$

となる。1秒当りのサイクル数(ヘルツ)の基本周波数は $f = c_c/2l$ で与えられる。 $n \geq 2$ に対する高次モードの周波数は $f_2 = \frac{2c_c}{2l}$, $f_3 = \frac{3c_c}{2l}$, \dots などとなる。^[註] このような高い周波数の振動による音をオーバートーン(上音; overtone)と呼ぶ。この上音周波数が基本周波数の整数倍になる音をハーモックス(倍音; harmonics)と云い、本例はそれにあてはまるが、板や膜の振動に見られるように一般に上音が倍音になるとは限らない。

1.7 調和波におけるエネルギー束

単位面積当りのエネルギー透過率は単位面積当りのパワーに等しく式(1.63)を用いて算出できる。二つの複素数 α, β について一般に $\text{Re}\alpha \cdot \text{Re}\beta \neq \text{Re}(\alpha\beta)$ なので直接式(1.80)を

[註] 振動モードが存在するとき、それぞれのモードに対して $\omega = \omega_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$) とおけば $\omega_n/2\pi = f_n$ 。

式(1.63)を入れてからその実部としてパワーを求めることはできない。そこでまず $\text{Re}(i\dot{u})$ を求めてから入れれば、一軸応力の場合、

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \rho c_c^3 k^2 A^2 \sin^2[k(x - c_c t)] \\ &= \frac{EA^2 \omega^2}{c_c} \sin^2[k(x - c_c t)] \end{aligned} \quad (1.84)$$

これより、進行調和波の単位面積当りのパワーは位相速度 c_c で伝わるパルスの無限の連なりであると言える。

1.7.1 単位面積当りの時間平均パワー 波の強さの有効な表示法は、任意の位置と時間における \mathcal{P} の時間平均によって表わすことである。単位面積当りの時間平均パワーは

$$\frac{EA^2 \omega^2}{c_c} \cdot \frac{1}{t_a} \int_t^{t+t_a} \sin^2(kx - \omega s) ds \quad (1.85)$$

積分範囲を周期 $T = 2\pi/\omega$ にとれば上式は容易に評価できる。

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sin^2(kx - \omega s) ds = \frac{1}{2}$$

なので一周期の \mathcal{P} の時間平均を $\langle \mathcal{P} \rangle$ と記述すれば次のようになる。

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} \frac{EA^2 \omega^2}{c_c} \quad (1.86)$$

式(1.85)の t_a を無限大に極限しても同じ値が見い出せる。 $\langle \mathcal{P} \rangle$ の単位は W/m^2 である。また $\langle \mathcal{P} \rangle$ は周波数と振幅の2乗に比例している。

ここで二つの複素関数 F と f の実部の積の時間平均をすぐ求めるために効果的な公式を導く。 F と f が、実数 F_0 と f_0 を用いて $F = F_0 e^{i(\omega t - \gamma_1)}$, $f = f_0 e^{i(\omega t - \gamma_2)}$ と表わせる形ならば、

$$\begin{aligned} \text{Re}(F) \text{Re}(f) &= F_0 f_0 \cdot \frac{1}{2} [\cos(2\omega t - \gamma_1 - \gamma_2) + \cos(\gamma_2 - \gamma_1)] \\ &= \frac{F_0 f_0}{2} [\cos\{2(\omega t - \gamma_2)\} \cos(\gamma_2 - \gamma_1) - \sin\{2(\omega t - \gamma_2)\} \sin(\gamma_2 - \gamma_1) + \cos(\gamma_2 - \gamma_1)] \\ \langle \text{Re}(F) \text{Re}(f) \rangle &= \frac{F_0 f_0}{2T} [\cos(\gamma_2 - \gamma_1) \int_t^{t+T} \cos\{2(\omega s - \gamma_2)\} ds - \sin(\gamma_2 - \gamma_1) \int_t^{t+T} \sin\{2(\omega s - \gamma_2)\} ds + T \cos(\gamma_2 - \gamma_1)] \\ &= \frac{1}{2} F_0 f_0 \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \end{aligned}$$

$$\text{一方} \quad \frac{1}{2} \text{Re}(F \bar{f}) = \frac{1}{2} \text{Re}(F_0 e^{i(\omega t - \gamma_1)} f_0 e^{-i(\omega t - \gamma_2)}) = \frac{1}{2} F_0 f_0 \cos(\gamma_2 - \gamma_1)$$

$$\text{従って} \quad \langle \text{Re}(F) \cdot \text{Re}(f) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(F \bar{f}) \quad (1.87)$$

ここに \bar{f} は f の複素共役である。式(1.87)を公式として用いて $\langle \mathcal{P} \rangle$ を直接的にすぐ求めることができる。すなわち、式(1.62)より $\mathcal{P} = -\tau_x \dot{u}$ であるから複素数表現式(1.79)(1.80)を用いて、公式(1.87)にあてはめれば

$$\langle \mathcal{P} \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(iEA\tau_x \cancel{e^{ik(x-C_0t)}} \cdot iA\tau_x C_0 \cancel{e^{-ik(x-C_0t)}} \right) = \frac{1}{2} EA^2 \tau_x^2 C_0 \quad [\text{註}]$$

$\tau_x C_0 = \omega$ であるから上式の結果は式(1.86)になる。

1.7.2 エネルギー束速度 平均パワー $\langle \mathcal{P} \rangle$ は単位時間単位面積当りの透過平均エネルギーであった。従ってエネルギーの「流れ」ということのできるエネルギー束の速度 C_e を導入することができる。エネルギー速度は時間平均透過エネルギーを時間平均全エネルギー密度で割った商で定義される。すなわち

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{K} \rangle C_e \quad (1.88)$$

単位体積当りの機械的全エネルギーは運動エネルギーとひずみエネルギーからなっている。そこで式(1.87)を用い、運動エネルギー密度の時間平均を求めると

$$\langle \mathcal{K} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \dot{u}^2 dt = \frac{1}{4} \rho A^2 \omega^2 \quad (1.89)$$

また、時間平均ひずみエネルギー密度は

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dt = \frac{1}{4} EA^2 \tau_x^2 \quad (1.90)$$

$\tau_x = \omega / C_0$, $C_0^2 = E / \rho$ であるから $\langle \mathcal{K} \rangle = \langle \mathcal{U} \rangle$ を得る。すなわち時間調和の平面波に関する時間平均全エネルギー密度は時間平均運動エネルギー密度と時間平均ひずみエネルギー密度に均等に配分されている。式(1.89)と(1.90)の和をとれば

$$\langle \mathcal{K} \rangle = \frac{1}{2} \rho A^2 \omega^2 \quad (1.91)$$

(1.86)と(1.91)を(1.88)に代入すれば速度 C_e は C_0 に等しくなることがわかる。

以上より、平面調和波におけるエネルギーの流れの時間平均的割合は本質的に2つの求め方がわかる。一つは応力 τ_x と速度 \dot{u} の積を作り、その時間平均をとる方

[註] 共役をとるときは i を $-i$ に置きかえる。従って、式(1.80)より $\bar{\dot{u}} = iA\tau_x C_0 \exp[-ik(x-C_0t)]$ である。
[25]

法、もう一つは単位体積当りの運動エネルギーもしくはひずみエネルギーの時間平均を計算し、その2倍の量 $\langle \mathcal{K} \rangle$ にエネルギー透過速度 C_e を乗じて時間平均透過エネルギー密度 $\langle \mathcal{P} \rangle$ を求める方法。本節で議論した例ではエネルギー透過速度は位相速度 C_0 に等しかった。これは一般に非分散の波動伝播特性として成立つ。しかし分散性を有する場合は C_e は C_0 に一致しなくなる。

1.7.3 定在波に対するエネルギーの流れ

式(1.81)に記述されるように互いに反対方向

に伝播する二つの波の重ね合せからなる合成波において、単位面積当りのパワーを考えよう。変位 $u(x, t)$ の空間座標 x と時間 t による微分は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A_+ \tau_x \theta_+ + A_- \tau_x \theta_- \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -A_+ \omega \theta_+ + A_- \omega \theta_-$$

になる。ただし $\theta_+ = \exp[i(kx - \omega t + \gamma_+ + \frac{\pi}{2})]$, $\theta_- = \exp[i(kx + \omega t + \gamma_- + \frac{\pi}{2})]$ であり、微分操作によって出てくる i は指数関数の $\frac{\pi}{2}$ の位相変化として表現している。 $\mathcal{P} = -\tau_x \dot{u}$ であるから単位面積当りのパワーは次のように得られる。

$$\mathcal{P} = E\tau_x \omega \left[(A_+)^2 \operatorname{Re}(\theta_+) \operatorname{Re}(\theta_+) - (A_-)^2 \operatorname{Re}(\theta_-) \operatorname{Re}(\theta_-) \right]$$

互いに反対方向に伝わる調和波の重ね合せでは \mathcal{P} の表式に相互項(cross term)がないので、エネルギー透過の瞬時的値でも(時間平均をとらなくても)それぞれの波に対するエネルギー束の差になる。式(1.87)を用いれば次のように時間平均がすぐに得られる。

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{2} E\tau_x \omega \left[(A_+)^2 - (A_-)^2 \right]$$

定在波の場合、振幅 A_+ と A_- が等しくなるので $\langle \mathcal{P} \rangle = 0$ となり正味のエネルギー流出はなくなる。定在波では運動のない節点を経由するエネルギーはないから節点間を行ったり来たりするだけであり、任意点を流れる正味エネルギーは周期 T の時間平均で 0 となる。

1.8 フーリエ級数とフーリエ積分

物理的に意味のある任意の関数が数学的にある成分の集まりであるとして分割できることはよく知られている。最もよく用いられている成分としては三角関数や指数関数がある。任意関数がある周期 T と角周波数 $\omega = 2\pi/T$ で周期的に変化するならば、周波数 $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ をもつ余弦項と正弦項、あるいは指数関数のフーリエ級数として表わせる。周期性のない関数の場合は三角関数、あるいは指数関数による積分表示(フーリエ積分)に書ける。本節では、フーリエ級数とフーリエ積分に関するおおよその特徴をつかむために、初歩的な説明を手短かに述べる。

1.8.1 フーリエ級数

関数の値が時間間隔 T で繰り返されるならば、時間に関して周期的であるという。これは $f(t+T) = f(t)$ を意味し T を周期という。(図1.6)。同様に空間的に周期長さ Λ をもつ周期性を有するとき $f(x+\Lambda) = f(x)$ となり、 Λ を波長という。比較的制限のゆるい条件のもとで周期 T の周期関数はフーリエ級数によって次のように表わせる。

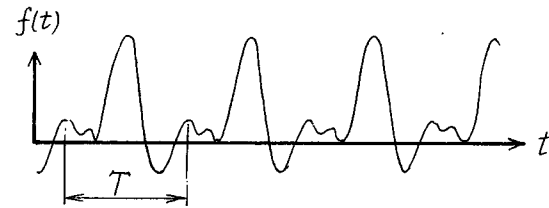


図1.6 周期関数

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right] \quad (1.92)$$

この級数が収束し $f(t)$ になる条件は $f(t)$ とその一次導関数が周期 T 内で有限個の不連続を除いて連続となっていればよい。関数 $f(t)$ が滑らかに急激な変動のないほど級数の収束はよくなり、少ない項数和で $f(t)$ をよく近似することができる。sine と cosine の直交関係を用いて係数 a_0, a_n, b_n を求める。

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \cos\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) dt = \frac{1}{2} T \delta_{nm}$$

[27]

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) dt = \frac{1}{2} T \delta_{nm}$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \sin\left(\frac{2\pi m t}{T}\right) dt = 0 \quad (n \geq 0, m > 0)$$

ここに δ_{nm} はクロネッカーのデルタで $n \neq m$ ならば 0 , $n = m$ ならば 1 の値をとる。するとフーリエ級数の係数は次のように得られる。

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad (1.93)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) dt \quad (1.94)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (1.95)$$

次に正弦関数と余弦関数の代りに指数関数による級数展開を考えよう。公式の

$$\cos(n\omega t) = \frac{1}{2}(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}), \quad \sin(n\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t})$$

を用いれば式(1.92)は次の形に書きかえられる。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-in\omega t} \quad (1.96)$$

ただし $\omega = 2\pi/T$, $C_0 = \frac{1}{2}a_0$, $C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $C_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ とする。指数関数は直交系をなし、係数 C_n がすぐ計算できる。すなわち

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp\left(\frac{2\pi i n t}{T}\right) dt$$

関数 $f(t)$ を $0 \leq t \leq T$ のみに限定するならばフーリエ級数展開は非周期関数にも使える。 $f(t)$ の $0 \leq t \leq T$ の値を用いて、新たに $t < 0$ と $T < t$ の変数域に $f(t)$ を拡張し、周期 T の関数と見なして取扱うことができるからである。

フーリエ級数の係数は線スペクトルとして周波数に対応させて図示できる(図1.7)。領域 $0 \leq t \leq T$ の非周期関数をフーリエ級数表示した各項の周波数は、順に $\omega_1 = 2\pi/T$, $\omega_2 = 2\omega_1$, \dots , $\omega_n = n\omega_1$ である。

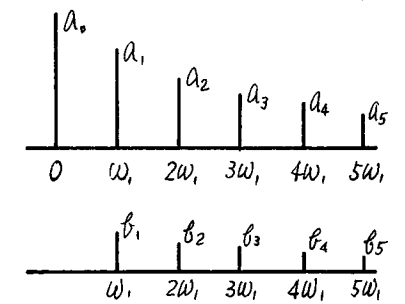


図1.7 フーリエ係数の線スペクトル

[28]

この場合、対象領域 $0 \leq t \leq T$ が広くなると線スペクトル間隔が小さくなってスペクトルは密になってくる。これは $\omega_1 = 2\pi/T$ より分かるように基本角周波数が低く(小さく)なるためである。 $f(t)$ をフーリエ級数によって表現する場合の精度は高次の周波数成分に依存している。これは周期 T の局所変動を T よりずっと大きな特性時間によって表現することができない(すなわち $2\pi/T$ より小さな周波数で局所変動を追跡することができない)ためである。^{したがって}必要とする項数は詳細な表現になるほど高次の周波数の項まで多くとらなければならない。

1.8.2 フーリエ積分 たとえば単一の衝撃パルスからなる関数のように、変数の全域にわたって周期性の全くない関数を表現したい時にはフーリエ積分によって表す。すなわち関数 $f(t)$ の積分表示は次である。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f^*(\omega) d\omega \quad (1.97)$$

ここに

$$f^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt \quad (1.98)$$

関数 $f^*(\omega)$ を $f(t)$ のフーリエ変換という。そのため式(1.97)の積分表示は $f^*(\omega)$ から $f(t)$ を求めるための逆変換という。

さて、積分関係式(1.97)と(1.98)の成り立ちについて考える。これらを誘導するための巧妙な発見的手法は、限定された定義域の非周期関数の取扱いをそのまま利用し、これを無限の領域に拡張することである。このフーリエ級数の周波数スペクトルの構造から関数の定義域を拡大してゆけば、周波数域の線スペクトルが密にたまって来て、無限定義域にした時には離散的だったスペクトルは $f^*(\omega)$ によって表わせる連続したスペクトルに変わる。このような事実に基づけば $f^*(\omega) d\omega$ は ω における無限小周波数帯域 $d\omega$ による振幅への寄与となる。以下に、具体的に考えてみる。区間 $-\frac{1}{2}T < t < \frac{1}{2}T$ で定義される関数 $f(t)$ は式(1.96)より、指数関数のフーリエ級数に表わせる。

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) \exp\left(\frac{2\pi i n s}{T}\right) ds \right] \exp\left(-\frac{2\pi i n t}{T}\right) \quad (1.99)$$

(1.99)を $\omega_{n+1} - \omega_n = \Delta\omega = 2\pi/T$ において書きかえると

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(s) e^{in\Delta\omega s} ds \right] e^{-in\Delta\omega t}$$

積分の定義から $T \rightarrow \infty$ の時、 $\Delta\omega \rightarrow 0$, $n\Delta\omega \rightarrow \omega$ になるから上式は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{i\omega s} ds \quad (1.100)$$

式(1.100)はよく知られたフーリエ積分定理である。またそれは(1.97)と(1.98)を $f^*(\omega)$ を介して一本の式にまとめた形になっている。

1.9 フーリエ積分の用法 線形の波動伝ば問題の解は、波源となるものを分解して各々の波源成分に対する応答を求め、それらを重ね合わせて表わすことができる。その線形重ね合せには級数和として行う場合と積分表示にして行う場合が考えられるが、衝撃問題でよく用いられるフーリエ積分による場合を考えてみる。

次の表面圧力が $x=0$ に作用して半空間 $x>0$ に生ずる応力波を求めたいとする。

$$\tau_x = -p_0 e^{-\gamma t} H(t) \quad (1.101)$$

ここに $H(t)$ はヘビサイド関数である。式(1.97)と(1.98)により表面圧力 τ_x は次のように表わせる。

$$\tau_x(0, t) = \frac{p_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\gamma} d\omega \quad (1.102)$$

上式の表面力の成分 $(\omega + i\gamma)^{-1} e^{-i\omega t}$ によって半空間に生ずる波は、時間遅れ x/c_L を考えて

$$\tau_x(x, t) = \frac{1}{\omega + i\gamma} e^{-i\omega(t - x/c_L)} \quad (1.103)$$

の時間調和応力波になる。(1.102)の作用力(波源)成分に対する解が(1.103)で表わせるから線形重ね合せの積分表示にすれば(1.102)に従って

$$\tau_x = \frac{p_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t - x/c_L)} \frac{1}{\omega + i\gamma} d\omega \quad (1.104)$$

と表わせる。式(1.104)は式(1.101)の表面力によって生ずる応力の形式解である。式(1.104)の積分は複素面上の積分法を用いて評価できる。そこで解に現われる積分の形

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ia\zeta} f(\zeta) d\zeta \quad (1.105)$$

考える。ここに $f(s)$ は一価関数であり a は実数とする。留数定理(residue theorem)を用いる。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{ias} f(s) ds = (\text{積分回路 } \Gamma \text{ 内の留数和}) \quad (1.106)$$

ただし回路 Γ は反時計まわりである。式(1.105)の積分を求めるため複素平面の Γ を実軸と原点まわりの半径 R の半円弧よりなるものを選ぶ。 $a > 0$ の時、 $R \rightarrow \infty$ の極限で半円弧に沿う積分が 0 になるように半円は上半面にとる。ただしこの時、 $|f(Re^{i\theta})| \leq F(R)$ の条件が満足されていなければならない。これはジョルダンの補助定理としてよく知られている。留数定理とジョルダンの補助定理は多くの複素解析に関する本に説明されている。

式(1.104)の特別な場合について考える。半円弧上の積分を 0 にするため $t - \frac{x}{c_2} < 0$ の時、上半面で積分回路を用じ、 $t - \frac{x}{c_2} > 0$ の時、下半面で回路を用じる。上半面に被積分関数の極(pole)がないから $c_2 t < x$ の時

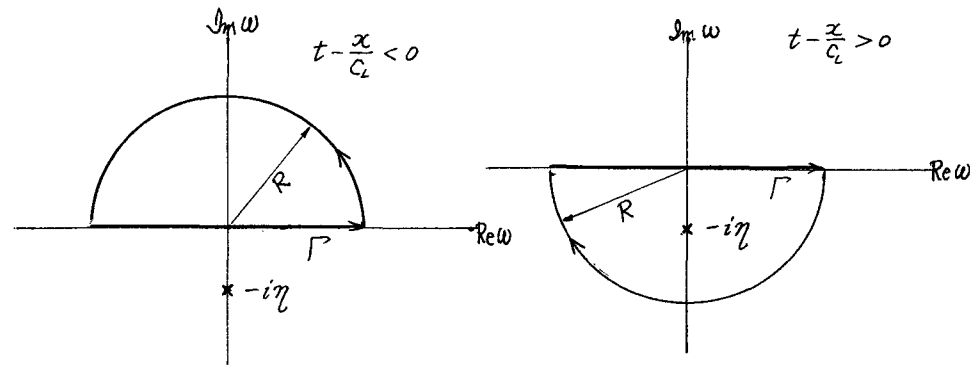
$$c_2(x, t) \equiv 0 \quad (1.107)$$

下半面には $\omega = -i\eta$ の極があるから $c_2 t \geq x$ の時

$$c_2 = -p_0 \exp\left[-\eta\left(t - \frac{x}{c_2}\right)\right] \quad (1.108)$$

を得る。これはまさに 1.3 節で得た解である。

以上の例は、成分に分けて解析し、その解を積分(重ね合せ)するという点でフーリエ解析の特徴を明らかにしているが、例が幾分単純すぎる。フーリエ解析の効果的な取扱いは、後述する積分変換法に基づく解析で明らかになり、基本的思想は本節と同じである。



[第1章終り]

第 2 章 線形弾性理論

2.1 緒言

第 1 章では、一次元問題に限定して線形理論の誘導条件(線形化の条件)の説明とともに動弾性解析の基礎となる一般的な理論や定理のおおよそを議論した。弾性体はすべての外力を取り去れば自然な状態にもどるので、その状態における物体点の基準位置 X と時間 t を独立変数とする物質表示によって記述すれば、もとの状態との対応が容易となり考える上で便利になる。三次元弾性体を支配する一般的な基礎式は、厳密な誘導に基づけば非線形であるが、弾性体内を伝播する種々の波による動的な効果は線形理論に基づいても多くの事実を十分に表現できることが経験的に知られている。そこで本章で取扱う範囲を線形波動に関連する事柄に限定する。すなわち、仮定として、変位成分の空間勾配が十分小さく物質表示でも線形になり、さらに変位成分の時間導関数も十分小さければ、速度と加速度の空間表示に現われる移動による項(*convective term*)が省略できる。したがって物質表示と空間表示とによる差異はなくなりいずれか一方の表記法に従えば十分である。

線形弾性理論に関しては詳細な取扱いをした著書もいくつかあるので、ここでは、後ほどの参照のため、一般的基礎式および具体的な直角座標系、球座標系、円柱座標系における基礎式を手短かにまとめるにとどめ、動的問題に関連するいくつかの項目について重点的に議論する。

2.2 記号と数学的準備

物理量は種々の階数のテンソルによって数学的に表わされる。物理法則を記述する式はテンソル方程式である。空間の方向に関係せず単一の数値で表わされる量はスカラーもしくは 0 階のテンソルによって表わされる。1 階のテンソルはベクトルであり、方向と大きさによって定められる量を表わす。より複雑な物理量は 2 階以上のテンソルで表わせる。ここでは細文字のローマン体もしくはギリシャ字体によってスカラー量を表わし、太文字のローマン体でベクトル量を、太文字のギリシャ体で 2 階のテンソルを表現する。

2.2.1 指標記法 以下の事柄は直角座標系で考えれば十分である。添字 j を指標と呼び、 j は 1, 2, 3 の値をとる。この指標を用いれば座標軸は x_j 、そしてその軸方向を与える基底ベクトルは i_j と表わす約束をする。ベクトル u の成分は u_j と記され

$$u = u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 \quad (2.1)$$

式(2.1)の形の和が連続体の力学の数学的表現にしばしば現われるので繰返す添字についての和を意味する総和規約(*summation convention*)を導入する。すなわち式(2.1)は

$$u = u_j i_j \quad (2.2)$$

と書ける。総和規約の別の使用例として、二つのベクトルのスカラー積(内積)が次のように表現できる。

$$u \cdot v = u_j v_j = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \quad (2.3)$$

ベクトルの u_j の式において j は 1, 2, 3 のうちいずれか 1 つの値をとる自由標であるが、式(2.2)と式(2.3)の j は 1, 2, 3, のすべての値をとらねばならない擬標(*dummy index*)である。

下添字が i, j のように 2 つの自由標を有する量は 2 階のテンソル T の成分を表わし、同様に 3 つの自由標は 3 階のテンソル量を定める。良く知られた特別の 2 階テンソルにクロネッカーのデルタがある。この成分は、

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2.4)$$

で定義される。また 3 階テンソルである交代テンソル(*alternating tensor*)もよく用いられ、その成分は

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & (ijk \text{ が } 123 \text{ の順で偶置換になっているとき}) \\ 0 & (ijk \text{ のいずれかが等しくなるとき}) \\ -1 & (ijk \text{ が } 123 \text{ の順で奇置換になっているとき}) \end{cases} \quad (2.5)$$

交代テンソル(交代記号ともいう)と総和規約を用いてベクトル積(外積) $h = u \wedge v$ の成分を表わせば

$$h_i = e_{ijk} u_j v_k \quad (2.6)$$

となる。 h の成分を具体的に書き出せば

$$h_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2, \quad h_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3, \quad h_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

2.2.2 ベクトル演算子

ベクトル演算子 ∇ (又は grad)

ベクトル演算子 ∇ と記す次の演算子である。

$$\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (2.7)$$

ベクトル演算子 ∇ をスカラー場 $f(x_1, x_2, x_3)$ に作用させれば、スカラー場の勾配として知られているベクトル場を得る。

$$\text{grad } f = \nabla f = \mathbf{i}_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

指標表記すれば、偏微分が、 ∂ によって表わして

$$\text{grad } f = \nabla f = \mathbf{i}_p f_{,p} \quad (2.8)$$

$f_{,p}$ は一つの添字 p が付いているので1階のテンソル成分、すなわちベクトルであることを示している。

$\mathbf{u}(\mathbf{x})$ で表わされるベクトル場において、ベクトル成分は空間座標の関数である。それを

$u_i(x_1, x_2, x_3)$ と記す。関数 $u_i(x_1, x_2, x_3)$ が微分可能とすれば9つの偏導関数 $\partial u_i(x_1, x_2, x_3) / \partial x_j$

を指標によって $u_{i,j}$ と表わせる。 $u_{i,j}$ は2階のテンソル成分である。ベクトル演算子をスカラー積をとる時と同じ類推によってベクトルに作用させれば、スカラー場が得られ、ベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ の発散

(divergence) という。すなわち

$$\text{div } \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = u_{i,i} \quad (2.9)$$

∇ と \mathbf{u} のベクトル積をとれば、 \mathbf{u} の回転 (curl) というベクトルが得られ $\text{curl } \mathbf{u}$ または $\nabla \wedge \mathbf{u}$

と記す。^[註] もし $\mathbf{g} = \nabla \wedge \mathbf{u}$ ならば \mathbf{g} の成分は

$$g_i = \epsilon_{ijk} u_{k,j} \quad (2.10)$$

ラプラス演算子 ∇^2 は勾配の発散である。これはスカラー場を2度微分して別のスカラー場を作る。

すなわち、 $\text{div grad } f = \nabla \cdot \nabla f = f_{,ii}$ (2.11)

ベクトル場のラプラス演算子は $\nabla^2 \mathbf{u}$ と表わせる別のベクトル場を作り次のようになる。

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = u_{p,ij} \mathbf{i}_p \quad (2.12)$$

2.2.3 ガウスの定理

本節の最後としてテンソル解析で重要な積分定理を述べる。

その定理は、物体を取囲む面上の積分とその物体内の体積積分とを関係づけるものでガウスの定理と

[註] $\text{curl } \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u}$

知られている。区分的に連続して回転する接平面を有する面 S によって囲まれた体積 V の凸領域 \mathcal{B} を考える。テンソル場 $\tau_{jkl\dots p}$ を考え、そのすべての成分が \mathcal{B} 内で連続微分可能とすると、ガウスの定理は

$$\int_V \tau_{jkl\dots p, i} dV = \int_S n_i \tau_{jkl\dots p} dA \quad (2.13)$$

ここに、 n_i は面 S に垂直な外向きの単位ベクトルである。もしベクトル \mathbf{u} の3成分を用いるならば逐次 $\tau_{jkl\dots p}$ に代入して得られる三つの式の和をとれば

$$\int_V u_{i,i} dV = \int_S n_i u_i dA \quad (2.14)$$

式(2.14)はベクトル解析においてよく知られた発散定理であって、閉じた曲面に垂直な外向きベクトル成分の面積分が、その閉曲面内における発散の体積積分に等しいことを言っている。

2.2.4 記号

線形弾性理論を支配する基礎群を取扱う上で、一貫して次の記号を用いて表わす。

$$\text{位置ベクトル } \mathbf{x} \quad (\text{座標 } x_i) \quad (2.15)$$

$$\text{変位ベクトル } \mathbf{u} \quad (\text{成分 } u_i) \quad (2.16)$$

$$\text{微小ひずみテンソル } \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{成分 } \epsilon_{ij}) \quad (2.17)$$

$$\text{応力テンソル } \boldsymbol{\tau} \quad (\text{成分 } \tau_{ij}) \quad (2.18)$$

2.3 運動学と動力学 (Kinematics and Dynamics)

2.3.1 変形

物体点の変位を定める場を $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ とする。連続体であることを考慮、

すれば、媒体の変形は変位ベクトルの勾配によって表わすことができる。線形理論の範囲内で、次の成分をもつ微小ひずみテンソル $\boldsymbol{\epsilon}$ により変形は非常に簡単に表わせる。

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.19)$$

$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ であることは明白で $\boldsymbol{\epsilon}$ は2階の対称テンソルになる。また、次の成分を有する回転

$$\text{テンソル } \boldsymbol{\omega} \text{ を導入する } \omega_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) \quad (2.20)$$

$\boldsymbol{\omega}$ は反対称テンソルで $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ となる。

2.3.2 並進運動量と応力テンソル 連続体理論のある基礎的条件を考へるに良い方法は物体内に任意にとった面を介して一方側から他方側へ及ぼす力学的作用を調べその状態を適切に表現することである。そのため応力ベクトル (traction) \mathbf{t} を導入する。これは面積要素 (面素) が外向き単位ベクトル \mathbf{n} をもつとき、その単位面積当りのベクトル力として定義され、一般に面素の位置 \mathbf{x} のみならず \mathbf{n} の方向にも依存している。

ある物体から、 S を境界とする閉領域 $V+S$ を取り出して考えよう。面 S には応力ベクトル $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ が作用し、また物体の各質量要素は単位質量当り $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ の体積力が作用しているとする。この時、並進運動量の平衡より、物体の並進運動量の時間変化率は、その時物体に外から作用する合力に等しい。線形理論では、これを次式のように表わせる。

$$\int_S \mathbf{t} dA + \int_V \rho \mathbf{f} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \dot{\mathbf{u}}) dV \quad (2.21)$$

「四面体の議論」によって得られる応力ベクトル \mathbf{t} と応力テンソル $\boldsymbol{\tau}$ の関係

$$t_l = \tau_{kl} n_k \quad (2.22)$$

すなわち、コーシーの応力式^[註]を用いる。ただし τ_{kl} は単位法ベクトル \mathbf{i}_k を有する面に作用する l 方向の応力成分である。式(2.22)を式(2.21)に代入すれば、指標記法により次のように書ける。

$$\int_S \tau_{kl} n_k dA + \int_V \rho f_l dV = \int_V \rho \ddot{u}_l dV \quad (2.23)$$

面積分はガウスの定理、式(2.13)によって体積積分に変換でき

$$\int_V (\tau_{kl,k} + \rho f_l - \rho \ddot{u}_l) dV = 0 \quad (2.24)$$

体積 V は物体の任意部分であるから被積分関数が連続であり、

$$\tau_{kl,k} + \rho f_l = \rho \ddot{u}_l \quad (2.25)$$

が成り立つ。これはコーシーの運動の第一法則 (Cauchy's first law of motion) である。

2.3.3 角運動量の平衡 線形理論における角運動量の平衡原理は

$$\int_S (\mathbf{x} \wedge \mathbf{t}) dA + \int_V (\mathbf{x} \wedge \mathbf{f}) \rho dV = \int_V \rho \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) dV \quad \text{[註2]}$$

右辺の時間微分を行い、指標記法を用いれば、次のように書ける。

[註] たとえば 瀧美「固体力学概論」コナ社、114ページ

[註2] 式(2.21)の両辺に左側から演算 $\mathbf{x} \wedge$ を作用させれば得られる。

$$\int_S e_{klm} x_l t_m dA + \int_V \rho e_{klm} x_l f_m dV = \int_V \rho e_{klm} x_l \ddot{u}_m \quad (2.26)$$

上式は式(2.5)(2.6)から次の関係が成り立つことにより確かめられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{x} \wedge \dot{\mathbf{u}}) ; \frac{\partial}{\partial t} (e_{klm} x_l \dot{u}_m) = e_{klm} (\dot{u}_l \dot{u}_m + x_l \ddot{u}_m) = e_{klm} x_l \ddot{u}_m$$

$$e_{klm} \dot{u}_l \dot{u}_m = e_{klm} \dot{u}_m \dot{u}_l = e_{kml} \dot{u}_m \dot{u}_l = -e_{klm} \dot{u}_l \dot{u}_m, \therefore e_{klm} \dot{u}_l \dot{u}_m = 0$$

式(2.26)の t_m を式(2.22)によって消去し、ガウスの定理を用いれば左の項が

$$\int_S e_{klm} x_l \tau_{jm} n_j dA = \int_V e_{klm} (\delta_{lj} \tau_{jm} + x_l \tau_{jm,j}) dV$$

となるから、式(2.25)を考慮して、式(2.26)は $\int_V e_{klm} \delta_{lj} \tau_{jm} dV = 0$ もしくは $e_{klm} \tau_{lm} = 0$ となる。これは

$$\tau_{lm} = \tau_{ml} \quad (2.27)$$

を意味する。すなわち、応力テンソルは対称であり、指標が可換である。

2.4 均質等方な線形弾性体

2.4.1 応力-ひずみ関係 応力テンソル成分とひずみテンソル成分との線形関係は

一般的に書けば $\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$

ここに $C_{ijkl} = C_{jirk} = C_{klij} = C_{ijlk}$

によってテンソル C_{ijkl} の81成分のうち21成分が独立である。もし C_{ijkl} が定数ならば、その媒体は弾性的に均質である。また τ_{ij} と ϵ_{ij} の各成分を表現する直交座標系の方向によらずその弾性定数が同じならば、材料の方向性がなく弾性的に等方である。これは定数 C_{ijkl} が

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

と表わせることを意味している。^[註] 従ってフックの法則は良く知られた形

$$\tau_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2.28)$$

を仮定するものである。式(2.28)の λ と μ は Lamé の弾性定数として知られている。上式で $i=j$ において和をとれば $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$ になることに注意して

$$\tau_{ii} = (3\lambda + 2\mu) \epsilon_{ii} \quad (2.29)$$

[註] たとえば 井上「弾性力学の基礎」日刊工業新聞社 63ページ

式(2.28)に $\epsilon_{ii} = \tau_{kk} / (3\lambda + 2\mu)$ を代入し ϵ_{ij} について解けば応力表示のひずみを得る。

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \tau_{kk} + \frac{1}{2\mu} \tau_{ij} \quad (2.30)$$

ϵ_{ij} は $\mu \neq 0$, $3\lambda + 2\mu \neq 0$ の時においてのみ τ_{ij} によって一義的に定められる。有限のある応力値に対して、あるひずみが存在するから $|\mu| < \infty$, $|3\lambda + 2\mu| < \infty$ でなければならない。次に特別の場合を考えて μ と $3\lambda + 2\mu$ の正值性を述べる。 $\tau_{12} \neq 0$ で、その他の応力がすべて 0 となる単純せん断状態を想定すれば式(2.30)より $\tau_{12} = 2\mu \epsilon_{12}$ となり 2μ は τ_{12} と ϵ_{12} を関係づける剪断係数になる。実験より、微小変形では τ_{12} と ϵ_{12} は同一方向であるから $\mu > 0$ である。一方、静水圧状態として知られている特別な場合は $\tau_{ij} = -p \delta_{ij}$ で定義される。式(2.29)を用いれば $p = -B \epsilon_{kk}$ となる。ただし B は $(\lambda + \frac{2}{3}\mu)$ であり、圧縮係数(modulus of compression)あるいは体積弾性係数(bulk modulus)として知られている。微小変形では ϵ_{kk} は要素の体積変化を表わし、そして静水圧は物体の体積を減少させるから、 $B > 0$ 、すなわち $3\lambda + 2\mu > 0$ である。以上より、 μ と $3\lambda + 2\mu$ に関する結果をまとめれば

$$0 < 3\lambda + 2\mu < \infty, \quad 0 < \mu < \infty \quad (2.31)$$

2.4.2 偏差応力と偏差ひずみ 応力テンソルは二つのテンソル和として書くことができる。そのうちの一つはすべての垂直応力成分が $\frac{1}{3}\tau_{kk}$ でせん断応力のない球応力あるいは静水圧応力であり、残りのもう一つのテンソルは偏差応力(stress deviators)と言い S_{ij} で表記する。従って偏差応力成分は

$$S_{ij} = \tau_{ij} - \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad (2.32)$$

によって定義される。同様な方法で偏差ひずみ e_{ij} を次式によって定義することができる。

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.33)$$

式(2.28)と式(2.29)を用いて式(2.32)の応力を消去すれば S_{ij} と e_{ij} との間に、次の簡単な関係が成立する。

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij} \quad (2.34)$$

ここに μ は横弾性係数である。また、式(2.29)から

$$\frac{1}{3} \tau_{kk} = B \epsilon_{kk} \quad (2.35)$$

ただし $B = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ (2.36)

B は静水圧状態の議論で以前に導入した体積弾性係数である。式(2.34)と式(2.35)は、フックの法則(2.28)に完全に等価であるので、均質等方な線形弾性体のための構成方程式として十分である。線形弾性にしばしば現われる他の弾性係数は縦弾性係数(ヤング率) E とポアソン比 ν である。等方弾性係数間に成り立つ多くの関係を表2.1にまとめて示す。

2.4.3 ひずみエネルギー ひずみエネルギー密度 \mathcal{U} の定義によって

$$d\mathcal{U} = \tau_{ij} d\epsilon_{ij}$$

これを偏差応力と偏差ひずみを用いて $d\mathcal{U}$ を次の形にする。

$$\begin{aligned} d\mathcal{U} &= (S_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij}) d(\epsilon_{ij} + \frac{1}{3} \epsilon_{kk} \delta_{ij}) \\ &= S_{ij} d\epsilon_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} d\epsilon_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} S_{ij} d\epsilon_{kk} + \frac{1}{9} \tau_{kk} \delta_{ij} \delta_{ij} d\epsilon_{kk} \\ &= S_{ij} d\epsilon_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{kk} d\epsilon_{kk} + \frac{1}{3} S_{kk} d\epsilon_{kk} + \frac{1}{9} \tau_{kk} \cdot 3 \cdot d\epsilon_{kk} \\ &= S_{ij} d\epsilon_{ij} + \frac{1}{3} \tau_{kk} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 \cdot d\epsilon_{kk} + \frac{1}{3} \tau_{kk} \cdot d\epsilon_{kk} \end{aligned}$$

したがって

$$d\mathcal{U} = \frac{1}{3} \tau_{kk} d\epsilon_{kk} + S_{ij} d\epsilon_{ij}$$

さらに式(2.34)と(2.35)を用いて、積分すれば

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} B (\epsilon_{kk})^2 + \mu e_{ij} e_{ij}$$

ここに、 \mathcal{U} が変形のない時の基準状態で 0 となることを仮定している。(すなわち積分定数が0) 従って式(2.31)を考慮すれば

表2.1 等方弾性定数間の関係

	E, ν	E, μ	λ, μ
λ	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	λ
μ	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	μ	μ
E	E	E	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$
B	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$
ν	ν	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$

$$\mathcal{U} \text{の正値性} \quad \mathcal{U} \geq 0 \quad (2.37)$$

が成り立つことが明らかになる。また違った観点から言えば式(2.31)はひずみエネルギー関数を正値にするための必要十分条件として述べられる。表2.1を参考にして次の条件

$$E > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}$$

は式(2.31)と等価であることが検証できる。等方のひずみエネルギー関数は別の表現ができ

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{kk})^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.38)$$

2.5 動的弾性問題の設定条件

空間に正則領域 V を占める物体 \mathcal{B} を考える。物体 \mathcal{B} が有限体であろうと無限体であろうと その物体内部 (interior) を V , 閉包 (closure) を \bar{V} , 境界 (boundary) を S とす。均質等方な線形弾性体の運動を支配する方程式系は、次の応力運動方程式、フックの法則、ひずみ変位関係からなっている。

$$\tau_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.39)$$

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.40)$$

$$\text{そして} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.41)$$

式(2.40)を式(2.39)に入れてひずみの運動方程式とし、さらにその式に式(2.41)を代入すれば変位運動方程式を得る。

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.42)$$

式(2.39)~(2.42)は変形を受けない物体 \mathcal{B} の各点で満たされなければならない。一般に T を任意の時間として、

$$u_i(\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{C}^2(V \times T) \cap \mathcal{C}^1(\bar{V} \times T) \quad (2.43)$$

$$f_i(\boldsymbol{x}, t) \in \mathcal{C}(\bar{V} \times T) \quad (2.44)$$

ここに $\mathcal{C}(R)$ によって定義される関数の級 (class) は、 R によって定義される部分集合 (subset)

上で定義され連続な任意階数のすべてのテンソル値関数からなっている。正整数に対し $\mathcal{C}^n(R)$ は R の内部で n を含む回数までの偏導関数が存在するすべての関数 $\mathcal{C}(R)$ からなる。もし、変位がなめらかな条件(2.43)が成り立たない場合は、その不連続部において跳躍の条件が満たされねばならない。

変形を受けない物体の表面 S 上で次のように境界条件を与えるのが最も一般的である。

(i) 変位境界条件 ; 境界で三つの成分 u_i が与えられる。

(ii) 応力境界条件 ; 単位法ベクトル \boldsymbol{n} をもった境界上で三つの応力ベクトル成分 t_i が与えられる。コーシーの公式より

$$t_i = \tau_{ji} n_j \quad (2.45)$$

この場合、応力テンソルの3成分を与えることと等価である

(iii) 混合境界条件 ; 境界の一部 S_1 に変位境界条件を、残りの境界部分 $S-S_1$ に応力境界条件を与える。

問題設定を完全にするためには、動的過渡的問題に対し、初期条件が必要になる。すなわち

$t=0$ において V 内の変位及び速度が

$$u_i(\boldsymbol{x}, 0) = \dot{u}_i(\boldsymbol{x})$$

$$\dot{u}_i(\boldsymbol{x}, 0^+) = \dot{v}_i(\boldsymbol{x}).$$

で規定される。

2.6 一次元問題

もし体積力と応力テンソル成分が一つの空間変数 x_1 に依存するならば、応力運動方程式は次式になる。

$$\tau_{i1,1} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.46)$$

そこで三つの特別な場合を考えよう。

縦ひずみ (longitudinal strain) すべての変位成分のうち縦変位 $u_1(x_1, t)$ のみが0にならない場合で、ひずみ成分は $\varepsilon_{11} = \partial u_1 / \partial x_1$ のみである。式(2.28)を用いて応力テンソル成分は

$$\tau_{11} = (\lambda + 2\mu) u_{1,1} \quad \tau_{22} = \tau_{33} = \lambda u_{1,1} \quad (2.47)$$

そして運動方程式は

$$(\lambda+2\mu)u_{1,11} + \rho f_1 = \rho \ddot{u}_1 \quad (2.48)$$

縦応力 (longitudinal stress) x_1 と t のみの関数の縦垂直応力 (longitudinal normal stress) τ_{11} が恒等的に 0 にならないただ 1 つの成分となる場合である。横垂直応力 τ_{22} と τ_{33} を 0 に等しいとおき、次の関係を得る。

$$\tau_{22} = \tau_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\epsilon_{11} = -\nu E \epsilon_{11} \quad (2.49)$$

ここに ν はポアソン比である。これらの結果を τ_{11} の式に代入して

$$\tau_{11} = E \epsilon_{11} \quad (2.50)$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad (2.51)$$

定数 E は縦弾性係数(ヤング率)として知られている。運動方程式は式(2.50)と(2.46)を入れて得られる。一次元応力における波動伝播は 1.5 節で考えた。

せん断 (shear) この場合、変位は x_1 軸を垂直に切る平面内にある。すなわち

$$\mathbf{u} = u_2(x_1, t)\mathbf{j} + u_3(x_1, t)\mathbf{k}$$

そして応力は $\tau_{21} = \mu u_{2,1}$, $\tau_{31} = \mu u_{3,1}$

明らかに運動方程式は、それぞれ u_2 と u_3 に対して連成しない波動方程式になる。(式(2.46)参照)

2.7 二次元問題

体積力と応力テンソル成分が x_3 の座標(座標 x_3 ということにする)に独立ならば二次元問題の取扱になる。式(2.39)で $\partial/\partial x_3 \equiv 0$ として応力運動方程式が誘導され、その方程式系は x_3 の非連成系に分けられる。すなわち次の両式である。

$$\tau_{3\beta, \beta} + \rho f_3 = \rho \ddot{u}_3 \quad (2.52)$$

$$\tau_{\alpha\beta, \beta} + \rho f_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha \quad (2.53)$$

ただし、ギリシャ文字の指標は、本節を通して 1 と 2 のみの値をとるものと見なす。

2.7.1 面外せん断 (antiplane shear)

変位 $u_3(x_1, x_2, t)$ によって表わされる二

次元変形状態を面外せん断変形(縦せん断変形)と呼ぶ。対応する応力成分はフックの法則から

$$\tau_{3\beta} = \mu u_{3, \beta} \quad (2.54)$$

式(2.52)と(2.54)から $\tau_{3\beta}$ を消去すれば $u_3(x_1, x_2, t)$ を支配するスカラー波動方程式を得る。

$$\mu u_{3, \beta\beta} + \rho f_3 = \rho \ddot{u}_3 \quad (2.55)$$

式(2.55)に従う純せん断運動を水平偏向せん断運動 (horizontally polarized shear motions) といっている。波動伝播を論ずる時はこの変形波を SH 波と呼んでいる。

2.7.2 面内運動 (inplane motions)

式(2.53)に支配される面内変位 $u_\alpha(x_1, x_2, t)$

によって表わされる運動を面内運動という。これには平面ひずみ状態と平面応力状態がある。

平面ひずみ: この変形状態は x_3 方向変位がなく、すべての場の量が x_3 座標に無関係となる。従ってフックの法則より

$$\tau_{\alpha\beta} = \lambda u_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} + \mu (u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha}) \quad (2.56)$$

$$\tau_{33} = \lambda u_{\gamma, \gamma} \quad (2.57)$$

ここにギリシャ文字指標は 1 と 2 の値のみをとる。式(2.53)と(2.56)から $\tau_{\alpha\beta}$ を消去すれば

$$\mu u_{\alpha, \beta\beta} + (\lambda+\mu) u_{\beta, \beta\alpha} + \rho f_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha \quad (2.58)$$

もちろん式(2.58)は $u_3 \equiv 0$, $\partial/\partial x_3 = 0$ とすれば式(2.42)からも直接誘導できる。

平面応力 もし τ_{i3} のすべてが恒等的に 0 ならば二次元応力場は平面応力状態であると呼ばれる。この応力状態をフックの法則に考慮してひずみ ϵ_{33} と $\epsilon_{11} + \epsilon_{22}$ の関係

$$\epsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} u_{\gamma, \gamma} \quad (2.59)$$

を得る。したがって $\tau_{\alpha\beta}$ の表式は次のようになる。

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu} u_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} + \mu (u_{\alpha, \beta} + u_{\beta, \alpha}) \quad (2.60)$$

式(2.60)を(2.53)に代入すれば変位運動方程式を得る。支配方程式に関する限り平面ひずみと平面応力の違いは単に定係数の違いだけで一方が解析できれば他方の解析もその定係数を入れかえるだけでよい。しばしば薄い板は平面応力状態の面内運動として近似解析される。

2.8 エネルギー恒等式 (energy identity)

表面の応力ベクトルや体積力の作用により、物体内に機械的なエネルギーが蓄えられる。このような場合、作用により単位時間に送り込む仕事量を入力パワーと言う。境界 S をもち、正則域 V を占める物体 \mathcal{B} に対し、入力パワーを

$$P = \int_S t_i \dot{u}_i dA + \int_V \rho f_i \dot{u}_i dV \quad (2.61)$$

の式で表わす。コーシーの公式 $t_i = \tau_{ij} n_j$ とガウスの定理を適用すれば、上式は体積積分

$$P = \int_V [(\tau_{ij} \dot{u}_i)_{,j} + \rho f_i \dot{u}_i] dV = \int_V [\tau_{ij,j} \dot{u}_i + \tau_{ij} \dot{u}_{i,j} + \rho f_i \dot{u}_i] dV \quad (2.62)$$

になる。上式において $\dot{u}_{i,j}$ は

$$\dot{u}_{i,j} = \dot{\epsilon}_{ij} + \dot{\omega}_{ij} \quad (2.63)$$

に分けられる。 ϵ_{ij} と ω_{ij} は式(2.19)(2.20)によって定義される。そこで対称テンソル τ_{ij} と反対称テンソル ω_{ij} の縮約(同一指標にして和をとること)が0、すなわち $\tau_{ij} \omega_{ij} = 0$ であるから $\tau_{ij} \dot{u}_{i,j}$ は

$$\tau_{ij} \dot{u}_{i,j} = \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (2.64)$$

従って運動方程式(2.39)を考慮すれば、入力パワーの式(2.62)は次式となる。

$$P = \int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i dV + \int_V \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \quad (2.65)$$

物体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (2.66)$$

で定義されるので、入力パワーは次のように書きかえられる。

$$P = \frac{dK}{dt} + \int_V \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV$$

材料が線形弾性体なら、物体の全ひずみエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (2.67)$$

U の時間微分を評価すれば

$$\frac{dU}{dt} = \frac{1}{2} \int_V (\dot{\tau}_{ij} \epsilon_{ij} + \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) dV$$

ところでフックの法則を用いれば

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{ij} \epsilon_{ij} &= \{ \lambda \dot{u}_{k,k} \delta_{ij} + \mu [\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}] \} \epsilon_{ij} = \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \epsilon_{ij} \delta_{ij} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \epsilon_{ij} \\ &= \lambda \dot{\epsilon}_{kk} \epsilon_{kk} + 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} \epsilon_{ij} = (\lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} = \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \tau_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV$$

よって

$$P = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} \quad (2.68)$$

式(2.68)は表面応力ベクトルと体積力との作用により弾性体内に与えられるエネルギー(2.61)が、運動エネルギーとひずみエネルギーに変換されることを示している。最初静止の状態の弾性体に対し、式(2.61)と式(2.68)より、0から t までの時間積分をとれば、エネルギー恒等式

$$\int_0^t \int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}, s) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, s) dA ds + \int_0^t \int_V \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}, s) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, s) dV ds = K(t) + U(t) \quad (2.69)$$

を得る。ここに $K(t)$ と $U(t)$ は、それぞれ弾性体の運動エネルギーとひずみエネルギーである。

2.9 ハミルトンの原理 (Hamilton's principle)

2.9.1 原理の説明 空間の均質な系の動的挙動はただ一つの関数、ラグランジアン密度 \mathcal{L} によって規定することができる。この \mathcal{L} は、いわゆる n 個の一般座標変数 q_1, q_2, \dots, q_n とその一次導関数

$$\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} \quad \text{と} \quad q_{i,j} = \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \quad (2.70)$$

の関数である。すなわち、 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, q_{i,j})$

一般には、独立変数 x_j と t に \mathcal{L} が直接依存するとはなく、 $q_i, \dot{q}_i, q_{i,j}$ が x_j と t の関数であるために関接的に依存するだけである。ハミルトンの原理によれば、時刻 t_1 から t_2 の間にとりうるすべての運動経路のうち、実際に現象としてあらわれる経路は、ラグランジアン密度 \mathcal{L} の時空にわたった積分値が停留するようなものである。具体的に式で表現すれば、任意の体積 V の境界上と時刻 t_1 と t_2 で0となるような任意変化 δq_i を考えた時、その体積と時間にかつた積分値の変分が0になるということ

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L} dx_1 dx_2 dx_3 dt = 0 \quad (2.72)$$

変分法で確立しているように 積分域を不変として、変数 t, x_1, x_2, x_3 について可能なすべての値に対して

停留するよう
$$\int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathcal{L} dx_1 dx_2 dx_3 dt \quad (2.73)$$

の条件は、次のオイラーの方程式群が成り立つことである。[註]

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}_i} \right] + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (f_{i,j})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_i} = 0 ; \quad i=1, 2, 3 \quad (2.74)$$

この式群は系の運動方程式を包含している。もし物質が連続的に分布し、かつ保存系ならば、ラグランジェ密度 \mathcal{L} は 運動エネルギー密度 からポテンシャルエネルギー密度をさしひいたものに等しい。

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} \quad (2.75)$$

したがって 線形弾性理論では

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - \left[\frac{1}{2} \lambda (\epsilon_{kk})^2 + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \right] \quad (2.76)$$

であり \mathcal{L} は u_i と $u_{i,j}$ のみに依存している。

有限弾性体の 表面に応力ベクトルが作用しまた体積力も受ける時、ハミルトンの原理の式は

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \int_V (\mathcal{K} - \mathcal{U}) dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_e dt = 0 \quad (2.77)$$

の形に補正する。ここに δW_e は 作用する体積力と表面応力ベクトルによってなされる仕事を表す。

式(2.72)で述べたように ハミルトンの原理を利用する目的は 与えられたエネルギー密度から 運動方程式系を求めることである。均質等方な線形弾性体では式(2.76)を式(2.74)に代入し f_i を u_i と見なして微分を実行すれば 変位運動方程式が導出される。この原理の応用は梁の運動方程式の導出などにも見られる。

ここでは、理解を助けるために手始めに、運動量保存則から得られた 応力運動方程式(2.39)を用いて 逆に ハミルトンの原理を誘導し、矛盾のないことを示してみよう。

2.9.2 運動の変分方程式

ある定まりに体積力と表面の力を受ける弾性体の動弾

性問題を考える。境界面は S_t と S_u の二つの部分からなり、次の境界条件下にあるとする。

S_t 上で応力ベクトル t が指定される。

S_u 上で変位 u が指定される。

さて、その物体表面の拘束条件を満たす任意の変位 δu を考えよう。すなわち δu は S_u 上で 0 となり

[註] たとえば「長谷川「変分学の応用」森北出版

S_t 上で任意である。さらに δu は x_i と t の関数とし、回微分可能とする。その任意の変位 δu を 仮想変位 (virtual displacement) と呼ぶ。「仮想」という言葉は、仮想変位が実際の変位を表わすものではないことを意味している。その仮想変位は その物体上に想定されたもので、対応する外力による仮想仕事を表式化するためのものである。もし ρf の 体積力密度と考えると、この場合の仮想仕事を式にすれば

$$\delta W = \int_V \rho f_i \delta u_i dV + \int_{S_t} t_i \delta u_i dA \quad (2.78)$$

式(2.78)の面積分は、コーシーの応力公式 $t_i = \tau_{ij} n_j$ とガウスの定理(2.13)を用いて 体積積分に書き換えてきて

$$\int_{S_t} t_i \delta u_i dA = \int_V (\tau_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_V (\tau_{ij,j} \delta u_i + \tau_{ij} \delta u_{i,j}) dV, \quad (2.79)$$

さらに、分割 $\delta u_{i,j} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) + \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} - \delta u_{j,i}) = \delta \epsilon_{ij} + \delta \omega_{ij}$ を考えて、 $\delta \epsilon_{ij}$ と $\delta \omega_{ij}$ が それぞれ対称、反対称であることを注意すれば 対称テンソル τ_{ij} に対し

$$\tau_{ij} \delta u_{i,j} = \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij}$$

が成り立つ。従って(2.78)は

$$\delta W = \int_V \rho f_i \delta u_i dV + \int_V (\tau_{ij,j} \delta u_i + \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij}) dV$$

ここで 応力運動方程式(2.39)を用いれば

$$\delta W = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (2.80)$$

仮想仕事に対する2つの式(2.78)(2.80)を並べて書けば 変分運動方程式 (variational equation of motion) を得る。

$$\int_V \rho f_i \delta u_i dV + \int_{S_t} t_i \delta u_i dA = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (2.81)$$

2.9.3 ハミルトンの原理の誘導

任意時間の t_0 から t_1 にかけて変分運動方程式を

積分すれば

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \tau_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV \quad (2.82)$$

右辺第1項で積分順序を入れかえ、 t について部分積分すると その項は

$$I = \int_V \rho \dot{u}_i \delta u_i \Big|_{t_0}^{t_1} dV - \int_V dV \int_{t_0}^{t_1} \dot{u}_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta u_i) dt$$

さて、時刻 t_0 と t_1 の瞬間において物体内のすべての点に対する δu_i が 0 である条件をつけ加えると

$$\begin{aligned}
 I &= -\int_V dV \int_{t_0}^{t_1} \dot{u}_i \frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta u_i) dt = -\int_V \rho dV \int_{t_0}^{t_1} \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dt \\
 &= -\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \rho \cdot \frac{1}{2} (\delta \dot{u}_i \dot{u}_i + \dot{u}_i \delta \dot{u}_i) dV = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \frac{1}{2} \rho \delta (\dot{u}_i \dot{u}_i) dV \\
 &= -\int_{t_0}^{t_1} \delta K dt
 \end{aligned}$$

ここに K は運動エネルギーで $K = \int_V \mathcal{K} dV = \frac{1}{2} \rho \int_V \dot{u}_i \dot{u}_i dV$

物体が完全弾性体であるとするば ひずみエネルギー密度 $\mathcal{U}(\varepsilon_{ij})$ は応力テンソル τ_{ij} と

$$\tau_{ij} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.83)$$

の関係が成立するから、 $\int_V \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \delta \int_V \mathcal{U} dV = \delta U$ 。

よって式(2.82)の右辺が $\delta \int_{t_0}^{t_1} (U - K) dt$ 、左辺が外からの作用する仕事(2.78)になるので

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U - K) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta W_e dt \quad (2.84)$$

上式は完全弾性体に対するハミルトンの原理を表わす式(2.77)である。

2.10 変位ポテンシャル

体積力のない時の変位運動方程式は式(2.42)より

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,j} = \rho \ddot{u}_i \quad (2.85)$$

この方程式は 三つの変位成分が連成しているので直接解析するには不便な形である。もちろん、三つの式のうち二つの式を用いて、三つの変位成分のうち二つを消去して連成を解消することもできるが、この場合、4階の偏微分方程式になる。もっと便利な方法は変位ベクトル成分をいくつかのポテンシャルの微分によって表現することである。これらのポテンシャルはそれぞれ独立に波動方程式を解いて求めることができ、無限体においては互いに連成しない。ベクトル表記で変位運動方程式(2.85)は

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.86)$$

と書ける。さて、変位ベクトルを次の形に分解することと考える。

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} \quad (2.87)$$

これを式(2.86)に代入すると、

$$\mu \nabla^2 [\nabla \varphi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi}] + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot [\nabla \varphi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi}] = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\nabla \varphi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi}]$$

ここで $\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi$ 、 $\nabla \cdot \nabla \wedge \boldsymbol{\psi} = 0$ であるから整理すると

$$\nabla [(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \varphi - \rho \ddot{\varphi}] + \nabla \wedge [\mu \nabla^2 \boldsymbol{\psi} - \rho \ddot{\boldsymbol{\psi}}] = 0 \quad (2.88)$$

明らかに、変位表示(2.87)が次式を満足するならば上記の運動方程式は満足される。

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_L^2} \ddot{\varphi} \quad (2.89)$$

そして

$$\nabla^2 \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{c_T^2} \ddot{\boldsymbol{\psi}} \quad (2.90)$$

ここに $c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ 、 $c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}$ (2.91a,b)

式(2.89)と(2.90)は連成しない波動方程式になっている。スカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{\psi}$ の成分とが一般に境界条件を介して連成し、かなり数学的に複雑になることが多いけれども、解析は変位を分解することにより簡単化されるはずである。初期値境界値問題の解としてふさわしい基本解の形が式(2.89)と(2.90)の解によって与えられる。それらは任意関数形あるいはその積分形にして表現されるが境界条件と初期条件を満たすように選ぶことが出来れば問題の解が見つかったことになる。その解は一意性定理から唯一の解であり、このことは第3章で議論する。

式(2.87)はスカラーポテンシャルと3つのベクトルポテンシャル成分の合計4つの関数によって、3つの変位ベクトル成分を結びつけている。したがって φ と $\boldsymbol{\psi}$ の成分に対しては補追すべきもう一つの制限条件がなければならぬ。一般に $\boldsymbol{\psi}$ の成分は、何らかの方法で関係づけられている。これだけではないということではないが、広く

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$$

の関係を与えて、もう一つの制限条件として用いられている。これは第3.5節で取扱うベクトルのヘルムホルツ分解の議論で一貫して採用しており、色々考察する上で便利になる。また3.4節に示すように $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$ の条件は、体積力の分布を受ける無限体に任意の初期条件下において生ずる動弾性変位が $\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \wedge \boldsymbol{\psi}$ の形であるための十分条件となっている。

2.11 直角座標系における基礎方程式群のまとめ

均質等方な線形弾性理論を支配する方程式は指標記述で 2.5 節に与えられている。しかし弾性波の伝はの分野に関する多くの報告はむしろ x_1, x_2, x_3 よりも座標として x, y, z を用いている。 x, y, z 系の表現で座標方向の変位をそれぞれ u, v, w によって記述すればひずみと変位の関係は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.92 a, b, c)$$

$$2\varepsilon_{xy} = 2\varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.93)$$

$$2\varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.94)$$

$$2\varepsilon_{zx} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.95)$$

ひずみと応力の関係はフックの法則によって表現されるように次式になる。

$$\tau_x = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.96)$$

$$\tau_y = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.97)$$

$$\tau_z = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.98)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.99)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.100)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.101)$$

変位ベクトル成分とスカラーポテンシャルおよびベクトルポテンシャルとの関係は式(2.87)に示した。 x, y, z 系では

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \quad (2.102)$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \quad (2.103)$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_z}{\partial y} \quad (2.104)$$

スカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル ψ の成分 ψ_x, ψ_y, ψ_z は次式を満たす。

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2.105)$$

$$\nabla^2 \psi_x = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \psi_y = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \psi_z = \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi_z}{\partial t^2} \quad (2.106 a, b, c)$$

$$\therefore \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.107)$$

式(2.102) ~ (2.104) を式(2.96) ~ (2.101) に代入すれば、応力は変位ポテンシャルで書ける。

$$\tau_x = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) \right\} \quad (2.108)$$

$$\tau_y = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) \right\} \quad (2.109)$$

$$\tau_z = \lambda \nabla^2 \varphi + 2\mu \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \right\} \quad (2.110)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left\{ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) \right\} \quad (2.111)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left\{ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \right\} \quad (2.112)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left\{ 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial \psi_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \psi_x}{\partial y} \right) \right\} \quad (2.113)$$

2.12 直交曲線座標

弾性問題を取扱う上で、ある直交曲線座標を用いれば数学的取扱いが簡潔になることがよくある。たとえばその座標系を適切に選定して、物体の境界面上で一つの座標値が一定になれば解析しやすくなる。具体例として、無限体内に介在する半径 a の球から放出される波の問題では境界条件は球座標を用いれば単に $r = a$ において指定される。

一般のテンソル解析によって任意次元の斜交曲線座標系も扱えるが工学的な必要性を考慮して三次元直交曲線座標に限定して議論する。いま直角座標変数 x_j を変数にもつ三つの独立な関数 g_i を

$$g_i = g_i(x_1, x_2, x_3) \quad (2.114)$$

として考える。これら x_j について解けば

$$x_j = x_j(f_1, f_2, f_3) \quad (2.115)$$

C_i を定数として 3つの式 $f_i = C_i$ は、3つの面群を表わし、その3つの面の交線は3つの曲線群を形成している。これらの交線を曲線座標系の座標線として用いる。従って空間における点の位置は3つの座標 f_1, f_2, f_3 の値によって定めることができる。ある点の局所座標方向はその点における3つの座標曲線の接線方向である。したがって、本節で扱う直交座標系とは、ある点における座標方向が互いに垂直になる座標系をいう。単位ベクトル e_1, e_2, e_3 がそれぞれ座標 f_1, f_2, f_3 の増加する方向をもち、その配置は右手系になるように選ぶ。ベクトル e_i を基底ベクトルと呼び次の関係が成り立つ。

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad (2.116)$$

$$e_i \wedge e_j = e_k \quad (2.117)$$

式(2.117)で指標 i, j, k はこの順で巡回順序になっている。以下の議論でも通してこの順序であるとする。直交曲線座標と、直角座標との異なる大きな点は、 f_1, f_2, f_3 が必ずしも長さを定める尺度になっていないことである。たとえば円柱座標 (r, θ, z) で θ は空間的距離をそれ自身で与える尺度になっていない。この違いは微小変位ベクトル $d\mathbf{r}$ と微小変量 df_1, df_2, df_3 との関係に尺度因子 (scale factor) が現われることで明らかになる。すなわち

$$d\mathbf{r} = e_1 h_1 df_1 + e_2 h_2 df_2 + e_3 h_3 df_3 \quad (2.118)$$

この尺度因子 h_i は一般に座標 f_i の関数である。^[註] 単位ベクトル e_i は空間点によって方向が変化するので単位ベクトル e_i の偏導関数 $(\partial/\partial f_i)$ を注意深く調べる必要がある。 $d\mathbf{r}$ の表示式(2.118)より

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial f_i} = e_i h_i \quad (\text{和をとらない, } i=1, 2 \text{ 又は } 3)$$

$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial f_i \partial f_j}$ で微分順序が変えられるだろうから

$$\frac{\partial}{\partial f_1} (e_2 h_2) = \frac{\partial}{\partial f_2} (e_1 h_1)$$

又は

$$e_2 \frac{\partial h_2}{\partial f_1} + h_2 \frac{\partial e_2}{\partial f_1} = e_1 \frac{\partial h_1}{\partial f_2} + h_1 \frac{\partial e_1}{\partial f_2} \quad (2.119)$$

$$e_1 \text{ との内積をとって } h_2 e_1 \cdot \frac{\partial e_2}{\partial f_1} = \frac{\partial h_1}{\partial f_2} \quad (2.120)$$

[註] 直交曲線座標における計量テンソル g_{ij} が対角要素のみ残るから、尺度因子 h_i は $h_i = \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial f_i})^2 + (\frac{\partial y}{\partial f_i})^2 + (\frac{\partial z}{\partial f_i})^2}$ によって求まるが、簡単に f_i 座標のみを1だけ変化した時の位置 (f_1, f_2, f_3) の動いた距離として求まる。
[53]

式(2.120)の誘導には式(2.116)と直交系で $e_1 \cdot (\partial e_1 / \partial f_2) = 0$ となる事を考慮した。^[註] 式(2.119)に e_3 との内積を施せば

$$h_2 e_3 \cdot \frac{\partial e_2}{\partial f_1} = h_1 e_3 \cdot \frac{\partial e_1}{\partial f_2} \quad (2.121)$$

指標を交代して式(2.121)に類似した2つの式が見い出せる。

$$h_3 e_1 \cdot \frac{\partial e_3}{\partial f_2} = h_2 e_1 \cdot \frac{\partial e_2}{\partial f_3}, \quad h_1 e_2 \cdot \frac{\partial e_1}{\partial f_3} = h_3 e_2 \cdot \frac{\partial e_3}{\partial f_1} \quad (2.122a, b)$$

次に $e_3 \cdot e_2 = 0, e_1 \cdot e_2 = 0, e_1 \cdot e_3 = 0$ のそれぞれに f_1, f_2, f_3 による導関数を作り、式(2.121)(2.122)を用いれば、次の演算が成立する。

$$e_3 \cdot \frac{\partial e_2}{\partial f_1} = -e_2 \cdot \frac{\partial e_3}{\partial f_1} = -\frac{h_1}{h_3} e_2 \cdot \frac{\partial e_3}{\partial f_3} = \frac{h_1}{h_3} e_1 \cdot \frac{\partial e_2}{\partial f_3} = \frac{h_1}{h_2} e_1 \cdot \frac{\partial e_3}{\partial f_2} = -\frac{h_1}{h_2} e_3 \cdot \frac{\partial e_1}{\partial f_2} = -e_3 \cdot \frac{\partial e_2}{\partial f_1}$$

$$\text{よって } e_3 \cdot \frac{\partial e_2}{\partial f_1} = 0$$

また e_2 と $\partial e_2 / \partial f_1$ との内積も0であるから[脚註] $\partial e_2 / \partial f_1$ は e_2 と e_3 の方向に成分をもちたないことになる。従って式(2.120)より

$$\frac{\partial e_2}{\partial f_1} = \frac{e_1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial f_2}$$

この形の残り5つの関係式も指標を置き換えることにより導ける。そこで6つの関係をまとめてみれば

$$i \neq j; \quad \frac{\partial e_i}{\partial f_j} = \frac{e_j}{h_i} \frac{\partial h_j}{\partial f_i} \quad (\text{和をとらない}) \quad (2.123)$$

式(2.117)と(2.123)を用いれば、次のようにも書ける。

$$\frac{\partial e_1}{\partial f_1} = \frac{\partial}{\partial f_1} (e_2 \wedge e_3) = e_2 \wedge \frac{\partial e_3}{\partial f_1} - e_3 \wedge \frac{\partial e_2}{\partial f_1} = -\frac{e_3}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial f_3} - \frac{e_2}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial f_2}$$

$\partial e_2 / \partial f_2$ と $\partial e_3 / \partial f_3$ に対しても同様な式が導出でき、指標記述でまとめれば

$$\frac{\partial e_i}{\partial f_i} = -\frac{e_j}{h_j} \frac{\partial h_i}{\partial f_j} - \frac{e_k}{h_k} \frac{\partial h_i}{\partial f_k} \quad (\text{和をとらない}) \quad (2.124)$$

ただし i, j, k はこの順で巡回順序になっているとする。

[註] \mathbf{A} を長さが一定のベクトルとすると $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \text{一定}$ 、従って $\frac{d\mathbf{A}}{df} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{A}}{df} = 0$ すなわち

$$2\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial f} = 0 \quad \text{よって } \mathbf{A} \text{ と } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial f} \text{ は垂直になる。} \quad [54]$$

物理量として与えられるベクトル量やテンソル量の値は、直角座標系でも曲線座標系でも不変である。しかしながら、座標の基底ベクトルの取り方によって、それぞれの成分の表現は異なる。そこで非常によく利用される勾配、発散、回転、などの微分演算子の座標による表現の違いを調べておこう。

勾配 (gradient) スカラーφに勾配演算子∇を作用させれば、それは f_1, f_2, f_3 の成分をもったベクトル $\nabla\phi$ すなわち

$$\nabla\phi = f_1 \mathbf{e}_1 + f_2 \mathbf{e}_2 + f_3 \mathbf{e}_3$$

と置ける。位置変化 $d\mathbf{r}$ によるφの増分は式(2.118)を用いれば

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = h_1 f_1 d\beta_1 + h_2 f_2 d\beta_2 + h_3 f_3 d\beta_3$$

となる。この増分 $d\phi$ は次のようにも書ける。

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\beta_1} d\beta_1 + \frac{\partial\phi}{\partial\beta_2} d\beta_2 + \frac{\partial\phi}{\partial\beta_3} d\beta_3$$

これらの比較より、
$$\nabla = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial\beta_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial\beta_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial\beta_3} \quad \because f_i = \frac{\partial\phi}{\partial\beta_i} \text{ (和をとらない)} \quad (2.125)$$

演算(2.125)をベクトル \mathbf{u} に施せば

$$\nabla\mathbf{u} = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\beta_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\beta_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\beta_3} \quad (2.126)$$

さらに式(2.123)と(2.124)を用いれば詳細に書き出せよう。これはダイアデックになる。後で述べる。

発散 (divergence) ベクトル \mathbf{u} の発散を求めればスカラー量になり、その表式を求める。

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbf{u} &= \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \nabla \cdot (u_1 \mathbf{e}_1) + \nabla \cdot (u_2 \mathbf{e}_2) + \nabla \cdot (u_3 \mathbf{e}_3) \end{aligned} \quad (2.127)$$

β_i が独立な座標であるから式(2.125)を用いて

$$\nabla\beta_i = \mathbf{e}_i / h_i \quad \text{(和をとらない)} \quad (2.128)$$

$\nabla\beta_1$ と $\nabla\beta_2$ のベクトル積を書けば

$$\nabla\beta_1 \wedge \nabla\beta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1/h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/h_2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_3 / h_1 h_2$$

よって $\mathbf{e}_3 = h_1 h_2 \nabla\beta_1 \wedge \nabla\beta_2$

[55]

一般には $\mathbf{e}_i = h_j h_k \nabla\beta_j \wedge \nabla\beta_k$ (和をとらない)

ここで $i=1, j=2, k=3$ に対する結果を式(2.127)の右辺第一項に入れる。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (u_1 \mathbf{e}_1) &= \nabla \cdot (u_1 h_2 h_3 \nabla\beta_2 \wedge \nabla\beta_3) \\ &= \nabla(u_1 h_2 h_3) \cdot (\nabla\beta_2 \wedge \nabla\beta_3) + u_1 h_2 h_3 \nabla \cdot (\nabla\beta_2 \wedge \nabla\beta_3) \\ &= \nabla(u_1 h_2 h_3) \cdot (\mathbf{e}_1 / h_2 h_3) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial\beta_1} (u_1 h_2 h_3) \end{aligned} \quad \text{[脚註]}$$

式(2.127)の右辺第二項も第三項も同様な手順で“求まる”結局

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial\beta_1} (u_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial\beta_2} (u_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial\beta_3} (u_3 h_1 h_2) \right\} \quad (2.129)$$

回転 (curl または rotation) ベクトル \mathbf{u} の回転はベクトル量で式(2.128)を利用すれば

$$\begin{aligned} \nabla \wedge \mathbf{u} &= \nabla \wedge (u_1 \mathbf{e}_1) + \nabla \wedge (u_2 \mathbf{e}_2) + \nabla \wedge (u_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \nabla \wedge (u_1 h_1 \nabla\beta_1) + \nabla \wedge (u_2 h_2 \nabla\beta_2) + \nabla \wedge (u_3 h_3 \nabla\beta_3) \end{aligned}$$

上式の右辺第一項を考えると

$$\begin{aligned} \nabla \wedge (u_1 h_1 \nabla\beta_1) &= \nabla(u_1 h_1) \wedge \nabla\beta_1 + u_1 h_1 \nabla \wedge \nabla\beta_1 \quad \text{[脚註]} \\ &= \left\{ \mathbf{e}_1 \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial\beta_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial\beta_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial(u_1 h_1)}{\partial\beta_3} \right\} \wedge \left\{ \mathbf{e}_1 \frac{\partial\beta_1}{\partial\beta_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial\beta_1}{\partial\beta_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial\beta_1}{\partial\beta_3} \right\} \\ &= \frac{\mathbf{e}_2}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial\beta_3} (u_1 h_1) - \frac{\mathbf{e}_3}{h_2 h_1} \frac{\partial}{\partial\beta_2} (u_1 h_1) \end{aligned}$$

残りの第二項、第三項についても算出でき結局、次のようにまとめられる。

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \partial/\partial\beta_1 & \partial/\partial\beta_2 & \partial/\partial\beta_3 \\ h_1 u_1 & h_2 u_2 & h_3 u_3 \end{vmatrix} \quad (2.130)$$

ラプラス演算 式(2.129)と(2.125)を用いて容易に導けて、スカラーφに対し、

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_{n=1}^3 \frac{\partial}{\partial\beta_n} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_n^2} \frac{\partial\phi}{\partial\beta_n} \right) \quad (2.131)$$

ベクトル \mathbf{u} のラプラス演算は公式 $\nabla^2\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{u}$ を利用し、今までの結果を組み合わせれば得られる。^[註2]

[註1] 一般に $\nabla \wedge \nabla\beta = 0, \nabla \wedge (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \wedge \mathbf{A} + f \nabla \wedge \mathbf{A}$

$\nabla \cdot (\nabla \wedge \mathbf{A}) = 0, \nabla \cdot (\nabla\phi \wedge \nabla\psi) = 0, \nabla \cdot (f\mathbf{A}) = f \nabla \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla f$ が成り立つ

[註2] 公式 $\nabla^2\mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{u}$ の成り立ちを直角座標系で確認。ベクトル量だからその座標で成立すれば他の座標でも成立 [56]

ダイアデックについて。応力の成分は面の向きとそれに作用する力の大きさと方向が指定されてはじめて値が決める。すなわち、面の法ベクトルとベクトル力の2つによって応力状態が決まる。このように、2つのベクトルを指定することにより定まる量を一般的に取扱えばベクトル量よりさらに複雑な物理量を組織立てて考えることができる。以上のような量を2階のテンソル量と言っているが、ベクトルを2つ並べたダイアドの和として扱うことができる。それらをダイアデックと言う。すなわち、 $\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m$ をベクトルとして、ダイアデック Φ を

$$\Phi = \mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2 + \dots + \mathbf{A}_n \mathbf{B}_n$$

で定義し、一般に2階のテンソル量を演算することができる。

任意のベクトル \mathbf{F} と Φ との内積は左(右)側からの作用は左(右)側のベクトル $\mathbf{A}_m (\mathbf{B}_m)$ のみとの内積をとり $\mathbf{F} \cdot \Phi = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_1) \mathbf{B}_1 + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_2) \mathbf{B}_2 + \dots + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{A}_n) \mathbf{B}_n$

しかし、一般には $\mathbf{F} \cdot \Phi \neq \Phi \cdot \mathbf{F}$ である。またダイアド $\mathbf{A}_m \mathbf{B}_m$ を順序逆にしたもののからなるダイアデックを共役ダイアデックと云う。

$$\Phi_c = \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2 + \dots + \mathbf{B}_n \mathbf{A}_n$$

と書く。従って、 $\mathbf{F} \cdot \Phi = \Phi_c \cdot \mathbf{F}$ が成り立つ。特別の場合として $\mathbf{F} \cdot \Phi = \Phi \cdot \mathbf{F}$ が成り立つ時 Φ を対称ダイアデック、 $\mathbf{F} \cdot \Phi = -\Phi \cdot \mathbf{F}$ が成り立つ時 Φ を反対称ダイアデックと云う。また、

$\mathbf{0} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{0} = 0$ の時 $\mathbf{0}$ をゼロダイアデック、そして $\mathbf{I} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{F}$ の時 \mathbf{I} を単位(恒等)ダイアデックと云う。

次に基底ベクトル $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を用いてダイアデックを表現する。任意ベクトル $\mathbf{A}_m, \mathbf{B}_m$ は

$$\mathbf{A}_m = \alpha_{m1} \mathbf{e}_1 + \alpha_{m2} \mathbf{e}_2 + \alpha_{m3} \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{B}_m = \beta_{m1} \mathbf{e}_1 + \beta_{m2} \mathbf{e}_2 + \beta_{m3} \mathbf{e}_3$$

とおけるから、ダイアデックの定義より基底ベクトルの組合せによって次のようになる。

$$\begin{aligned} \Phi = & a_{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 \\ & + a_{21} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + a_{23} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \\ & + a_{31} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + a_{32} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

ここで a_{ij} として取扱えばテンソル的な演算が可能になってゆく。

連続体の変形を考え、微小ひずみをダイアデックの形で表現してみよう。変位ベクトル \mathbf{u} が位置ベクトル \mathbf{r} の関数と考える。次頁の図に示すように、変形前の点 P の近傍点 P' が、変形後の P 点の変移点 Q の近傍を Q' に移るとすれば $\delta \mathbf{r}' = \delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{u}$

そこで変位 \mathbf{u} の増分 $\delta \mathbf{u}$ を直角座標で考えれば

$$\delta \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \delta z$$

そこで $\delta \mathbf{r} = \delta x \mathbf{i} + \delta y \mathbf{j} + \delta z \mathbf{k}$ であり

また $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{i} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}$ だから

$\delta \mathbf{u}$ はこれらの内積で表わせる。すなわち

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad \text{[註]}$$

従って、 $\delta \mathbf{r}' = \delta \mathbf{r} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})$

ここに $\nabla \mathbf{u}$ は変形勾配である。ここで $\delta \mathbf{r}'$ の長さの2乗を計算する。

$$\delta \mathbf{r}' \cdot \delta \mathbf{r}' = \{ \delta \mathbf{r} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \} \cdot \{ (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{r} \} \quad \because (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})_c = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})$$

ここに共役ダイアデックを用いて内積順序を入れかえた。さらに式変形すると

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}' \cdot \delta \mathbf{r}' &= \delta \mathbf{r} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \nabla + \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{r} \\ &= \delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} + 2 \delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta \mathbf{r} + \delta \mathbf{r} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{r} \end{aligned}$$

ただし $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \}$ である。上式の右辺第2項は変形前の $\overline{PP'}$ の長さの2乗であり、左辺は変形後の値である。従って \mathbf{u} を微小と考えると高次項を省略して $\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta \mathbf{r}$ は2つの物体点間の変形に伴う伸縮を表わしている。そこで $\boldsymbol{\varepsilon}$ をひずみダイアデックと呼ぶ。これは対称ダイアデックで、歪テンソルと言われる。微小ひずみに対する $\boldsymbol{\varepsilon}$ を(2.126)を用いて一般の直交座標系で表わすれば

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u}) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbf{e}_1 \partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \frac{\mathbf{e}_2 \partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + \frac{\mathbf{e}_3 \partial \mathbf{u}}{\partial x_3} + \frac{1}{x_1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{x_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{x_3} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 \right\}$$

ベクトル \mathbf{u} は $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3$ と書けるから、式(2.123)と式(2.124)を用いればさらに具体的な表現を得ることができる。

[註] 全微分 $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$ は $df = d\mathbf{r} \cdot \nabla f$ で表わせる。すなわち $d\mathbf{r} \cdot \nabla$ は全微分作用をする。

2.13 円柱座標系における式のまとめ

円柱座標では、 $\rho_1 = r$, $\rho_2 = \theta$, $\rho_3 = z$ に選ぶ。

対応する尺度因子と単位基底ベクトルは

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1$$

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$$

したがって式(2.123)と(2.124)より、次式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \rho_2} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \rho_3} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \rho_2} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \rho_3} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \rho_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \rho_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \rho_3} = 0$$

これらの関係を用いて式(2.125)~(2.131)で与えられる演算を円柱座標系に対する形にすることができる。

r, θ, z 方向の変位成分をそれぞれ u, v, w で記せば変位とポテンシャルの関係は、式(2.87)より求められる

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\wedge\Psi = \left(\frac{\mathbf{e}_r}{r} \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{\mathbf{k}}{r} \frac{\partial\phi}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{k} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial z \\ \psi_r & r\psi_\theta & \psi_z \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{e}_r \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial z} (r\psi_\theta) \right] \right\} + \mathbf{e}_\theta \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \left(\frac{\partial\psi_r}{\partial r} - \frac{\partial\psi_z}{\partial z} \right) \right\} + \mathbf{k} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r\psi_\theta) - \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} \right] \right\}$$

従って

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z} \quad (2.132)$$

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial r} \quad (2.133)$$

$$w = \frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} \quad (2.134)$$

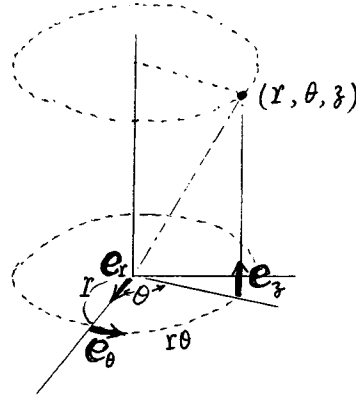
ここに

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} \quad (2.135)$$

そして

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.136)$$

ベクトルポテンシャル Ψ については式(2.90)より $\nabla^2\Psi = \frac{1}{c^2}\ddot{\Psi}$ であるから



$$\frac{1}{c^2}\ddot{\Psi} = \nabla^2\Psi = \nabla(\nabla\cdot\Psi) - \nabla\wedge\nabla\wedge\Psi \text{ とする。}$$

まずはじめに、 $-\nabla\wedge\nabla\wedge\Psi$; ここで式(2.130)を利用する。

$$\nabla\wedge\Psi = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{k} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial z \\ \psi_r & r\psi_\theta & \psi_z \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \mathbf{e}_r \left(\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - r \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z} \right) - \mathbf{e}_\theta \left(\frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \mathbf{k} \left(\psi_\theta + r \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} \right)$$

さらに回転をとる。

$$-\nabla\wedge\nabla\wedge\Psi = \frac{-1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{k} \\ \partial/\partial r & \partial/\partial\theta & \partial/\partial z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z} & r \left(-\frac{\partial\psi_r}{\partial z} + \frac{\partial\psi_z}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \psi_\theta + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{e}_r \left\{ \frac{-1}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r \partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2} + r \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r \partial z} - r \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z^2} \right] + \mathbf{e}_\theta \left\{ -\frac{1}{r^2} \psi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r \partial\theta} \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta \partial z} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial z^2} \right\} + \mathbf{k} \left\{ \frac{-1}{r} \left[-\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z} - r \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2} + r \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta \partial z} \right] \right\}$$

次に $\nabla(\nabla\cdot\Psi)$; 式(2.129)より

$$\nabla\cdot\Psi = \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r\psi_r) + \frac{\partial}{\partial\theta} (\psi_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (\psi_z r) \right\} = \frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z}$$

$$\nabla(\nabla\cdot\Psi) = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z} \right) + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z} \right)$$

従って

$$\nabla^2\Psi = \mathbf{e}_r \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\psi_\theta}{r \partial r \partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z^2} - \frac{\psi_r}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_r}{\partial r} - \frac{\partial\psi_\theta}{r^2 \partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial\psi_z}{r^2 \partial\theta} \right]$$

$$+ \mathbf{e}_\theta \left[-\frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r \partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta \partial z} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r \partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} + \frac{\partial\psi_z}{r^2 \partial\theta} \right]$$

$$+ \mathbf{k} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial\psi_r}{\partial r} - \frac{\partial\psi_r}{r \partial z} + \frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\psi_r}{r \partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\psi_\theta}{r^2 \partial\theta \partial z} + \frac{\partial^2\psi_z}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi_z}{\partial z^2} \right]$$

よって

$$\frac{1}{c^2} (\mathbf{e}_r \ddot{\psi}_r + \mathbf{e}_\theta \ddot{\psi}_\theta + \mathbf{k} \ddot{\psi}_z) = \mathbf{e}_r \left[\frac{\partial^2\psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_r}{\partial z^2} - \frac{2\psi_\theta}{r^2 \partial\theta} - \frac{\psi_r}{r^2} \right]$$

$$+ \mathbf{e}_\theta \left[\left(\frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_\theta}{\partial z^2} \right) - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2\psi_r}{r^2 \partial\theta} \right]$$

$$+ \mathbf{k} \left[\frac{\partial^2\psi_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi_z}{\partial z^2} \right]$$

以上より Ψ の成分は次の方程式を満足する。

$$\nabla^2 \psi_1 - \frac{\psi_1}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \quad (2.137)$$

$$\nabla^2 \psi_0 - \frac{\psi_0}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} \quad (2.138)$$

$$\nabla^2 \psi_2 = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} \quad (2.139)$$

円柱座標における変位ひずみ関係は、ダイラティック $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \}$ より求められる。

58頁の式より $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta_3} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta_3} \mathbf{e}_3 \right\}$

ところで $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta_i} = \frac{\partial u_1}{\partial \beta_i} \mathbf{e}_1 + u_1 \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \beta_i} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta_i} \mathbf{e}_2 + u_2 \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \beta_i} + \frac{\partial u_3}{\partial \beta_i} \mathbf{e}_3 + u_3 \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \beta_i}$

基底ベクトルの偏導関数は円柱座標の場合、59頁よりわかっているから

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial r} \mathbf{k}$$

また $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \mathbf{k} + u \mathbf{e}_\theta - v \mathbf{e}_r$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \beta_3} = \frac{\partial u}{\partial \beta_3} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial \beta_3} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial \beta_3} \mathbf{k}$$

従って $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{e}_r \left(\frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial r} \mathbf{k} \right) + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \mathbf{k} + u \mathbf{e}_\theta - v \mathbf{e}_r \right) \right.$
 $\left. + \mathbf{k} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_3} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial \beta_3} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial \beta_3} \mathbf{k} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial r} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial r} \mathbf{k} \right) \mathbf{e}_r \right.$
 $\left. + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \mathbf{k} + u \mathbf{e}_\theta - v \mathbf{e}_r \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_3} \mathbf{e}_r + \frac{\partial v}{\partial \beta_3} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial \beta_3} \mathbf{k} \right) \mathbf{k} \right\}$

整理すると

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_3} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r \mathbf{k}$$

 $+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \beta_3} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{k}$
 $+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_3} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \mathbf{k} \mathbf{e}_r + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \beta_3} \right) \mathbf{k} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial w}{\partial \beta_3} \mathbf{k} \mathbf{k}$

すなわち

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \epsilon_\beta = \frac{\partial w}{\partial \beta_3} \quad (2.140 a, b, c)$$

$$2 \epsilon_{r\theta} = 2 \epsilon_{\theta r} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (2.141)$$

$$2 \epsilon_{\theta\beta} = 2 \epsilon_{\beta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \beta_3} \quad (2.142)$$

$$2 \epsilon_{\beta r} = 2 \epsilon_{r\beta} = \frac{\partial u}{\partial \beta_3} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (2.143)$$

応力-ひずみ関係は式(2.40)に式(2.140)~(2.143)を代入して得られ

$$\tau_r = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \beta_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.144)$$

$$\tau_\theta = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \beta_3} \right) + 2\mu \left(\frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \quad (2.145)$$

$$\tau_\beta = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \beta_3} \right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial \beta_3} \quad (2.146)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (2.147)$$

$$\tau_{\theta\beta} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \beta_3} \right) \quad (2.148)$$

$$\tau_{\beta r} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \beta_3} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (2.149)$$

これらの応力は式(2.132)~(2.134)を代入すれば変位ポテンシャル表示にすることが出来る。

2.14 球座標系における式のまとめ

球座標で直交面は $r = \text{一定}$ の球と $\theta = \text{一定}$ の円錐面と $\alpha = \text{一定}$ の平面である。座標を $\beta_1 = r, \beta_2 = \theta, \beta_3 = \alpha$ に選べば尺度因子 $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$ 。そして基底ベクトルは $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\alpha$ 従って式(2.123)(2.124)より

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \beta_2} = \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial \beta_3} = \mathbf{e}_\alpha \sin \theta$$

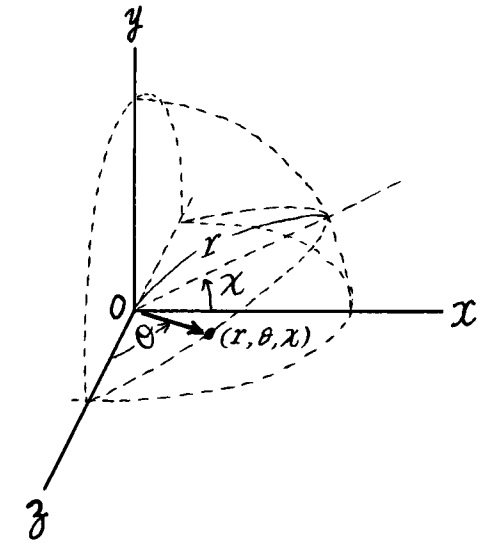
$$\frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \beta_2} = -\mathbf{e}_r, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial \beta_3} = \mathbf{e}_\alpha \cos \theta$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \beta_2} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial \beta_3} = -\mathbf{e}_r \sin \theta - \mathbf{e}_\theta \cos \theta$$

これらを式(2.125)~(2.131)に代入すれば球座標における微分演算子の表現が得られる。 r, θ, α 方向変位成分をそれぞれ u, v, w とすれば変位とポテンシャル間の式は

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi \sin \theta) - \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} \right\} \quad (2.150)$$

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_1) \right\} \quad (2.151)$$



$$W = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_\theta) - \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} \right\} \quad (2.152)$$

$$\text{こゝに} \quad \nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (2.153)$$

$$\text{それ} \quad \nabla^2 \equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.154)$$

また、誘導を省いて書けば

$$\nabla^2 \psi_r - \frac{2}{r^2} \psi_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi_\theta \sin \theta) - \frac{2}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2} \quad (2.155)$$

$$\nabla^2 \psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \quad (2.156)$$

$$\nabla^2 \psi_x - \frac{\psi_x}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial x} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2} \quad (2.157)$$

ひずみ-変位関係は $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \{ \nabla \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \}$ より

$$E_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.158)$$

$$E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \quad (2.159)$$

$$E_x = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + u \sin \theta + v \cos \theta \right) \quad (2.160)$$

$$2 E_{r\theta} = 2 E_{\theta r} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \quad (2.161)$$

$$2 E_{\theta x} = 2 E_{x\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - w \cos \theta \right) \quad (2.162)$$

$$2 E_{rx} = 2 E_{xr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - w \sin \theta \right) \quad (2.163)$$

フックの法則より

$$\tau_r = \lambda \mathcal{E} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (2.164)$$

$$\tau_\theta = \lambda \mathcal{E} + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) \quad (2.165)$$

$$\tau_x = \lambda \mathcal{E} + \frac{2\mu}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + u \sin \theta + v \cos \theta \right) \quad (2.166)$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \mu \left\{ \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \right\} \quad (2.167)$$

$$\tau_{\theta x} = \tau_{x\theta} = \mu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - w \cos \theta \right) \right\} \quad (2.168)$$

$$\tau_{rx} = \tau_{rx} = \mu \left\{ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - w \sin \theta \right) \right\} \quad (2.169)$$

$$\text{ただし} \quad \mathcal{E} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + u \sin \theta + v \cos \theta \right) \quad (2.170)$$

応力は式(2.150)~(2.152)を式(2.164)~(2.169)に代入することによって 変位ポテンシャル表示になる。

2.15 理想流体

静止した、もしくは速度勾配の小さな様な流れでは 剪断応力の無視できる場合をよく経験する。

この時の応力状態は 力学的に 静水的 (*hydrostatic*) 状態にあるという。理想 (非粘性) 流体は運動状態であっても 剪断応力を持ち得ない流体であるから、応力は、圧力の大きさを p として

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} \quad (2.171)$$

で与えられる。動的な圧力 p が 質量密度 ρ の関数になる理想流体を 弾性流体と呼ぶ。ここで考へる現象は 平衡状態からの 動的微小擾乱であるから フックの法則 (2.28) より、 $\mu=0$ とおけば

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = B E_{kk} = -p \quad (2.172) \text{ [註]}$$

$$\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0 \quad (2.173)$$

一般に 液体の体積弾性率 B は ガス体のそれと比べ相対的に非常に大きくなる。体積力を無視して、理想弾性流体に対する運動方程式は

$$B \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.174)$$

$$\text{スカラー速度ポテンシャル } \varphi \text{ を} \quad \dot{\mathbf{u}} = \nabla \varphi \quad (2.175)$$

として導入すると、式(2.174)は 明らかに

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c_F^2} \ddot{\varphi} \quad (2.176)$$

が成り立てば 満たされる。ただし $c_F^2 = B/\rho$ (2.177)

式(2.176)は 理想弾性流体中を伝わる微小擾乱に対して成り立つ波動方程式である。最後に

式(2.172)と(2.176)から 圧力 p を求めれば

$$p = -B E_{kk} = -B \nabla \cdot \mathbf{u} = -B \nabla \cdot (\int \nabla \varphi dt) = -B \int \nabla^2 \varphi dt = -\frac{B}{c_F^2} \dot{\varphi} = -\rho \dot{\varphi}$$

$$\text{よって} \quad p = -\rho \dot{\varphi} \quad (2.178)$$

[第2章終り]

[註] 40頁の表2.1より $\mu \rightarrow 0$ に極限すれば $B = \lambda$ になる。

第 3 章 動 弾 性 理 論

3.1 緒 言

本章では定理など形式論的な議論と動弾性問題の一般解法について述べる。ここでは初期値境界値問題に対する解の一意性定理 (*uniqueness theorem*) や、二つの動弾性状態を関係づける動的相反恒等式 (*dynamic reciprocal identity*) などが重要な定理である。相反恒等式は解析結果をさらに発展させ、関連問題の解を作る手段となる。また、2.10節で導入した変位ベクトルの分解に関してさらに詳しく検討し、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルについての完全性定理 (*completeness theorem*)^(備) を示す。それらの変位ポテンシャルは数学的に詳しく研究されている古典波動方程式の解になっている。3.6節と3.7節では、体積力により無限体中に生ずる波動場を、波動方程式の一般的な積分表示解として導く。3.8節では、時間変動点荷重による変位と応力場を動弾性の基本特異解として求め、これをめとして表面に外乱の作用する有限弾性体内の波動を一般積分表示形に導く。このような外乱によって生ずる波動場の積分表示は積分変換法等によって効果的に求められるがこの手法は別の章で述べる。

以前に2.5節で、内部 V と閉包 \bar{V} と境界 S をもつ物体 B に対する動弾性問題の一般的提示を示した。そこで Wheeler と Sternberg によって導入された動弾性状態 (*Elastodynamic state*) の定義を用いると以下のようになる。

ベクトル値の関数 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ とテンソル値の関数 $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t)$ を考えよう。いずれも T を任意の時間区間として $\bar{V} \times T$ 上で定義される。いま物体力密度 \mathbf{f} 、質量密度 ρ 、ラメの弾性定数 λ と μ として

$$(a) \quad \mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(V \times T) \cap \mathcal{C}^1(\bar{V} \times T) \quad (3.1)$$

$$\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{C}(\bar{V} \times T) \quad (3.2)$$

$$\mathbf{f} \in \mathcal{C}(\bar{V} \times T) \quad (3.3)$$

$$(b) \quad \rho > 0, \quad 0 < 3\lambda + 2\mu < \infty, \quad 0 < \mu < \infty \quad (3.4)$$

$$(c) \quad V \times T \text{ 上で } \mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{f}, \rho, \lambda, \mu \text{ は次式を満たす。}$$

$$\tau_{ij,j} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.5)$$

$$\tau_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.6)$$

ならば変位場 \mathbf{u} と応力場 $\boldsymbol{\tau}$ を伴う順序対 (*ordered pair*) $\mathcal{S} = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}]$ すなわち $\bar{V} \times T$ 上の動弾性状態が定まる。それはユークリッド空間に属するので

$$\mathcal{S} = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}] \in \mathcal{E}(\mathbf{f}, \rho, \lambda, \mu; \bar{V} \times T)$$

と書く。特別に T の部分区間 (*subinterval*) を $(-\infty, 0]$ とし $V \times (-\infty, 0]$ 上で $\mathbf{u} = 0$ ならば \mathcal{S} は過去静止 (*quiescent past*) を有する動弾性状態と言い、次のように書く。

$$\mathcal{S} = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}] = \mathcal{E}_0(\mathbf{f}, \rho, \lambda, \mu; \bar{V})$$

3.2 解の一意性

2.5節で表式化した動弾性問題の解は与える境界条件の集合に対し一意に定まる。本節で与えるこの一意性の証明は本質的には Neumann によるものでエネルギーを考慮することによっている。正則領域 V を占め境界 S を有する有限体 B を考える。時間区間 T^+ を半開区間 (*half open interval*) すなわち $[0, \infty)$ とし、次に一意性定理を述べる。

定理 3.1 ; \mathcal{S}' と \mathcal{S}'' を次の特性をもった 2 つの動弾性状態であるとす。

$$(a) \quad \mathcal{S}' = [\mathbf{u}', \boldsymbol{\tau}'] \in \mathcal{E}(\mathbf{f}, \rho, \lambda, \mu; \bar{V} \times T^+)$$

$$\mathcal{S}'' = [\mathbf{u}'', \boldsymbol{\tau}''] \in \mathcal{E}(\mathbf{f}, \rho, \lambda, \mu; \bar{V} \times T^+)$$

すなわち変位集合と応力集合がともに式(3.5)(3.6)と要件(3.1)~(3.4)を満たしている。

(b) 双方の動弾性状態とも同一の初期条件を有する。すなわち

$$\mathbf{u}'_0(\mathbf{x}) = \mathbf{u}''_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}'_0(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{u}}''_0(\mathbf{x}) \quad ; \quad \forall \mathbf{x} \in V$$

(c) 2 つの動弾性状態の境界条件は次の条件を満たす。

$$\int_S (\mathbf{t}' - \mathbf{t}'') \cdot (\dot{\mathbf{u}}' - \dot{\mathbf{u}}'') dA = 0 \quad , \quad (S \times T \text{ 上で})$$

そうすると $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$ ($\bar{V} \times T^+$ 上で) である。あるいは $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}''(\mathbf{x}, t)$ かつ $\boldsymbol{\tau}'(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\tau}''(\mathbf{x}, t)$, ($\bar{V} \times T^+$ 上で) である。

証明 ; 問題の線形性より

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}'', \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}'' \quad (3.7)$$

によって定義される解の集合が $\mathbf{f} = 0$ とした式(3.5)(3.6)を満足することは明白である。前提(b)より \mathbf{u} と $\dot{\mathbf{u}}$ の初期条件は $t \leq 0$ に対し

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (3.8)$$

過去静止の物体に対して、2.8節の式(2.69)に表現されているエネルギーの恒等性を考える。すなわち、

$$\int_0^t \int_S \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dA ds + \int_0^t \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV ds = K(t) + U(t)$$

ここに $K(t)$ と $U(t)$ は、それぞれ運動エネルギーとひずみエネルギーである。前提(c)より

$$\int_0^t \int_S \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} dA ds = 0$$

また式(3.5)(3.7)より $\mathbf{f} \equiv 0$ の $\mathcal{G}[\mathbf{u}' - \mathbf{u}'', \boldsymbol{\tau}' - \boldsymbol{\tau}'']$ を考えているから

$$K(t) + U(t) \equiv 0$$

しかしながら運動エネルギーも、ひずみエネルギーも正の半定符号 (positive semidefinite) であるので

$$K = U = 0$$

でなければならない。前者は $\dot{\mathbf{u}} = 0$ を意味する。初期状態より $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$ だから

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$$

になる。従って二つの解は恒等であり、定理が証明された。

3.3 動的相反恒等式 (dynamic reciprocal identity)

動的相反恒等式は動的 Betti-Rayleigh 定理とも言い、同一弾性体の二つの動弾性状態の関係を与えるものである。この恒等式は異った体積力分布、異った初期条件、異った境界条件のもとで式(3.5)と式(3.6)を満たすそれぞれの変位と応力の二つの集合を関係づけるものである。以下の議論は Wheeler と Sternberg の研究に従っている。この恒等関係の議論の際には、Riemann のたたみ込み (Riemann convolution) 理論の結果を利用すると、その表現も証明も簡潔になるのでその取扱に関する数学的準備をまず述べる。

二つの連続したスカラー関数 $f(\mathbf{x}, t)$ と $h(\mathbf{x}, t)$ 、すなわち

$$f(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{G}(V \times T^+), \quad h(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{G}(V \times T^+)$$

を考える。ここに V は空間域であり、 T^+ は半開区間 $[0, \infty)$ である。半開区間 $(-\infty, 0]$ は T^- と記す。この関数 $f(\mathbf{x}, t)$ と $h(\mathbf{x}, t)$ の Riemann のたたみ込みは $[f * h](\mathbf{x}, t)$ と書き、次のように定義されるものである。

[註] 式(1.64)または式(2.37)を見よ。

[67]

$$[f * h](\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0 & ; \forall (\mathbf{x}, t) \in V \times T^- \\ \int_0^t f(\mathbf{x}, t-s) h(\mathbf{x}, s) ds & ; \forall (\mathbf{x}, t) \in V \times T^+ \end{cases} \quad (3.9)$$

簡単のため $[f * h](\mathbf{x}, t)$ の代わりに $f * h$ と書く。式(3.9)は二つのスカラー量のたたみ込みを表わしている。二つのベクトル $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ と $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ の Riemann たたみ込みは

$$\mathbf{u} * \mathbf{u}' = u_i * u'_i = u_1 * u'_1 + u_2 * u'_2 + u_3 * u'_3 \quad (3.10)$$

として定義される。同様にテンソル $\boldsymbol{\tau}$ とベクトル \mathbf{u} のたたみ込みは

$$\boldsymbol{\tau} * \mathbf{u} = \tau_{ij} * u_j \quad (3.11)$$

である。もちろん総和規約を適用している。よく利用される性質として可換性

$$f * h = h * f \quad (3.12)$$

が成り立つ。さらに、もし $f(\mathbf{x}, t)$ と $h(\mathbf{x}, t)$ が少なくとも連続した一次時間導関数をもつならば、 $f * h$ も少なくとも連続した一次時間導関数をもつ。空間微分に関しても同様なことが成り立つ。そしてこれらの導関数は次のように表わせる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (f * h) = \dot{f} * h + f(\mathbf{x}, 0) h(\mathbf{x}, t) \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f * h) = f_{,i} * h + f * h_{,i} \quad (3.14)$$

さて、もとにもとらて、空間に有限体 B が存在し、それは正則域 V を占め、境界 S をもっているとする。この時相反恒等の次の定理が成立つ。

定理 3.2

$$\mathcal{Y} = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}] \in \mathcal{G}(f, \rho, \lambda, \mu; \bar{V} \times T^+)$$

$$\mathcal{Y}' = [\mathbf{u}', \boldsymbol{\tau}'] \in \mathcal{G}(f', \rho', \lambda', \mu'; \bar{V} \times T^+)$$

であって、それぞれ表面の応力ベクトル

$$t_i = \tau_{ji} n_j, \quad t'_i = \tau'_{ji} n_j \quad (3.15a, b)$$

が作用しており、すべての $\mathbf{x} \in V$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), & \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \\ \mathbf{u}'(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{u}'_0(\mathbf{x}), & \dot{\mathbf{u}}'(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{v}'_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad \text{とする。}$$

[68]

この時 $\forall t > 0$ に対して次式が成立する。

$$\int_S \mathbf{t} * \mathbf{u}' dA + \rho \int_V \{ \mathbf{f} * \mathbf{u}' + \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \} dV$$

$$= \int_S \mathbf{t}' * \mathbf{u} dA + \rho \int_V \{ \mathbf{f}' * \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_0'(\mathbf{x}) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_0'(\mathbf{x}) \} dV \quad (3.16)$$

証明 : 区間 $(0, \infty)$ 内の時間 t を考え、ベクトル値関数 $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ を次式によって定義する。

$$p_i(\mathbf{x}, t) = \tau_{ji} * u_j' - \tau_{ji}' * u_j \quad (3.17)$$

p_i は連続した微係数をもつから $p_i(\mathbf{x}, t)$ の発散 (div) は式(3.14)を用いて

$$p_{i,i} = \tau_{ji,i} * u_j' + \tau_{ji} * u_{j,i}' - \tau_{ji,i}' * u_j - \tau_{ji}' * u_{j,i}$$

と書ける。応力運動方程式を用い、 $u_{j,i}'$ と $u_{j,i}$ を対称部分と反対称部分に分ければ

$$p_{i,i} = \rho (u_{j,j}' * u_i') - \rho (f_j * u_i') + \tau_{ji} * \epsilon_{ji} + \tau_{ji}' * \omega_{ji}$$

$$- \rho (u_{j,j}' * u_i) + \rho (f_j' * u_i) - \tau_{ji}' * \epsilon_{ji} - \tau_{ji} * \omega_{ji} \quad (3.18) \text{ [註]}$$

ここで ϵ_{ji} はひずみテンソルである。さてフックの法則(2.40)と1次み込み積分の性質を利用すれば

$$\tau_{ij} * \epsilon_{ji} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} * \epsilon_{ji} + 2\mu \epsilon_{ij} * \epsilon_{ji} = \lambda \epsilon_{kk} * \epsilon_{ii} + 2\mu \epsilon_{ij} * \epsilon_{ji}$$

$$= \lambda \epsilon_{ii}' * \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}' * \epsilon_{ji} = (\lambda \epsilon_{ii}' \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}') * \epsilon_{ji}$$

よって $\tau_{ji} * \epsilon_{ji} = \tau_{ji}' * \epsilon_{ji} \quad (3.19)$

時間微分に関する式(3.13)を $u_i * u_i'$ に2回繰り返し適用すれば $V \times (0, \infty)$ 上で

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_i * u_i') = \dot{u}_i * u_i' + u_i(\mathbf{x}, 0) u_i'(\mathbf{x}, t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_i * u_i') = \ddot{u}_i * u_i' + v_i(\mathbf{x}, 0) u_i'(\mathbf{x}, t) + u_i(\mathbf{x}, 0) \dot{u}_i'(\mathbf{x}, t)$$

また、 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_i' * u_i) = \ddot{u}_i' * u_i + v_i'(\mathbf{x}, 0) u_i(\mathbf{x}, t) + u_i'(\mathbf{x}, 0) \dot{u}_i(\mathbf{x}, t)$

従って差をとれば

$$0 = \ddot{u}_i * u_i' - \ddot{u}_i' * u_i + v_{i0} u_i' - v_{i0}' u_i + u_{i0} \dot{u}_i' - u_{i0}' \dot{u}_i$$

$$\ddot{\mathbf{u}} * \mathbf{u}' - \ddot{\mathbf{u}}' * \mathbf{u} = \mathbf{v}_0' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}_0' \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{u}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}}'$$

上式と式(3.19)を式(3.18)に入れると

$$\nabla \cdot \mathbf{p} = \rho \{ \mathbf{v}_0' \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}_0' \cdot \dot{\mathbf{u}} - \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{u}_0 \cdot \dot{\mathbf{u}}' - \mathbf{f} * \mathbf{u}' + \mathbf{f}' * \mathbf{u} \}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{p} = \rho \{ \mathbf{f}' * \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}_0' + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_0' \} - \rho \{ \mathbf{f} * \mathbf{u}' + \dot{\mathbf{u}}' \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}_0 \} \quad (3.20)$$

[註] 対称テンソル A_{ij} と反対称テンソル B_{ij} の縮約 $A_{ij} B_{ij}$ は0になる
[69]

発散定理より

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{p} dV = \int_S p_i n_i dA = \int_S (\tau_{ji} * u_j' - \tau_{ji}' * u_j) n_i dA = \int_S (t_j * u_j' - t_j' * u_j) dA \quad (3.21)$$

ここに式(3.17)と式(3.15a,b)を使用した。式(3.20)を式(3.21)の左辺に代入すれば証明が完了する。

3.4 変位ポテンシャル

3.4.1 変位表示 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ と $\Psi(\mathbf{x}, t)$ が特性速度 C_L と C_T を有する波動方程式の解であれば

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \varphi + \nabla \wedge \Psi \quad (3.22)$$

の形のベクトル場が変位運動方程式を満たすことを示した。(2.10節参照) 逆に変位運動方程式のあらゆる解が式(3.22)の形をとることができるかという問題が生ずる。すなわち式(3.22)の表示が完全に解を網らしているかどうかである。

3.4.2 完全性定理 体積力を考慮し、完全性定理(Completeness theorem)は次のようになる。

定理3.3 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ と $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ が条件 $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^2(V \times T)$, $\mathbf{f} \in \mathcal{C}(V \times T)$ を満たし

空間領域 V と閉時間区間 T 内で方程式

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.23)$$

があるとする。また

$$\mathbf{f} = C_L^2 \nabla F + C_T^2 \nabla \wedge \mathbf{G} \quad (3.24)$$

とおく。すると $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ が $\mathbf{u} = \nabla \varphi + \nabla \wedge \Psi \quad (3.25)$

$$\nabla \cdot \Psi = 0 \quad (3.26)$$

によって表わされるようなスカラー関数 $\varphi(\mathbf{x}, t)$ とベクトル関数 $\Psi(\mathbf{x}, t)$ が存在する。そしてその φ と Ψ は次の非斉次波動方程式を満たす。

$$\nabla^2 \varphi + F = \frac{1}{C_L^2} \ddot{\varphi} \quad (C_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}) \quad (3.27)$$

$$\nabla^2 \Psi + \mathbf{G} = \frac{1}{C_T^2} \ddot{\Psi} \quad (C_T^2 = \frac{\mu}{\rho}) \quad (3.28)$$

証明 よく知られたベクトル恒等式 $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{u}$ を利用して式(3.23)の $\nabla^2 \mathbf{u}$ を消去すれば変位運動方程式は次式に書ける。

$$\ddot{\mathbf{u}} = C_L^2 \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - C_T^2 \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{u} + \mathbf{f}$$

これを時間で2回積分すれば

$$\mathbf{u} = C_L^2 \nabla \int_0^t \int_0^\tau (\nabla \cdot \mathbf{u}) ds d\tau - C_T^2 \nabla \wedge \int_0^t \int_0^\tau (\nabla \wedge \mathbf{u}) ds d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \mathbf{f} ds d\tau + \mathbf{u}_0(\mathbf{x})t + \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$$

式(3.24)を用いれば

$$\mathbf{u} = C_L^2 \nabla \int_0^t \int_0^\tau (\nabla \cdot \mathbf{u}) ds d\tau - C_T^2 \nabla \wedge \int_0^t \int_0^\tau (\nabla \wedge \mathbf{u}) ds d\tau + C_L^2 \int_0^t \int_0^\tau \nabla F ds d\tau + C_T^2 \int_0^t \int_0^\tau \nabla \wedge \mathbf{G} ds d\tau + \mathbf{u}_0(\mathbf{x})t + \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$$

ここに積分定数として現われて来る $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ と $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ はそれぞれ $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ と $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ に関する初期条件に対応している。さて、ここで定義

$$\varphi = C_L^2 \int_0^t \int_0^\tau (\nabla \cdot \mathbf{u}) ds d\tau + C_L^2 \int_0^t \int_0^\tau F ds d\tau + \dot{\varphi}_0(\mathbf{x})t + \varphi_0(\mathbf{x}) \quad (3.29)$$

$$\psi = -C_T^2 \int_0^t \int_0^\tau (\nabla \wedge \mathbf{u}) ds d\tau + C_T^2 \int_0^t \int_0^\tau \mathbf{G} ds d\tau + \dot{\psi}_0(\mathbf{x})t + \psi_0(\mathbf{x}) \quad (3.30)$$

を用いて、 \mathbf{u} の前式を書きかえれば式(3.25)を得る。ただし \mathbf{u}_0 と $\dot{\mathbf{u}}_0$ について、次の表示式を用いる。

$$\mathbf{u}_0 = \nabla \dot{\varphi}_0 + \nabla \wedge \dot{\psi}_0 \quad (3.31)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \nabla \varphi_0 + \nabla \wedge \psi_0 \quad (3.32)$$

さて、次に式(3.29)(3.30)の φ と ψ が式(3.26)~(3.28)を満たすことを示せばよい。式(3.29)と(3.30)を時間で2回微分すれば

$$\ddot{\varphi} = C_L^2 \nabla \cdot \mathbf{u} + C_L^2 F \quad (3.33)$$

$$\ddot{\psi} = -C_T^2 \nabla \wedge \mathbf{u} + C_T^2 \mathbf{G} \quad (3.34)$$

ここで式(3.25)に演算 $\nabla \cdot$ を作用させれば

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla^2 \varphi \quad (3.35)$$

になるから、これを式(3.33)に入ると式(3.27)を得るので、 φ がその式を満たしていることが示される。また

式(3.25)に演算 $\nabla \wedge$ を作用させると

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \nabla \wedge \nabla \wedge \psi = -\nabla^2 \psi + \nabla \nabla \cdot \psi \quad (3.36)$$

従って、式(3.34)より

$$\nabla \cdot \psi = 0 \quad (3.37)$$

であれば、式(3.28)が導ける。以上より ψ が波動方程式(3.28)を満たすことが示された。これで証明終了。

式(3.29)と(3.30)より φ と ψ に関する初期条件は

$$\varphi(\mathbf{x}, 0) = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\varphi}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\varphi}_0(\mathbf{x}) \quad (3.38a, b)$$

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\psi}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\psi}_0(\mathbf{x}) \quad (3.39a, b)$$

ところで問題設定時にあらかじめ与えられるベクトル \mathbf{f} , \mathbf{u}_0 , $\dot{\mathbf{u}}_0$ が常に式(3.24)(3.31)(3.32)によって示された形に分解できることを前提としている点に注意されたい。これは一般にベクトル \mathbf{P} を

$$\mathbf{P} = \nabla P + \nabla \wedge \mathbf{Q} \quad (3.40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{Q} = 0 \quad (3.41)$$

のごとく分解できることが示せばよい。表示(3.40)のような分解をベクトル \mathbf{P} の Helmholtz 分解 (decomposition) と言っている。この分解の仕方、すなわちベクトル \mathbf{P} によってスカラー P とベクトル \mathbf{Q} を求める方法を次節に述べ分解が可能であることを示す。完全性定理に関して言えば、満足すべき条件 $\nabla \cdot \psi = 0$ が成り立つために必要なことは、式(3.30)と(3.41)より、ベクトルポテンシャル \mathbf{G} , ψ_0 , $\dot{\psi}_0$ が Helmholtz ポテンシャルとして求めることができさえすればよいということである。これに関連する事柄は次節に述べる。

3.5 ベクトルの Helmholtz 分解

ベクトル $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ を有限開空間域 V で区分的微分可能とする。この空間の任意点について定義

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\mathbf{P}(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} dV_\xi \quad (3.42)$$

を取扱う。ここに $dV_\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$, $|\mathbf{x} - \xi| = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2]^{1/2}$

$\mathbf{W}(\mathbf{x})$ は領域 V 内の点 \mathbf{x} に対し、ベクトル方程式

$$\nabla^2 \mathbf{W} = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (3.43)$$

を満足する。また領域 V の外点 ($\mathbf{x} \notin V$) で $\nabla^2 \mathbf{W} = 0$ となることはよく知られている。さて公式

$$\nabla^2 \mathbf{W} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{W} - \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{W} \quad (3.44)$$

を用いれば、ベクトル \mathbf{P} は式(3.43)と(3.44)から

$$\mathbf{P} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{W}) + \nabla \wedge (-\nabla \wedge \mathbf{W}) \quad (3.45)$$

と \mathbf{W} によって表現できる。これは次の形をしている。

$$\mathbf{P} = \nabla P + \nabla \wedge \mathbf{Q} \quad (3.46)$$

ただし
$$P = \nabla \cdot W \tag{3.47}$$

$$Q = -\nabla \wedge W \tag{3.48}$$

とする。ここに P と Q は、あらゆるところで定義され連続であり、また領域 V の中の点で微分可能である。以上、*Helmholtz* 分解を得るために P と Q の組み立て方を示した。すなわちベクトル場の $P(x)$ が与えられればベクトル $W(x)$ が式(3.42)から求まるので式(3.47)(3.48)のそれぞれから $p(x)$ と $Q(x)$ が決定される。この時、式(3.48)から回転(*curl*)の発散(*div*)は 0 なので必然的に

$$\nabla \cdot Q = 0 \tag{3.49}$$

になる。式(3.42)の W の存在性より、*Helmholtz* 分解は原点から遠く離れた距離 R で少なくとも定数 $\times R^{-2}$ の速さで $|P|$ が 0 に減少して行くならば、すなわち $|P| = O(R^{-2})$ ならば、無限域でも成立する。

3.6 体積力によって生ずる波動

3.6.1 放射

ここで取り上げる解析は、静止している物体内のある点に、ある特定時刻 ($t=0$ とする) から、ある力が作用しはじめるとした時に生ずる波動に関するものである。生じた擾乱の波は作用点から遠ざかる方向に広がって行く。このような波動状態を解析する問題を放射問題 (*radiation problems*) と呼んでいる。典型的な動弾性放射問題の一つは、媒体の有限域 V に分布する体積力によって生ずる無限体内の運動に関する解析である。均質等方な線形弾性体の波動は、2.10 節と 3.4 節で述べた変位ポテンシャルを用いて首尾よく解析される。体積力に基づく波動解析の基礎支配方程式は変位ポテンシャルを支配する方程式(3.27)(3.28)で、非齊次項を伴う古典的波動方程式であり初期静止の状態のもとに解かれる。そして、無限体に生ずる波動を決定するためには、高々、4本の非齊次波動方程式の解を見出しさえすればよい。

まず、スカラーポテンシャル $\phi(x, t)$ に関して詳しく考えてみよう。非齊次方程式

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -F(x, t) \tag{3.50}$$

の解を初期静止の条件

$$\phi(x, 0) = 0, \quad \dot{\phi}(x, 0) = 0 \tag{3.51a, b}$$

のもとで求める。そのための Dirac のデルタ関数として知られている超関数を利用すると便利なので、まず

その特徴を簡単に述べる。この関数は、一次元の時、次のように性格づけられる。

$$\int_a^b f(s) \delta(t-s) ds = \begin{cases} f(t) & ; t \in (a, b) \\ 0 & ; t \notin (a, b) \end{cases} \tag{3.52}$$

そして、デルタ関数は $\delta'(t-s)$, $\delta''(t-s)$, ... なる任意の高次導関数を有する。ただし ' は引数による微分を示す。これらの導関数は次式によって定義される。

$$\int_a^b f(s) \delta^{(n)}(t-s) ds = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(t) & ; t \in (a, b) \\ 0 & ; t \notin (a, b) \end{cases} \tag{3.53}$$

三次元空間におけるデルタ関数 $\delta|x-\xi|$ は次のように定義される。

$$\int_V f(\xi) \delta|x-\xi| dV_\xi = \begin{cases} f(x) & ; x \in V \\ 0 & ; x \notin V \end{cases} \tag{3.54}$$

ここに V は空間内にとったある正則域である。また $dV_\xi = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ である。直角座標系では、

$$\delta|x-\xi| = \delta(x_1-\xi_1) \delta(x_2-\xi_2) \delta(x_3-\xi_3)$$

座標原点に中心をもつデルタ関数は球座標で次式によって表わせる。

$$\frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \quad \text{ここに } r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \tag{3.55}$$

さて、もとにむかいて、ある 1 点(これを座標原点にとる)からの放射を表わす基本解 $\hat{\phi}(r, t)$ は $r=0$ において

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r} dA = f(t) \tag{3.56}$$

となるような特異性をもっている。式(3.56)は時刻 t において半径 ϵ の球面にわたる面積分を表わす。 dA は面積素である。また、関数 $f(t)$ は時間依存する放射源の強さである。初期静止の条件を満たす基本解 $\hat{\phi}$ は、原点を除いて、次の原点对称の齊次波動方程式を満足する。

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} = 0, \quad r > 0 \tag{3.57}$$

式(3.56)の条件と式(3.57)とを共に考慮した等価な式は、デルタ関数を用いて

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial t^2} = f(t) \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \tag{3.58}$$

のごとく表わせる。あるいは直角座標系で示せば

$$\nabla^2 \hat{\varphi} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial t^2} = f(t) \delta(|\boldsymbol{x}|) \quad (3.59)$$

式(3.57)の一般解は、次の置換え

$$\hat{\varphi}(r, t) = \frac{1}{r} \Phi(r, t)$$

を導入することによって得られ、式(3.57)より $\Phi(r, t)$ は一次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

によって支配されていることがわかる。この方程式は任意関数によって解の一般形の書き出せる特別な場合にあたる。1.2節で導いたダランベールの解を利用すれば

$$\Phi(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c_l}\right) + g\left(t + \frac{r}{c_l}\right)$$

したがって、式(3.57)の一般解は

$$\hat{\varphi}(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c_l}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c_l}\right)$$

右辺の二つの項は、関数の引数からわかるように、それぞれ外向波(outgoing wave)と到来波(incoming wave)を表わし、それらの振幅は r に反比例して伝ばるとともに一様に変化する。式(3.56)と(3.57)によって定義された放射問題では、明らかに外向波であるので前式の右辺第一項のみ採用し

$$\hat{\varphi}(r, t) = -\frac{1}{4\pi r} f\left(t - \frac{r}{c_l}\right) \quad (3.60)$$

の形に書ける。ここに関数 $f(t)$ は $t < 0$ で恒等的に 0 の任意関数である。式(3.60)を条件(3.56)の左辺に $\varphi = \hat{\varphi}$ として代入すればその式の等号が成り立つことが確かめられる。従って、式(3.60)は、式(3.58)(3.59)の解でもある。また式(3.60)は、原点から r だけ離れた位置の応答が原点で与える作用力と同じ長さだけの時間、持続し、かつ $t = r/c_l$ だけ時間遅れてはじめて現われることを示している。

波源点が原点になく、 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ にあるならば、式(3.59)の代わりに

$$\nabla^2 \hat{\varphi} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial t^2} = f(t) \delta(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|) \quad (3.61)$$

となる。式(3.61)の解は波源点から観測点 \boldsymbol{x} までの距離 r が $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|$ になるから式(3.60)より明らかに

$$\hat{\varphi}(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4\pi |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} f\left(t - \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|}{c_l}\right) \quad (3.62)$$

$$\text{ここに } |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2]^{1/2} \quad (3.63)$$

もし $f(t)$ が $t = S$ に作用するデルタ関数、すなわち $f(t) = \delta(t - S)$ ならば対応する解は、

$$g(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, S) = -\frac{1}{4\pi |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} \delta\left(t - S - \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|}{c_l}\right) \quad (3.64)$$

この式の物理的解釈は、時刻 S で波源点 $\boldsymbol{\xi}$ に与えられる単位衝撃点波源による時刻 t における観測点 \boldsymbol{x} の応答を表わしている。このような式(3.64)を無限体に対するグリーン関数という。波源分布 $-F(\boldsymbol{x}, t)$ によって生ずる場は波源の時間的・空間的な各々の部分要素による応答の積分による重ね合せによって得られる。この考え方に基けば $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ は積 $-F(\boldsymbol{\xi}, S)g(\boldsymbol{x}, t; \boldsymbol{\xi}, S)$ の S と ξ_i による積分形

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^t dS \int_V \frac{F(\boldsymbol{\xi}, S)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} \delta\left(t - S - \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|}{c_l}\right) dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.65)$$

ここに V は体積 ρ 分布の与えられている領域である。式(3.52)を用いれば式(3.65)は

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_L} \frac{F(\boldsymbol{\xi}, t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|/c_l)}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.66)$$

に簡単化される。ただし $dV_{\boldsymbol{\xi}} = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ 。そして積分は \boldsymbol{x} を中心とする半径 $c_l t$ の球 B_L にわたって体積積分である。これは

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_L} \frac{\{F\}_L}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.67)$$

のごとく略記する。中括弧記号 $\{ \}$ は非番次項の関数の時刻 t を $t - \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|}{c_l}$ に置きかえた時の値をとることを示している。 $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ の物理的解釈をすれば、位置 $\boldsymbol{\xi}$ にある波源の効果が \boldsymbol{x} に達するためには有限時間 $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|/c_l$ だけ遅れて現われることを示している。そこで表示式(3.66)の $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$ を遅延ポテンシャル(retarded potential)と呼んでいる。式(3.65)を(3.60)に入れれば解になっていることが確かめられる。

3.6.2 動弾性解 前項に示したと同様な方法で式(3.28)の解は

$$\psi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_T} \frac{\{G\}_T}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} dV_{\boldsymbol{\xi}}$$

ここに $\{ \}_T$ は $t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|/c_T$ における関数値をとることを示している。また B_T は \boldsymbol{x} を中心とし半径が $c_T t$ の球にわたる体積積分であることを示す。式(3.67)が得られているから式(3.25)より、変位は次のようになる。

$$4\pi \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{B_L} \nabla_{\mathbf{x}} \frac{\{F\}_L}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} dV_{\boldsymbol{\xi}} + \int_{B_T} \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \frac{\{G\}_T}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} dV_{\boldsymbol{\xi}}$$

ただし 演算子は $\nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial x_3}$ とする。

3.7 二次元の放射

前節のように衝撃パルスの重ね合せとして解を組み立てる方法は、二次元の放射問題の解析にも用いることができる。再び、次式に支配されるスカラーポテンシャルに焦点をあてよう。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -F(x_1, x_2, t) \quad (3.68)$$

そして、条件として $\varphi(x_1, x_2, 0) = 0, \quad \dot{\varphi}(x_1, x_2, 0) = 0 \quad (3.69)$

φ を求めるために、まず式(3.61)を参考にして、波源点から放射する波の基本解 $\hat{\varphi}$ を求める。その $\hat{\varphi}$ は式

$$\frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial x_2^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \hat{\varphi}}{\partial t^2} = f(t) \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \quad (3.70)$$

を満たさねばならない。この解は式(3.62)を利用すれば、首尾よく求められる。すなわち三次元解の線形重ね合せによって誘導することができる。式(3.70)の二次元解は

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) = \frac{-1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|}{c}\right) \frac{d\xi_3}{|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|} \quad (3.71)$$

ここに $|\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}|$ は式(3.63)の三次元的な定義になる。 $t < 0$ に対し $f(t) \equiv 0$ であるから実際の積分範囲は $x_3 > \xi_3$ の時と $x_3 < \xi_3$ の時に分けて考えれば求まるように。

$$x_3 - \sqrt{c^2 t^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2} \leq \xi_3 \leq x_3 + \sqrt{c^2 t^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}$$

の区間に限定される。それは $\xi_3 = x_3$ に関して対称範囲になっているから、式(3.71)は $x_3 - \sqrt{c^2 t^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}$

と x_3 の区間の積分の2倍としても書ける。いま $\eta =$

$$x_3 - \xi_3 = -\eta, \quad R = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2]^{1/2}$$

とおけば式(3.71)は

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{x_3 - \sqrt{c^2 t^2 - R^2}}^{x_3 + \sqrt{c^2 t^2 - R^2}} f\left(t - \frac{\sqrt{R^2 + \eta^2}}{c}\right) \frac{d\xi_3}{\sqrt{R^2 + \eta^2}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{c^2 t^2 - R^2}} f\left(t - \frac{\sqrt{R^2 + \eta^2}}{c}\right) \frac{d\eta}{\sqrt{R^2 + \eta^2}}$$

さらに

$$\xi = t - \frac{\sqrt{R^2 + \eta^2}}{c} \quad \text{とおくと} \quad d\xi = -\frac{\eta d\eta}{c \sqrt{R^2 + \eta^2}} \quad \text{すなわち} \quad \frac{c d\xi}{[(t-\xi)c^2 - R^2]^{1/2}} = \frac{d\eta}{\sqrt{R^2 + \eta^2}} \quad \text{だから}$$

$$\hat{\varphi}(\mathbf{x}, t; \boldsymbol{\xi}) = -\frac{c_L}{2\pi} \int_0^{t-R/c_L} \frac{f(\xi)}{[c_L^2(t-\xi)^2 - R^2]^{1/2}} d\xi \quad (3.72)$$

ただし、 $t > R/c_L$ 。式(3.72)は x_3 の関数として積分パラメータ ξ を導入したが、その積分範囲は x_3 に無関係に定まっているので $\hat{\varphi}$ は x_3 に独立である。[註]

さて、局所的な波源によって生ずる三次元波動場と二次元波動場の基本的な相違を基本解(3.62)と(3.72)を比較して考える。三次元場の点波源から離れたある点で観測される波形は、波源のそれと同一の時間依存性を示す。ただし時刻 $t=0$ で原点波源より発した波は

$$t = t_1 = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2]^{1/2} / c_L$$

の時刻にはじめて観測点に到来する。また、点波源を取り去ればその時から以後に観測点の状態は再び静止してしまう。波源点でも観測点でも波動の持続時間は等しくなる。

これに対して二次元問題の解は、波源の時間依存状態はもちろんで、波源の分布形態、すなわち $x_1 = \xi_1, x_2 = \xi_2, -\infty < \xi_3 < \infty$ によって定まる線上の無限個の波源点列にも、依存している。この理由は二次元の場合、ある観測点に現われる波は式(3.72)に示すような重ね合せのための積分になるためである。その擾乱波は時刻 $t = t_1 = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2]^{1/2} / c_L$ に波頭が到着するが、波源を取り去ってから t_1 以上時間経過しては点波源のように静止しない。すなわち、その観測波形は、長時間にわたって時間とともに減衰し引尾効果(tail effect)を示す。

点源と線源によるそれぞれの応答の違いを図式的に図3.1を用いて説明する。矢印は波源要素の観測点Pに至る波線による寄与を示す。また右上の補足図はT時間持続する波源による観測点Pの応答の大略を描いたものである。

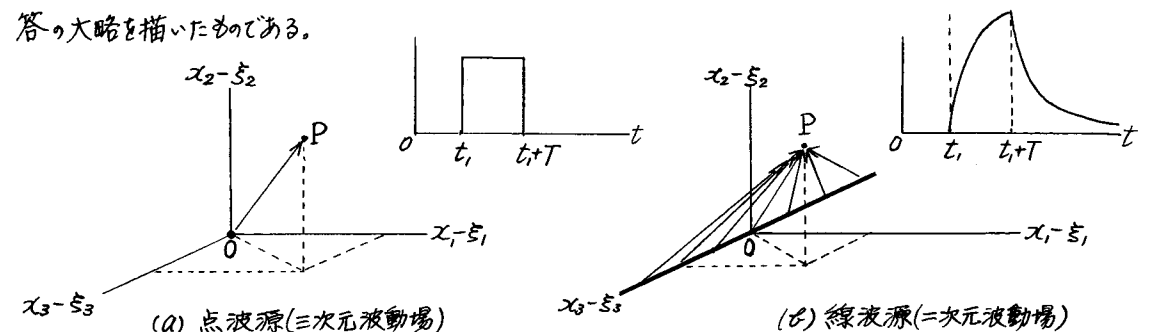


図3.1 点源と線源からの放射と応答の相違

[註]. もちろん、幾何学的考察から応答が x_3 に無関係になることを予想してはじめてから観測点が x_1, x_2 面内、すなわち $x_3 = 0$ においても一般性を失わずに取扱える。

有限持続する点波源による観測点の応答がそれぞれの持続時間に対応した応答波の組み合わせとして現われること、あるいは有限領域波源による応答がそれぞれの波源要素に対応した応答波の組み合わせとして説明されることは Huyghens の原理として知られている。しかしながら、有限持続の線波源によって生ずる応答が引尾効果を示すので、二次元場の問題だからと言って Huyghens の原理により直接 $(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)$ 空間で解析することはできない。この原理に基づく時は三次元空間で取扱わなければならない。

もし $f(t)$ が $t=s$ で作用するデルタ関数 $f(t) = \delta(t-s)$ ならば式(3.72)は二次元のグリーン関数となり

$$g(x, t; \xi, s) = -\frac{C_L}{2\pi} \frac{H(t-s-\frac{R}{C_L})}{[C_L^2(t-s)^2 - R^2]^{1/2}} \quad (3.73)$$

ここに、 $H(\cdot)$ はヘビサイドのステップ関数である。この式は時刻 s で $\xi_1, \xi_2, -\infty < \xi_3 < \infty$ 上に作用する単位衝撃の線波源によって、時刻 t で観測位置 x_1, x_2 に生ずる応答を表わしている。線形重ね合せより、式(3.68)の解は、積 $-F(\xi_1, \xi_2, s) g(x, t; \xi, s)$ の時空間に渡る積分であるから

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C_L}{2\pi} \frac{H(t-s-\frac{R}{C_L}) \cdot F(\xi_1, \xi_2, s)}{\sqrt{C_L^2(t-s)^2 - (x_1-\xi_1)^2 - (x_2-\xi_2)^2}} d\xi_1 d\xi_2 ds$$

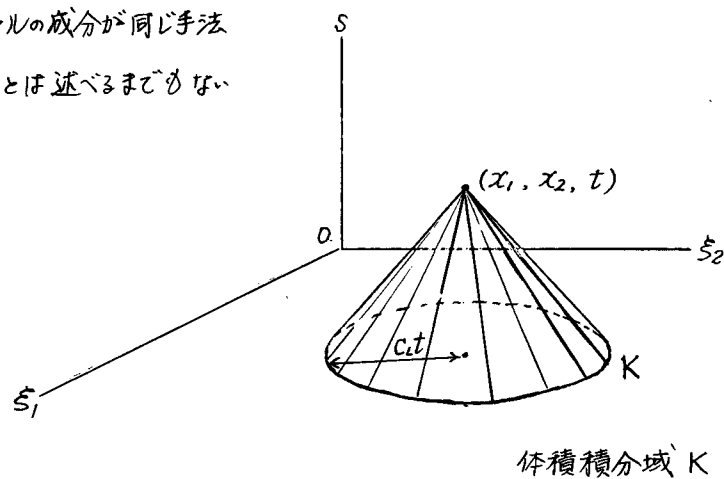
したがって

$$\varphi(x_1, x_2, t) = \frac{C_L}{2\pi} \int_K \frac{F(\xi_1, \xi_2, s) d\xi_1 d\xi_2 ds}{[C_L^2(t-s)^2 - (x_1-\xi_1)^2 - (x_2-\xi_2)^2]^{1/2}} \quad (3.74)$$

ここに積分 K は次式によって定義される (ξ_1, ξ_2, s) 空間における円錐体に渡るものとなる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq s \leq t \\ (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \leq C_L^2(t-s)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.75)$$

ベクトルポテンシャルの成分が同じ手法で算出できることは述べるまでもないだろう。



3.8 動弾性学の基本特異解

3.8.1 点荷重

本節では幾分特殊な体積力分布である点荷重を急激に作用させた時の無限体に生ずる変位と応力を調べよう。これらは、動弾性学の場の方程式の基本特異解よりなっている。時間に依存する点荷重によって生ずる変位は Stokes によって始めて扱われている。Stokes の解は時間依存の体積力分布を点荷重に極限する方法によるが、ここでは点荷重を単位質量当りの体積力のデルタ関数状分布として直接的に与え、その関数の性質を利用して、より形式的に求める方法を述べる。三次元空間のデルタ関数 $\delta(|x-\xi|)$ は式(3.54)によって定義されている。

単位質量当りの体積力 f を考えた変位運動方程式は

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.76)$$

いま、大きさ $g(t)$ の集中荷重が一定単位ベクトル \mathbf{a} の方向に作用しているとしよう。 $g(t)$ は 2 階の導関数まで存在し連続である。この時、一般性を失わずに集中荷重の作用点を座標原点に選ぶことができるから、この集中荷重に等価な体積力として次のように置くことができる。

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} g(t) \delta(|\mathbf{x}|) \quad (3.77)$$

式(3.24)に従って体積力ベクトルを $\mathbf{f} = C_L^2 \nabla F + C_T^2 \nabla \wedge \mathbf{G}$ のように分解する。この分解は 3.5 節で議論した Helmholtz 分解の方法によってできる。式(3.47)(3.48)(3.42)を用いると

$$C_L^2 F(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{4\pi I} \right) g(t)$$

そして

$$C_T^2 \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \nabla \wedge \left(\frac{\mathbf{a}}{4\pi I} \right) g(t)$$

ここに

$$I^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (3.78)$$

変位ベクトルを式(3.25)の形に書く

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \varphi + \nabla \wedge \Psi \quad (3.79)$$

式(3.27)と(3.28)から $\varphi(\mathbf{x}, t)$ と $\Psi(\mathbf{x}, t)$ は次の非斉次波動方程式を満たす。

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{C_L^2} \ddot{\varphi} = \frac{g(t)}{C_L^2} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{a}}{4\pi I} \right) \quad (3.80)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{C_T^2} \ddot{\Psi} = -\frac{g(t)}{C_T^2} \nabla \wedge \left(\frac{\mathbf{a}}{4\pi I} \right) \quad (3.81)$$

便宜のため

$$\varphi = \nabla \cdot \Phi, \quad \Psi = -\nabla \wedge \Xi \quad (3.82a, b)$$

を定義し $\Phi = \Phi \mathbf{a}$, $\Psi = \Psi \mathbf{a}$ (3.83a, b)

とおけば Φ と Ψ が、次のスカラー波動方程式の解になる時、式(3.80)と(3.81)は満たされる。

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c_l^2} \ddot{\Phi} = \frac{g(t)}{c_l^2} \cdot \frac{1}{4\pi r} \quad (3.84)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c_t^2} \ddot{\Psi} = \frac{g(t)}{c_t^2} \cdot \frac{1}{4\pi r} \quad (3.85)$$

ここに r は式(3.78)によって定義される。式(3.84)(3.85)の解はすでに3.6節で導いた。非齊次項が極対称性を示しているから、その解を求めるには球座標を用いると、たとえば式(3.84)は

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{g(t)}{4\pi c_l^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (3.86)$$

と書ける。さて置換えをする。 $r > 0$ を考えるから、

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{r} \chi(r, t) \quad (3.87)$$

として、式(3.86)を書きかえれば非齊次の一次元波動方程式になる。

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \frac{g(t)}{4\pi c_l^2} \quad (3.88)$$

この方程式の特解は、 $t < 0$ に対し $g(t) \equiv 0$ であることを考慮して

$$\chi_p(t) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^t s \cdot g(t-s) ds$$

となる。この誘導は、式(3.88)の右辺が時間のみ依存するので特解は $\chi_p(t)$ と書け、 $\partial^2 \chi_p / \partial r^2 = 0$ となる。

から、 $\frac{d^2 \chi_p}{dt^2} = -\frac{1}{4\pi} g(t)$

のみ考えればよい。初期静止の条件を考慮して $\chi_p(0) = \left[\frac{d}{dt} \chi_p(t) \right]_{t=0} = 0$ とすれば、上式のラプラス変換は

$$\bar{\chi}_p = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \bar{g}(s)$$

$1/s^2$ の逆変換が t であるから、たにみみ積分によって $\bar{\chi}_p$ の逆変換をすれば $\chi_p(t) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^t s \cdot g(t-s) ds$ が得る。

次に式(3.88)の齊次方程式の一般解は、引数 $(t - r/c_l)$ と $(t + r/c_l)$ のそれぞれの任意関数である。ここで $\chi(r, t)$ が $r=0$ で時間 t によらず 0 とならなければならないから、任意関数の形は特解と同形になる。従って

$$4\pi \chi(r, t) = \int_0^{t+r/c_l} s g(t \pm \frac{r}{c_l} - s) ds - \int_0^t s \cdot g(t-s) ds$$

と書ける。プラス符号は $r=0$ に到来する波に、マイナス符号は $r=0$ から遠ざかる波を示す。当面の問題に対しては $r=0$ に到来する波を取除き、さらに式(3.87)の置換えをしていることを考慮すれば、式(3.86)、すなわち式(3.84)の解は

$$4\pi \Phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} \int_0^{t-\frac{r}{c_l}} s \cdot g(t - \frac{r}{c_l} - s) ds - \frac{1}{r} \int_0^t s \cdot g(t-s) ds \quad (3.89)$$

となる。ここに r は式(3.78)で定義されている。式(3.85)の解も同様にして得られ

$$4\pi \Psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} \int_0^{t-\frac{r}{c_t}} s \cdot g(t - \frac{r}{c_t} - s) ds - \frac{1}{r} \int_0^t s \cdot g(t-s) ds \quad (3.90)$$

$t < 0$ に対して $g(t) \equiv 0$ だから、式(3.89)と(3.90)の右辺の項の積分はそれぞれ $t < r/c_l$ と $t < r/c_t$ で値が 0 になる。

式(3.79)(3.82a, b)より、変位ベクトルは

$$\mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \Phi - \nabla \wedge \nabla \wedge \Psi$$

さらにベクトルの恒等式 $\nabla^2 \Psi = \nabla \nabla \cdot \Psi - \nabla \wedge \nabla \wedge \Psi$ を用いれば

$$\mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot (\Phi - \Psi) + \nabla^2 \Psi \quad (3.91)$$

まず上式の $\nabla^2 \Psi$ すなわち $\mathbf{a} \nabla^2 \Psi$ を評価する。^[註] 式(3.90)を代入すれば $\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$ だから

$$\begin{aligned} 4\pi \mathbf{a} \nabla^2 \Psi &= \mathbf{a} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^{t-r/c_t} s \cdot g(t - \frac{r}{c_t} - s) ds \right\} \right] \\ &= \mathbf{a} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \int_{r/c_t}^t (\eta - \frac{r}{c_t}) g(t-\eta) d\eta \right\} \right] \\ &= \frac{\mathbf{a}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left\{ -\frac{1}{r^2} \int_{r/c_t}^t (\eta - \frac{r}{c_t}) g(t-\eta) d\eta + \frac{1}{r} \int_{r/c_t}^t -\frac{1}{c_t} g(t-\eta) d\eta - \frac{1}{r c_t} g(t - \frac{r}{c_t}) \right\} \right] \\ &= \frac{\mathbf{a}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[-\int_{r/c_t}^t \eta g(t-\eta) d\eta + \frac{r}{c_t} \int_{r/c_t}^t g(t-\eta) d\eta - \frac{r}{c_t} \int_{r/c_t}^t g(t-\eta) d\eta \right] \\ &= \frac{\mathbf{a}}{r^2} \cdot \frac{1}{c_t} \frac{r}{c_t} g(t - \frac{r}{c_t}) = \frac{\mathbf{a}}{r} \frac{1}{c_t^2} g(t - \frac{r}{c_t}) \end{aligned}$$

したがって、式(3.91)に式(3.89)(3.90)及び上式を代入すれば

$$4\pi \mathbf{u} = \nabla \nabla \cdot \left\{ \frac{\mathbf{a}}{r} \int_0^{t-r/c_l} s \cdot g(t - \frac{r}{c_l} - s) ds - \frac{\mathbf{a}}{r} \int_0^{t-r/c_t} s \cdot g(t - \frac{r}{c_t} - s) ds \right\} + \frac{\mathbf{a}}{r} \frac{1}{c_t^2} g(t - \frac{r}{c_t}) \quad (3.92)$$

式(3.92)は式(3.77)で与えられるような座標原点に作用する体積力によって \mathbf{x} に生ずる変位ベクトルである。

[註] \mathbf{a} は定ベクトルであり、 $\nabla^2 \Phi = \nabla^2(\mathbf{a} \Psi) = \mathbf{a}(\nabla^2 \Psi)$ [82]

座標原点に作用する集中体積力が座標軸 x_k の方向に働くと仮定する。すなわち $\mathbf{a} = \mathbf{i}_k$ 。この時に生ずる x_i 軸方向の変位は

$$4\pi U_i(\mathbf{x}, t) = D_i^k[\mathbf{0}; g(t)] \quad (3.93)$$

の形に書ける。ここに $D_i^k[\]$ は線形作用素であり、 $\mathbf{0}$ は荷重が原点に集中して作用することを表わし、 $g(t)$ は時間依存を定める関数である。式(3.92)より、この線形作用素は次のようになる。^[註]

$$D_i^k[\mathbf{0}; g(t)] = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^{t-x/c_l} S g(t-\frac{r}{c_l}-s) ds - \frac{1}{r} \int_0^{t-x/c_T} S g(t-\frac{r}{c_T}-s) ds \right\} + \frac{\delta_{ik}}{c_T^2} \frac{1}{r} g(t-\frac{r}{c_T}) \quad (3.94)$$

ここに r は $r = (x^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ である。式(3.94)の $\{ \}$ 内を $\eta = \frac{r}{c_l} + s$, $\zeta = \frac{r}{c_T} + s$ の置換によって変形する。すなわち

$$\begin{aligned} \{ \} &= \frac{1}{r} \int_{r/c_l}^t (\eta - \frac{r}{c_l}) g(t-\eta) d\eta - \frac{1}{r} \int_{r/c_T}^t (\zeta - \frac{r}{c_T}) g(t-\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{r} \int_{r/c_l}^{r/c_T} S g(t-s) ds - \frac{1}{c_l} \int_{r/c_l}^t g(t-s) ds + \frac{1}{c_T} \int_{r/c_T}^t g(t-s) ds \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{r} \int_{r/c_l}^{r/c_T} S g(t-s) ds \right\} &= \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_k} \int_{r/c_l}^{r/c_T} S g(t-s) ds + \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{c_T} \frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot \frac{r}{c_T} g(t-\frac{r}{c_T}) - \frac{1}{c_l} \frac{\partial r}{\partial x_k} \cdot \frac{r}{c_l} g(t-\frac{r}{c_l}) \right\} \\ &= \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_k} \int_{r/c_l}^{r/c_T} S g(t-s) ds + \frac{\partial r}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{c_T^2} g(t-\frac{r}{c_T}) - \frac{1}{c_l^2} g(t-\frac{r}{c_l}) \right\} \end{aligned}$$

また $\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{c_l} \int_{r/c_l}^t g(t-s) ds \right\} = -\frac{1}{c_l^2} \frac{\partial r}{\partial x_k} g(t-\frac{r}{c_l})$, $\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{c_T} \int_{r/c_T}^t g(t-s) ds \right\} = -\frac{1}{c_T^2} \frac{\partial r}{\partial x_k} g(t-\frac{r}{c_T})$

よって

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{r} \int_0^{t-x/c_l} S g(t-\frac{r}{c_l}-s) ds - \frac{1}{r} \int_0^{t-x/c_T} S g(t-\frac{r}{c_T}-s) ds \right\} = \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_k} \int_{r/c_l}^{r/c_T} S g(t-s) ds$$

式(3.94)に代入

$$\begin{aligned} D_i^k[\mathbf{0}; g(t)] &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_k} \int_{r/c_l}^{r/c_T} S g(t-s) ds \right\} + \frac{\delta_{ik}}{c_T^2} \frac{1}{r} g(t-\frac{r}{c_T}) \\ &= \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x_i \partial x_k} \int_{r/c_l}^{r/c_T} S g(t-s) ds + \frac{\partial r^{-1}}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{c_T} \frac{\partial r}{\partial x_i} \left(\frac{r}{c_T} \right) g(t-\frac{r}{c_T}) - \frac{1}{c_l} \frac{\partial r}{\partial x_i} \left(\frac{r}{c_l} \right) g(t-\frac{r}{c_l}) \right\} \\ &\quad + \frac{\delta_{ik}}{c_T^2} \frac{1}{r} g(t-\frac{r}{c_T}) \end{aligned}$$

ここで $\frac{\partial r^{-1}}{\partial x_k} = -\frac{x_k}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_k}$ が成り立つことに注意して整理すれば

[註] $\mathbf{A} = A_k \mathbf{i}_k$ のとき $\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i \partial x_k} \mathbf{i}_i$, 従って $\nabla \cdot \mathbf{A}$ の i 方向成分は $\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} A_k$ である。

$$\begin{aligned} D_i^k[\mathbf{0}; g(t)] &= \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x_i \partial x_k} \int_{r/c_l}^{r/c_T} S g(t-s) ds \\ &\quad + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial x_k} \right) \left[\frac{1}{c_l^2} g(t-\frac{r}{c_l}) - \frac{1}{c_T^2} g(t-\frac{r}{c_T}) \right] + \frac{\delta_{ik}}{c_T^2} \frac{1}{r} g(t-\frac{r}{c_T}), \quad (3.95) \end{aligned}$$

x_i 軸に平行に働く荷重の場合は Love によって与えられており、^[註] 上式の特別な場合として導びける。上式の積分区間の位置依存性をなくするため変数変換 ($s \rightarrow rs$) を行えばよい。結局、次式を得る。

$$\begin{aligned} D_i^k[\mathbf{0}; g(t)] &= \left(\frac{3x_i x_k}{r^3} - \frac{\delta_{ik}}{r} \right) \int_{1/c_l}^{1/c_T} S g(t-rs) ds \\ &\quad + \frac{x_i x_k}{r^3} \left[\frac{1}{c_l^2} g(t-\frac{r}{c_l}) - \frac{1}{c_T^2} g(t-\frac{r}{c_T}) \right] + \frac{\delta_{ik}}{c_T^2} \frac{1}{r} g(t-\frac{r}{c_T}) \quad (3.96) \end{aligned}$$

これで式(3.93)の変位成分が求まった。この時に対応する応力は Hooke の法則 (3.6) を介して求められる。

$$\begin{aligned} \rho^{-1} \tau_{ij} &= (c_l^2 - 2c_T^2) U_{l,l} \delta_{ij} + c_T^2 (U_{i,j} + U_{j,i}) \\ 4\pi \rho^{-1} \tau_{ij} &= (c_l^2 - 2c_T^2) D_{l,l}^k \delta_{ij} + c_T^2 (D_{i,j}^k + D_{j,i}^k) \end{aligned}$$

ところで

$$\begin{aligned} D_{ij}^k &= \frac{\partial}{\partial x_j} D_i^k[\mathbf{0}; g(t)] = \left\{ -\frac{15x_i x_j x_k}{r^5} + \frac{3(\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j + \delta_{kj} x_i)}{r^3} \right\} \int_{1/c_l}^{1/c_T} S g(t-rs) ds \\ &\quad + \left\{ \frac{6x_i x_j x_k}{r^5} - \frac{\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j + \delta_{kj} x_i}{r^3} \right\} \left[\frac{1}{c_T^2} g(t-\frac{r}{c_T}) - \frac{1}{c_l^2} g(t-\frac{r}{c_l}) \right] \\ &\quad + \frac{x_i x_j x_k}{r^4} \left[\frac{1}{c_T^3} \dot{g}(t-\frac{r}{c_T}) - \frac{1}{c_l^3} \dot{g}(t-\frac{r}{c_l}) \right] \\ &\quad - \frac{\delta_{ik} x_j}{c_T^2 r^3} \left[g(t-\frac{r}{c_T}) + \frac{r}{c_T} \dot{g}(t-\frac{r}{c_T}) \right] \end{aligned}$$

また

$$D_{l,l}^k = -\frac{x_k}{r^3 c_l^2} \left\{ g(t-\frac{r}{c_l}) + \frac{r}{c_l} \dot{g}(t-\frac{r}{c_l}) \right\} \quad (\because \delta_{ll} = 3, \delta_{l,k} x_l = x_k)$$

従って $4\pi \tau_{ij}(\mathbf{x}, t) = S_{ij}^k[\mathbf{0}; g(t)] \quad (3.97)$

ただし作用素 $S_{ij}^k[\]$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \rho^{-1} S_{ij}^k[\mathbf{0}; g(t)] &= -6c_T^2 \left(\frac{5x_i x_j x_k}{r^5} - \frac{\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j + \delta_{kj} x_i}{r^3} \right) \int_{1/c_l}^{1/c_T} S g(t-rs) ds \\ &\quad + 2 \left(\frac{6x_i x_j x_k}{r^5} - \frac{\delta_{ij} x_k + \delta_{ik} x_j + \delta_{kj} x_i}{r^3} \right) \left\{ g(t-\frac{r}{c_T}) - \left(\frac{c_T}{c_l} \right)^2 g(t-\frac{r}{c_l}) \right\} \\ &\quad + \frac{2x_i x_j x_k}{r^4 c_T} \left\{ \dot{g}(t-\frac{r}{c_T}) - \left(\frac{c_T}{c_l} \right)^3 \dot{g}(t-\frac{r}{c_l}) \right\} - \frac{x_k \delta_{ij}}{r^3} \left\{ 1 - 2 \left(\frac{c_T}{c_l} \right)^2 \right\} \left\{ g(t-\frac{r}{c_l}) + \frac{r}{c_l} \dot{g}(t-\frac{r}{c_l}) \right\} \\ &\quad - \frac{\delta_{ik} x_j + \delta_{jk} x_i}{r^3} \left\{ g(t-\frac{r}{c_T}) + \frac{r}{c_T} \dot{g}(t-\frac{r}{c_T}) \right\} \quad (3.98) \end{aligned}$$

[註] A.H.E. Love "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity" Dover (4th ed.) P.305 ; $k=1$ にあたる。
[84]

もし、点体積力の作用が原点になく $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ にあるならば式(3.77)の代りに

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{a} g(t) \delta(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|)$$

とする。 x_n 方向の荷重によって生ずる変位と応力の場は、作用素 $D_i^R[\]$ と $S_i^R[\]$ の表式(3.96)と式(3.98)において x_i を $x_i - \xi_i$ に入れかえ、さらに r を $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2]^{1/2}$ と再定義することにより得られる。そして $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ に作用する時のこれらの解を次のように書く。

$$4\pi u_i(\boldsymbol{x}, t) = D_i^R[\boldsymbol{\xi}; g(t)] \quad (3.99)$$

$$4\pi \tau_{ij}(\boldsymbol{x}, t) = S_{ij}^R[\boldsymbol{\xi}; g(t)] \quad (3.100)$$

3.8.2 圧縮中心 (Center of compression) 単位体積当りの大きさが $\rho g(t)/h$ の体積力が原点で x_1 方向に作用し、またこれに加えて $x_1 = h, x_2 = x_3 = 0$ の点に、それと大きさが等しく逆方向の体積力が作用しているとする。 h を 0 に極限した時、変位場が無条件に定まるという条件で考える。

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) = i_1 \frac{\rho g(t)}{h} \delta(\boldsymbol{x}) + (-i_1) \frac{\rho g(t)}{h} \delta(\boldsymbol{x} - h i_1) \approx \frac{\rho g(t)}{h} \{ i_1 \delta(|\boldsymbol{x}|) - [\delta(|\boldsymbol{x}| - h) \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \delta(|\boldsymbol{x}| - \dots)] \} \approx \frac{\partial}{\partial x_1} (i_1 g(t) \delta(\boldsymbol{x}))$$

このような体積力により生ずる変位は
$$4\pi u_i(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_1} \{ D_i^R[\mathbf{0}; g(t)] \}$$

これらの変位は、一直線上にある二つの力、すなわち無偶力=重力 (double force without moment) による変位と言える。さて、この無偶力=重力を三つ座標原点上で組み合わせる。それぞれの力は x_1, x_2, x_3 軸と平行に作用する。組み合わせた合変位の成分は次のようになる。

$$4\pi u_i(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_1} \{ D_i^R[\mathbf{0}; g(t)] \} + \frac{\partial}{\partial x_2} \{ D_i^R[\mathbf{0}; g(t)] \} + \frac{\partial}{\partial x_3} \{ D_i^R[\mathbf{0}; g(t)] \} \quad (3.101)$$

式(3.94)より $D_i^R[\mathbf{0}; g(t)] = D_i^L[\mathbf{0}; g(t)]$ のごとく添字が可換であるから、式(3.101)は

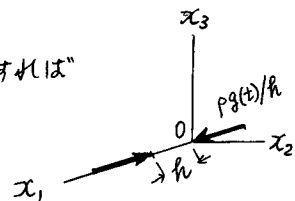
$$4\pi u_i(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_1} \{ D_1^L[\mathbf{0}; g(t)] \} + \frac{\partial}{\partial x_2} \{ D_2^L[\mathbf{0}; g(t)] \} + \frac{\partial}{\partial x_3} \{ D_3^L[\mathbf{0}; g(t)] \} \quad (3.102)$$

このように定められた変位成分は、上式の形から、原点に作用する単一の x_i 方向集中荷重による変位から作られる発散 (div.) と考えることができる。単一の体積力に対する場合は以前に議論した。そこで式(3.79)より

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla^2 \phi$$

さらに式(3.82a)と(3.83a)を用い x_i 方向のみに働く力であることを考慮すれば

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \nabla^2 \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 \phi$$



とすることで、この重の解が式(3.89)のごとく求まっているから $\nabla^2 \Phi$ に入れると、式(3.91)の $\nabla^2 \Phi$ の計算と同じ手法により

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{r} g(t - \frac{r}{c}) \right]$$

を得る。したがって、式(3.102)は

$$u_i = \frac{1}{4\pi c^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{r} g(t - \frac{r}{c}) \right] \quad (3.103)$$

式(3.103)は、圧縮中心による変位成分を表わしている。この他の集中力の組み合わせも考えて変位場を作ることができ。^[註2]

3.9 三次元積分表示

本節の目的は波動方程式についての Kirchhoff の公式に類似する動弾性変位分布の積分表示を求めることである。Kirchhoff の公式とは波動方程式のポテンシャル解を積分表示したものである。これに対して動弾性解としての変位ベクトル場を求める。

3.9.1 Kirchhoff の公式^[註3] 表面 S によって境界づけられた正則域 V に対し、非齊次波動方程式 $\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -f(\boldsymbol{x}, t)$ の一般解は Kirchhoff によって得られており結果のみ示してその内容を述べる。すなわち

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\{f\}}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} dV_{\xi} + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n_{\xi}} \right\} - \left\{ \phi \right\} \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} + \frac{1}{c} \frac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} \frac{\partial |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|}{\partial n_{\xi}} \right] dA_{\xi}$$

ここに n_{ξ} は S の外向き単位法ベクトルで、もちろん \boldsymbol{x} は領域 V 内の点をあらわす位置ベクトルである。また、中括弧 $\{ \}$ は、式(3.67)の所で以前に定義した使い方をしている。従って $\{ \partial \phi / \partial n_{\xi} \}$ は $\frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \phi(\boldsymbol{\xi}, s)$ をしてから、引数 s を遅延時間 $t - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|/c$ におきかえることを意味する。Kirchhoff 公式の右辺第1項の体積積分は式(3.67)からわかるように体積 V 内の波源分布によるスカラーポテンシャル ϕ への寄与である。面積分は S 上の条件を満たすに必要な体積 V 外からの波源による寄与である。 ϕ とその導関数が S 上で既知ならば、 ϕ は完全に定まるが、 ϕ と $\partial \phi / \partial n_{\xi}$ の双方を任意に指定することはできない。

3.9.2 動弾性表現定理 (Elastodynamic representation theorem)

Wheeler と Sternberg の研究^[註]に従えば、この定理はある動弾性状態に動的相反恒等式(3.16)を適用することによって導くことができる。次に、この定理と、その成り立ちを論ずる。

[註] L. T. Wheeler and E. Sternberg, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol 31 (1968) P.51

[註2] A.C. Eringen and S. Suhubi, "Elastodynamics", Vol II, Acad. Press., P401 ; [註3] A.C. Eringen et al. 同, P.376

定理 3.4 (変位場に対する積分恒等式); V を境界 S をもつ正則領域としよう。

$$\mathcal{J} = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}] \in \mathcal{E}_0[\mathbf{f}, \rho, \lambda, \mu; \bar{V}] \quad (3.104)$$

の動弾性状態を想定すると変位成分は S 上の応力ベクトルと変位 および V 内の体積力によって表わすことができて

$$4\pi\rho u_k(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum_{i=1}^3 \int_S \{ D_i^k[\boldsymbol{\xi}; t_i(\mathbf{x}, t)] - \tau_{ij} S_{ij}^k[\boldsymbol{\xi}; u_i(\mathbf{x}, t)] \} dA + \rho \sum_{i=1}^3 \int_V D_i^k[\boldsymbol{\xi}; f_i(\mathbf{x}, t)] dV \quad (3.105)$$

ここに積分は空間 (x_1, x_2, x_3) について行ない。また作用素 $D_i^k[\]$ と $S_{ij}^k[\]$ はそれぞれ式(3.96), (3.99)(3.98)(3.100) によって定義されている。

証明 = 上の動弾性状態、すなわち式(3.104)によって定義される状態と

$$u_i' = D_i^k[\boldsymbol{\xi}; g(t)] \quad (3.106)$$

$$\tau_{ij}' = S_{ij}^k[\boldsymbol{\xi}; g(t)] \quad (3.107)$$

によって定義される状態を考える。後者の変位と応力の分布は、前に述べたように大きさ $g(t)$ で時刻 $t=0$ で $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ に x_k 方向に作用する集中体積力によるものである。両状態とも過去静止を有するから動的相反恒等式の初期値を含む項が消去される。すなわち、式(3.16)より

$$\int_S \tau_{ij} \tau_{ij}' * u_i' dA + \rho \int_V f_i * u_i' dV = \int_S \tau_{ij}' \tau_{ij} * u_i dA + \rho \int_V f_i' * u_i dV \quad (3.108)$$

と書ける。ただし、体積力分布は特別な形 $\mathbf{f}'(\mathbf{x}, t) = 4\pi \mathbf{i}_k g(t) \delta(|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|)$ で十分である。そうすれば式(3.108)の右辺の第2項は Dirac のデルタ関数の特殊な性質を利用してベクトル変数 \mathbf{x} を $\boldsymbol{\xi}$ に変えればよ

$$\text{いから} \quad 4\pi\rho [g * u_k](\boldsymbol{\xi}, t) = \rho \int_V f_i * u_i' dV + \int_S \{ \tau_{ij} \tau_{ij}' * u_i' - \tau_{ij}' \tau_{ij} * u_i \} dA$$

作用素の式(3.106)(3.107)を用いて

$$4\pi\rho [g * u_k](\boldsymbol{\xi}, t) = \rho \int_V f_i * D_i^k[\boldsymbol{\xi}; g(t)] dV + \int_S \{ t_i * D_i^k[\boldsymbol{\xi}; g(t)] - \tau_{ij} u_i * S_{ij}^k[\boldsymbol{\xi}; g(t)] \} dA \quad (3.109)$$

もし、 $g(t)$ が2回まで微分可能で、それぞれの導関数が連続 (G^2 級) ならば次式が成り立つ。

$$f_i * D_i^k[\boldsymbol{\xi}; g(t)] = \sum_{i=1}^3 g * D_i^k[\boldsymbol{\xi}; f_i(\mathbf{x}, t)] \quad (3.110)$$

これは式(3.96)を用い、たみ込み積分の変数変換をすることによって容易に確かめられる。たとえば

$$f_i(\mathbf{x}, t) * g(t - \tau) = \int_0^\infty f_i(\mathbf{x}, t - \tau) g(\tau - \tau) d\tau \\ \tau - \tau = \zeta \text{ とおくと } g(\zeta) \equiv 0; \zeta < 0 \text{ から} \\ = \int_{-\tau}^\infty f_i(\mathbf{x}, t - \zeta - \tau) g(\zeta) d\zeta = \int_0^\infty f_i(\mathbf{x}, t - \zeta - \tau) g(\zeta) d\zeta$$

$$\text{よって} \quad f_i(\mathbf{x}, t) * g(t - \tau) = f_i(\mathbf{x}, t - \tau) * g(t)$$

また $g(t - \frac{r}{c})$ について $f_i(\mathbf{x}, t) * g(t - \frac{r}{c}) = f_i(\mathbf{x}, t - \frac{r}{c}) * g(t)$ が成り立つ。そして $D_i^k[\]$ の定義式(3.96)が $g(\cdot)$ より構成されていることに注意すれば式(3.110)が成立することがわかる。同様に他の関数 t_i

$$t_i * D_i^k[\boldsymbol{\xi}; g(t)] = \sum_{i=1}^3 g * D_i^k[\boldsymbol{\xi}; t_i(\mathbf{x}, t)] \quad (3.111)$$

$$u_i * S_{ij}^k[\boldsymbol{\xi}; g(t)] = \sum_{i=1}^3 g * S_{ij}^k[\boldsymbol{\xi}; u_i(\mathbf{x}, t)] \quad (3.112)$$

式(3.110)~(3.112)を式(3.109)に入れて、空間積分とたみ込み積分の順序を入れ換えれば次を得る。

$$[g * w_k](\boldsymbol{\xi}, t) = 0 \quad (3.113)$$

$$\text{よって} \quad w_k(\boldsymbol{\xi}, t) = 4\pi\rho u_k(\boldsymbol{\xi}, t) - \rho \sum_{i=1}^3 \int_V D_i^k[\boldsymbol{\xi}; f_i(\mathbf{x}, t)] dV - \sum_{i=1}^3 \int_S \{ D_i^k[\boldsymbol{\xi}; t_i(\mathbf{x}, t)] - \tau_{ij} S_{ij}^k[\boldsymbol{\xi}; u_i(\mathbf{x}, t)] \} dA \quad (3.114)$$

$\boldsymbol{\xi}$ と t は $V \times (0, \infty)$ 内で任意に選んだから、式(3.114)はすべての $(\boldsymbol{\xi}, t) \in V \times (0, \infty)$ で成立する。たみ込み積分(3.113)が連続だから $g(t)$ あるいは $w_k(\boldsymbol{\xi}, t)$ のいずれかが0にならなければならぬ。 $g(t) \equiv 0$ と選んだから $w_k(\boldsymbol{\xi}, t) \equiv 0$ 。従って式(3.114)より、すなわち式(3.105)を得る。以上証明終り。

式(3.105)は領域 V 内の任意観測点 \mathbf{x} で成立し、その最初の二項が境界面 S 上の応力ベクトル $t_i(\mathbf{x}, t)$ と変位 $u_i(\mathbf{x}, t)$ による依存性を示している。三番目の項は単位質量当りの体積力密度分布 $f_i(\mathbf{x}, t)$ 依存性を示している。この積分恒等式は波動方程式の解として表わすため、Kirchhoff 公式の動弾性場への拡張である。すなわちスカラー波動方程式の解に対して変位ベクトル場としての解を論ずることができるようになる。この積分恒等式(3.105)は無限媒体のある動弾性回折問題の解を作る上で利用できる。式(3.105)は、 S 上の変位と応力ベクトルを同時に与える形になっているから古典的動弾性学の変位を与える第一種あるいは応力ベクトルのみ与える第二種の初期値境界値問題を解くためには、そのままで不都合である。そこで、いずれか

一方を消去することが必要である。このことについては前に引用した Wheeler と Sternberg による論文でなされている。ここでは過去静止の状態をもつ σ -種, σ -種初期値境界値問題の解形としての積分表現式を示している。

3. 10 二次元積分表示

もし、場の変数が x_3 座標に独立ならば、変位運動方程式は、式(2.55)と式(2.58)より、次の非連成方程式系になる。

$$\mu u_{3,\beta\beta} + \rho f_3 = \rho \ddot{u}_3 \quad (3.115)$$

$$\mu u_{\alpha,\beta\beta} + (\lambda + \mu) u_{\beta,\alpha\alpha} + \rho f_\alpha = \rho \ddot{u}_\alpha \quad (3.116)$$

ただし、ギリシャ文字指標は、1 と 2 の値のみをとる。式(3.115)と(3.116)のそれぞれは、2.7 節で議論したように面外せん断運動と面内ひずみ運動を支配する。

3. 10. 1 基本特異解 (Basic singular solutions) = 次元の基本特異解とは、次のような

直線上に集中する体積力によって生ずる変位場もしくは応力場の解をいう。

$$f_3(x_1, x_2, t) = g(t) \delta(x_1) \delta(x_2) \quad (3.117)$$

$$f_\alpha(x_1, x_2, t) = g(t) \delta(x_1) \delta(x_2) \quad (3.118)$$

もちろん体積力分布(3.117)(3.118)をそれぞれ(3.115)と(3.116)に入れて直接解を求めることもできるが、線形性を考慮して点荷重の解の積分として次元解を得ることもできる。そこで $x_1=0, x_2=0, x_3=\xi_3$ の位置に x_2 方向に働く大きさ $g(t)$ の点荷重を考えれば、対応する変位は式(3.99)より次のように書ける。

$$4\pi u_i(\mathbf{x}, t) = D_i^R[\xi_3 \mathbf{i}_3; g(t)] \quad (3.119)$$

ここで x_3 を $x_3 - \xi_3$ で置換すれば作用素 $D_i^R[\]$ に対する式形(3.94), (3.95), (3.96)のいずれかが利用できる。その時の r は

$$r = [x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \xi_3)^2]^{1/2} \quad (3.120)$$

になる。直線上に並ぶ体積力、すなわち線荷重に対する解は式(3.119)の区間 $\xi_3 = -\infty$ から $\xi_3 = +\infty$ にわたった積分によって得られる。 $x_3 - \xi_3 = r$ と積分パラメータを ξ_3 から r に変えても積分区間は不変だからこの積分をとることによって変位の x_3 依存性がなくなる。そこで次元解を、作用素 $\Delta_i^R[\]$ を用いて

$$4\pi u_i(x_1, x_2, t) = \Delta_i^R[\mathbf{0}; g(t)] \quad (3.121)$$

と表わすことにする。ここに $\mathbf{0}$ は線荷重が $x_1=0, x_2=0$ に作用することを示し、また $\rho g(t)$ は負荷の大きさを示す。そうすると

$$\Delta_i^R[\mathbf{0}; g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} D_i^R[\xi_3 \mathbf{i}_3; g(t)] d\xi_3 \quad (3.122)$$

同様に対応する応力は

$$4\pi T_{ij}(x_1, x_2, t) = \Sigma_{ij}^R[\mathbf{0}; g(t)] \quad (3.123)$$

$$\Sigma_{ij}^R[\mathbf{0}; g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ij}^R[\xi_3 \mathbf{i}_3; g(t)] d\xi_3 \quad (3.124)$$

しかしながら、速度 c_2 と c_T で伝わる波は、それぞれ波源からの距離 $c_2 t = r$ と $c_T t = r$ までしか伝ばしないので \mathbf{x} で定まる位置に到達しているとは限らない。これは、式(3.122)と(3.124)の積分範囲が有限になることを意味しており、具体的に式の上で $r < 0$ の時 $g(r) = 0$ となることを考慮して検討できる。たとえば、式(3.94)によって与えられる $D_i^R[\]$ の形を用いて式(3.122)を書き出せば次のようになる。ただし r は式(3.120)である。

$$\begin{aligned} \Delta_i^R[\mathbf{0}; g(t)] = & \int_{x_3 - [c_2^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}}^{x_3 + [c_2^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}} d\xi_3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{r} \right\}_0^{t-r/c_2} S_i g\left(t - \frac{r}{c_2} - s\right) ds \\ & - \int_{x_3 - [c_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}}^{x_3 + [c_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}} d\xi_3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \frac{1}{r} \right\}_0^{t-r/c_T} S_i g\left(t - \frac{r}{c_T} - s\right) ds \\ & + \frac{\delta_{ik}}{c_T^2} \int_{x_3 - [c_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}}^{x_3 + [c_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}} d\xi_3 \left\{ \frac{1}{r} g\left(t - \frac{r}{c_T}\right) \right\} \end{aligned} \quad (3.125)$$

3. 10. 2 面外線荷重 (Antiplane line load) まず、式(3.125)において $i=3$ の場合を考えよう。

$i=1$ または 2 に対し、右辺の最初の $=$ の積分は 0 になる。たとえば右辺第一項は $x_3 - \xi_3 = r$ とおくと

$$- \int_{-(c_2^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}}^{(c_2^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2)^{1/2}} d\xi_3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}} \right\}_0^{t - \frac{1}{c_2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2}} S_i g\left(t - \frac{1}{c_2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \xi_3^2} - s\right) ds$$

になる。上式で $\{ \}$ でくくられた関数は r の偶関数になっているから、その r による微分をとれば奇関数である。 r による積分範囲は原点对称だから積分値は 0 になる。右辺第二項も同様な理由で 0 になる。そして、最後の項はクロネッカーのデルタのため 0 となる。従って以上から

$$\Delta_\alpha^R[\mathbf{0}; g(t)] = 0 \quad ; \quad \alpha = 1 \text{ or } 2 \quad (3.126)$$

$n=3$ で $i=3$ の場合の積分評価はやや複雑になるが、手際よく評価する一つの方法は、式(3.125)の右辺の第一積分と第二積分の中に含まれる微分操作 $\partial/\partial x_3$ を積分の外に出すことを考えることである。そのためには、次の公式を思い出すとよい。

$$\int_{A(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, \xi) d\xi = \frac{\partial}{\partial x} \int_{A(x)} f(x, \xi) d\xi - B(x)f(x, B(x)) + A'(x)f(x, A(x))$$

積分の上下界における値が 0 になるから $\partial/\partial x_3$ は ξ_3 の積分の外にそのまゝ出すことができ、第一積分を例に示せば

$$\int_{x_3 - [C_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}}^{x_3 + [C_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}} d\xi_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \xi_3)^2}} \int_0^{t - \frac{1}{C_T} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \xi_3)^2}} S g \left(t - \frac{1}{C_T} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \xi_3)^2} - s \right) ds \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_3} \int_{x_3 - [C_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}}^{x_3 + [C_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}} d\xi_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \xi_3)^2}} \int_0^{t - \frac{1}{C_T} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \xi_3)^2}} S g \left(t - \frac{1}{C_T} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \xi_3)^2} - s \right) ds \right\}$$

そして $x_3 - \xi_3$ について奇関数の対称区間積分だから 0 になる。よって $n=3$, $i=3$ の時、式(3.125)の最後の項のみが残り

$$\Delta_3^3 [0; g(t)] = \frac{2}{C_T^2} \int_{x_3}^{x_3 + [C_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2]^{1/2}} \frac{1}{r} g \left(t - \frac{r}{C_T} \right) d\xi_3 \quad (3.127)$$

ここに r は式(3.120)によって与えられる。式(3.127)は $x_3 - \xi_3 = \zeta$ とおくと

$$\Delta_3^3 [0; g(t)] = \frac{2}{C_T^2} \int_0^{-\sqrt{C_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \frac{1}{r} g \left(t - \frac{r}{C_T} \right) (-1) d\zeta = \frac{2}{C_T^2} \int_0^{\sqrt{C_T^2 t^2 - x_1^2 - x_2^2}} \frac{1}{r} g \left(t - \frac{r}{C_T} \right) d\zeta$$

さらに $t - \frac{r}{C_T} = \tau$ とおくと $\frac{1}{r} d\zeta = -\frac{C_T}{\tau} d\tau$, $\sqrt{C_T^2 (t - \tau)^2 - x_1^2 - x_2^2} = \zeta$ だから

$$\Delta_3^3 [0; g(t)] = \frac{2}{C_T^2} \int_0^{t - R/C_T} \frac{g(\tau) d\tau}{[(t - \tau)^2 - R^2/C_T^2]^{1/2}} \quad (3.128)$$

ここに $R^2 = x_1^2 + x_2^2$ (3.129)

式(3.128)は x_3 に独立になっている。これを式(3.121)に入れば u_3 は式(3.72)の α とく以前に導出した波動方程式の基本解に一致する。定係数の α が $f(t)$ と $g(t)$ の定義および対象とした問題の α による。式(3.124)ももちろん評価できるが変位解(3.128)を Hooke の法則式に直接入れて、容易に対応する応力を導くことができる。式(3.128)が x_3 に独立だから、応力は $\tau_{31}(x_1, x_2, t)$ と $\tau_{32}(x_1, x_2, t)$ のみになり

$$\tau_{3\alpha}(x_1, x_2, t) = \frac{\mu}{2\pi C_T^2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \int_0^{t - R/C_T} \frac{g(\tau) d\tau}{[(t - \tau)^2 - R^2/C_T^2]^{1/2}} \quad (3.130)$$

ここに R は(3.129)で与えられる。以上の結果より、 x_3 方向を向く体積力の集中線荷重は x_3 方向の変位成分のみ有するせん断波をひきおこすことがわかる。

3.10.3 面内線荷重 (Inplane line load)

$n=1$ 又は 2 の時を考える。 $n=\gamma$ として

$\gamma=1, 2$ とおく。式(3.125)の最初の 2 つの積分が $i=3$ に対して 0 になる。なぜなら x_3 に関して対称な区間にわたって、 $x_3 - \xi_3$ の奇関数の積分となっているからである。最後の項の積分もクロネッカーのデルタのための 0 となる。従って、

$$\Delta_3^\gamma [0; g(t)] = 0 \quad (3.131)$$

また、 $i=1$ 又は 2 の時は、式(3.127)の誘導手順を参考にして式(3.125)の評価ができる。すなわち、積分の上下限における被積分関数値が 0 になることから、積分符号の前に $\partial/\partial x_\gamma$, $\partial/\partial x_\alpha$ の演算を出すことができる。さらに ξ_3 の積分パラメータを第一積分に対しては $\tau = t - r/C_T$ で、また第二積分に対しては $\tau = t - r/C_T$ によって変換すれば結局、

$$\Delta_\alpha^\gamma [0; g(t)] = 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \int_0^{t - R/C_T} \frac{d\tau}{[(t - \tau)^2 - R^2/C_T^2]^{1/2}} \int_0^\tau S \cdot g(\tau - s) ds$$

$$- 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\gamma} \int_0^{t - R/C_T} \frac{d\tau}{[(t - \tau)^2 - R^2/C_T^2]^{1/2}} \int_0^\tau S \cdot g(\tau - s) ds$$

$$+ \frac{2 \partial_\alpha \gamma}{C_T^2} \int_0^{t - R/C_T} \frac{g(\tau) d\tau}{[(t - \tau)^2 - R^2/C_T^2]^{1/2}} \quad (3.132)$$

を得る。ただし r は式(3.120)で定義されたものであり、また $R = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ である。式(3.132)に対応する応力は $4\pi \Delta_\alpha^\gamma [0; g(t)]$ を応力変位関係式に代入して得られる。式(3.131)は x_3 を含まないから、 x_1 と x_2 方向の集中線荷重は、その面内のみの運動になる。

3.10.4 積分表示

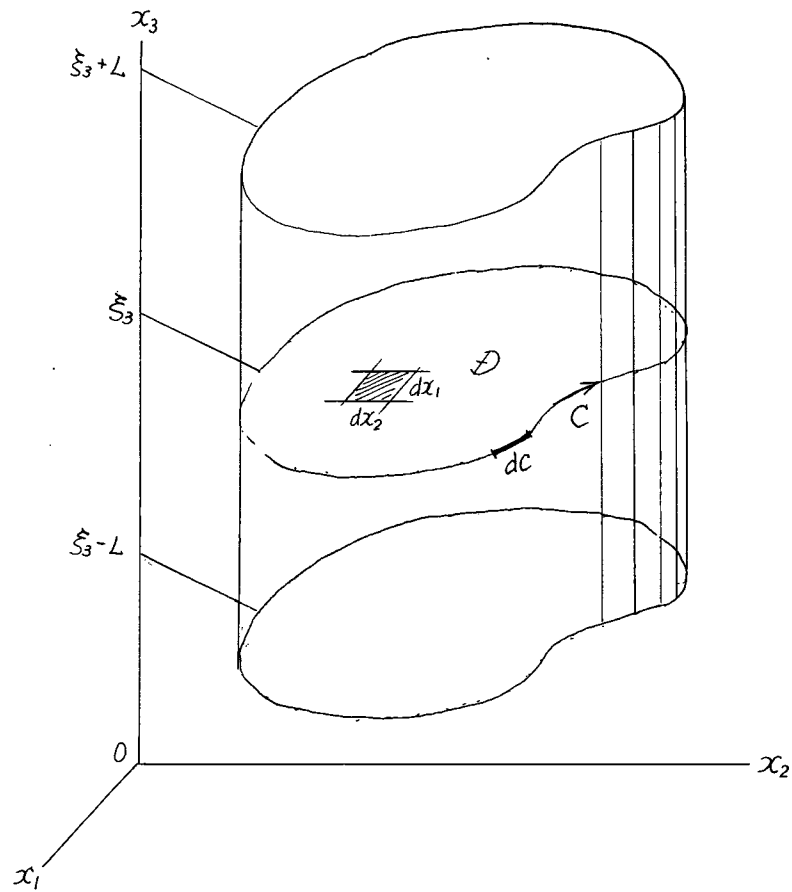
3.9 節に示した変位場に対する三次元積分恒等式(3.105)、すなわち

$$4\pi\rho u_k(\xi, t) = \sum_{i=1}^3 \int_{S_i} \left\{ D_i^k[\xi; t_i(\mathbf{x}, t)] - \gamma_i S_{ij}^k[\xi; u_i(\mathbf{x}, t)] \right\} dA$$

$$+ \rho \sum_{i=1}^3 \int_V D_i^k[\xi; f_i(\mathbf{x}, t)] dV$$

より、二次元積分表示を導く。

いま $x_3 = \xi_3$ の面上に単一閉曲線 C を考える。次に閉曲線 C を通り x_3 軸に平行な直線群を母線群とする柱状体を考え、これを $x_3 = \xi_3 + L$ と $x_3 = \xi_3 - L$ ($L > 0$) の平面で切断してできる立体を考える。(次頁の図参照)。式(3.105)の面積分をこの立体の表面にわたるものとし、また体積積分をこの立体内での体積積分と考えると式(3.105)は次のように書ける。



$$\begin{aligned}
 4\pi\rho u_{\alpha}(\xi; t) = & \sum_{i=1}^3 \int_C dc \int_{S_3-L}^{S_3+L} dx_3 \left\{ D_i^{\alpha}[\xi; t_i(\mathbf{x}, t)] - n_j S_{ij}^{\alpha}[\xi; u_i(\mathbf{x}, t)] \right\} \\
 & + \sum_{i=1}^3 \int_D dx_1 dx_2 \left\{ D_i^{\alpha}[\xi; t_i(\mathbf{x}^+, t)] - n_j S_{ij}^{\alpha}[\xi; u_i(\mathbf{x}^+, t)] \right\} \\
 & + \sum_{i=1}^3 \int_D dx_1 dx_2 \left\{ D_i^{\alpha}[\xi; t_i(\mathbf{x}^-, t)] - n_j S_{ij}^{\alpha}[\xi; u_i(\mathbf{x}^-, t)] \right\} \\
 & + \rho \sum_{i=1}^3 \int_D dx_1 dx_2 \int_{S_3-L}^{S_3+L} dx_3 \left\{ D_i^{\alpha}[\xi; f_i(\mathbf{x}, t)] \right\}
 \end{aligned}$$

こゝに dc は円曲線の線素であり、 D はその円曲線内の面積分を示す。また \mathbf{x}^+ と \mathbf{x}^- は $x_3 = S_3 + L$ と $x_3 = S_3 - L$ における平面上の位置ベクトルである。さて、 $L \rightarrow \infty$ を考えると $D_i^{\alpha}[\]$, $S_{ij}^{\alpha}[\]$ の定義より、右辺第2項と第3項は無限遠における応力ベクトルと変位による効果を与えるものなので 0 である。また、式(3.122)と式(3.124)で定義される作用素を用いて書きかえれば上式は

$$\begin{aligned}
 4\pi\rho u_{\alpha}(\xi_1, \xi_2, t) = & \sum_{i=1}^3 \int_C \left\{ \Delta_i^{\alpha}[\xi; t_i(\mathbf{x}, t)] - n_j \Sigma_{ij}^{\alpha}[\xi; u_i(\mathbf{x}, t)] \right\} dc \\
 & + \rho \sum_{i=1}^3 \int_D \Delta_i^{\alpha}[\xi; f_i(\mathbf{x}, t)] dx_1 dx_2
 \end{aligned} \tag{3.133}$$

となる。上式(3.133)における作用素 $\Delta_i^{\alpha}[\xi; t_i(\mathbf{x}, t)]$ は式(3.125)で x_1 を $x_1 - \xi_1$ 、 x_2 を $x_2 - \xi_2$ に置き換えればそのまま利用できる。具体的には

$$R = [(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2]^{1/2} \tag{3.134}$$

として R を再定義すれば $\Delta_{\alpha}^3[\xi; g(t)]$, $\Delta_{\beta}^3[\xi; g(t)]$, $\Delta_{\gamma}^3[\xi; g(t)]$, $\Delta_{\alpha}^{\gamma}[\xi; g(t)]$ のそれぞれは式(3.126)(3.128)(3.131)(3.132)によって与えられる。式(3.133)におけるもう一つの作用素 $\Sigma_{ij}^{\alpha}[\]$ は変位を Hooke の法則に代入すれば容易に得られる。

$\alpha = 3$ のときの積分恒等式(3.133)は次のように簡単化される。

$$\begin{aligned}
 4\pi\rho u_3(\xi_1, \xi_2, t) = & \int_C \left\{ \Delta_3^3[\xi; t_3(\mathbf{x}, t)] - n_{\alpha} \Sigma_{3\alpha}^3[\xi; u_3(\mathbf{x}, t)] \right\} dc \\
 & + \rho \int_D \Delta_3^3[\xi; f_3(\mathbf{x}, t)] dx_1 dx_2 \quad (\text{面外変形})
 \end{aligned} \tag{3.135}$$

$\alpha = 1$ 又は 2 の時も簡単化され

$$\begin{aligned}
 4\pi\rho u_{\gamma}(\xi_1, \xi_2, t) = & \sum_{\alpha=1}^2 \int_C \left\{ \Delta_{\alpha}^{\gamma}[\xi; t_{\alpha}(\mathbf{x}, t)] - n_{\beta} \Sigma_{\alpha\beta}^{\gamma}[\xi; u_{\alpha}(\mathbf{x}, t)] \right\} dc \\
 & + \rho \sum_{\alpha=1}^2 \int_D \Delta_{\alpha}^{\gamma}[\xi; f_{\alpha}(\mathbf{x}, t)] dx_1 dx_2 \quad (\text{面内変形})
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

式(3.135)は二次元波動方程式の Volterra の解である。

3.11 境界値問題

かなり一般的に動弾性の境界値問題を 2.5 節で表式化した。ここでは次のような境界 S 上の条件を考えた。

$$u_i = U_i(x_j, t) \quad (S, \text{上}) \quad (3.137)$$

$$T_{ji} n_j = t_i(x_j, t) \quad (S-S, \text{上}) \quad (3.138)$$

もし、 $S_1 = S$ ならば境界 S の全域で変位が指定され、 $S_1 = 0$ ならば境界条件は応力ベクトルのみ指定される。式(3.137)と(3.138)の形で、それぞれ変位と応力が境界上で与えられる場合は混合境界値問題になる。半無限体や円柱など非常に単純な形の弾性体を除けば、動弾性境界値問題の解を得ることはどちらかと言えば難しい。

さて、静止している弾性体が急激に体積力を受ける時の応答を考えよう。その時、生ずる変位を、3.6 節と 3.7 節の手法に従って体積力分布 $f_i(x_j, t)$ とグリーン関数からつくられる積分の形に概念的に表現することができた。そのグリーン関数は、それ自身の有する特異性の存在する波源点を除き、齊次方程式の解になっている。さらにもし、その弾性体境界面が全域にわたって剛固定されているならば、そのグリーン関数は S 上で 0 にならなければならない。この場合のグリーン関数は、剛固定された弾性体のインパルス点荷重に対する応答を定める。しかしながら半空間のように単純な領域に対してさえ動弾性グリーン関数を求めることは、一般にやや複雑である。特別の場合に限って、無限域のグリーン関数から簡単な手法でその関数を組み立てることが可能である。その特例を以下に述べる。

グリーン関数の取扱いの容易な例としては、面外剪断 (antiplane shear) 運動があげられる。これらの運動は、2.7 節で述べたように単一の波動方程式 (2.55)、すなわち

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + f_3 = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (3.139)$$

によって支配される。表面に応力の作用しない半無限体を考えるならば $u_3(x_1, x_2, t)$ は

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \quad (x_2 = 0 \text{ で}) \quad (3.140)$$

の境界条件を満足しなければならない。この問題解析に適するグリーン関数を求めるには、まず無限体を想定し $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$ の位置に時刻 $t = S$ で作用する面外インパルス線荷重を考える。さらにその波源

とは $x_2 = 0$ の面に対して対称な位置 (鏡像位置)

$x_1 = \xi_1$, $x_2 = -\xi_2$ にも時刻 $t = S$ でインパルス線荷重をかけてみる。そして、それぞれの荷重によって生ずる変位場の和をとれば $x_2 = 0$ に関する変位場の対称性からその和の x_2 による導関数は $x_2 = 0$ で 0 になる。従ってこの二つの変位場の和は、波源点における条件も乱さず式(3.139)と(3.140)を満足しているので半無限体の解になっている。すなわち無限体における二つのグリーン関数より半無限体に対するグリーン関数が得られた。

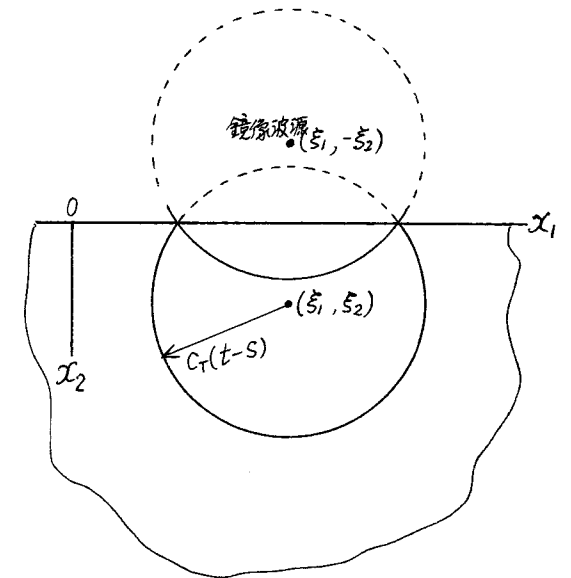


図 3.2 半無限体に面外線荷重

現象的な説明をすれば $x_2 > 0$ の領域におけるある点で最初に観測される波は波源から直接に到来する波頭であり、遅れて鏡像波源からの波頭が到来する。この遅れてやって来る波は境界平面 $x_2 = 0$ による反射波として説明される。これらの波頭を図 3.2 に示す。

実波源の自由境界面に関する鏡像を作る考え方は二つの平面によって境界づけられた帯領域の問題に対するグリーン関数を導くためにも利用できる。境界条件として $x_2 = 0$ と $x_2 = h$ で $\partial u_3 / \partial x_2 = 0$ を与える。半無限体の解析からわかるように、この自由面となる条件を満たすためには変位場が $x_2 = 0$ と $x_2 = h$ の面について対称にならなければならない。そこで $x_2 = 0$ と $x_2 = h$ に関する実波源の鏡像を作る。しかし $x_2 = h$ に関する鏡像が実波源と $x_2 = 0$ の鏡像から作られる変位場の $x_2 = 0$ に関する対称性を乱すので $x_2 < 0$ の領域にももう一つの波源を考えなければならない。この様に $x_2 = 0$ と $x_2 = h$ に対する対称性を確保するために $x_2 < 0$ と $x_2 > h$ の領域に波源を

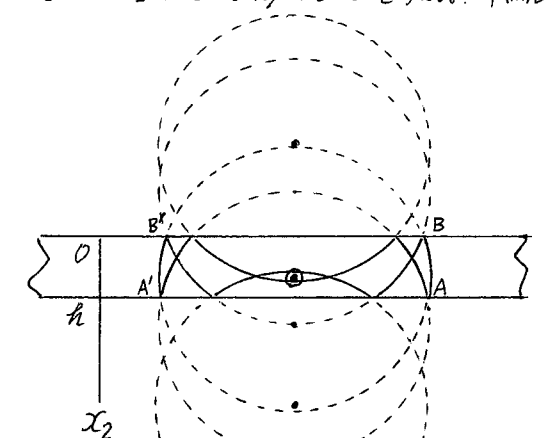


図 3.3 層内の面外荷重による波形パターン

作って行くことができる。結局、 $x_2=0$ と $x_2=l$ で $\partial u_3/\partial x_2=0$ の条件を満足するためには無限個の波源点列が必要になる。これらの波源は、 $x_2=0$ と $x_2=l$ に平行におかれた鏡によって像が像を作るように無限に並ぶ。従って、弾性層に対するグリーン関数は、無限体の鏡像の位置に無限個ならば波源によって与えられる。無限体のグリーン関数の和になる。 $0 \leq x_2 < l$ の領域には、それぞれの波源からのいくつかの波が存在し、それらは実波源からの直接波と二つの面によってひきつづき反射した波であると説明される。波源と波のパターンを図3.3に示す。弧ABとA'B'は擾乱域と乱れのない領域を分ける波頭である。

変位ポテンシャルを用いれば動弾性問題も互いに連成しない古典波動方程式に支配される問題に帰着できるが、それらのポテンシャルは少なくとも式(3.137)(3.138)によって示されるある意味のある境界条件によって一般に連成するようになる。^[註]したがって無限領域に対するグリーン関数のみによって有限領域に対するグリーン関数を組み立てるための鏡像法を用いることは一般にできない。これは図3.4に示すように半空間の内部に点荷重が作用する問題を考えることによって例証できる。円柱座標で $r=0$ の境界条件は

$$\tau_z = \tau_{zr} = \tau_{z\theta} = 0$$

と与えられる回転対称問題である。さて、鏡像法を調べるために図3.5に示すような無限体に対称に置かれた点荷重を考える。この場合、式(2.146)(2.148)(2.149)を参照すれば $r=0$ に関して対称だから $r=0$ で $\tau_{zr}=0$ になる。また回転対称性より $\tau_{z\theta}=0$ になる。しかしながら、より重要な条件である $\tau_z=0$ は満たされていない。よって鏡像法は境界条件によって変位ポテンシャルの連成が生じる場合は不適である。

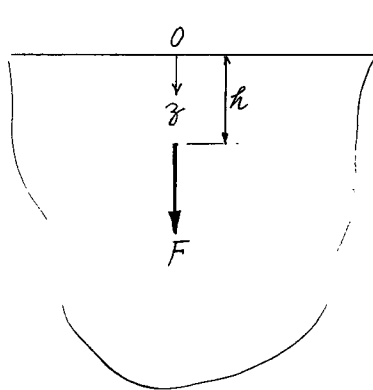


図3.4 内部に点荷重を受ける半空間

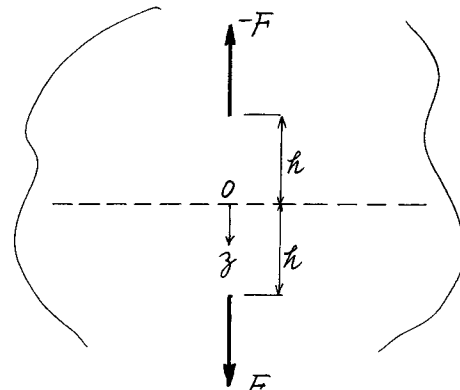


図3.5 対称におかれた点荷重

[註] 特別な条件をつけた時、非連成にできる。

表面荷重によって生ずる波動も簡単ではなく特別な取扱いが必要である。この場合は集中荷重点を除いて応力の0となる境界条件を考慮して導かれた解をグリーン関数として用いる。この関数は支配方程式を満足し、境界の作用点で特異性を示す。たとえば物体が表面に垂直な力の分布を受けているならば、表面上の垂直なインパルス点荷重による変位を表わすグリーン関数と境界条件として与えられる表面の荷重分布関数とが作られる積分によって任意点における変位が求められる。一般の動弾性問題に対してはこのようなグリーン関数の組立ても幾分複雑になるが、半空間と層に対するいくつかの例は後述する。

グリーン関数による解析は境界値問題を解く一つの方法であって、この他の手法もいくつか考えられる。動弾性境界値問題の解は、よく支配偏微分方程式系と初期境界条件に直接応用数学の手法を用いて求められている。それらの考え方や取扱いはいくつかの例とともに後述する。

3.12 定常の時間調和応答

3.12.1 時間調和波源 外乱が時間について調和変動する特別な場合を考えるために、3.6節と3.7節の放射の問題にたしかえる。例として式(3.50)の非斉次項が周期 $2\pi/\omega$ をもった時間調和とし無限体における放射の問題を考えると、支配する方程式は

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -F(\boldsymbol{x}) \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.141)$$

従って一般解は式(3.66)から

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_L} \frac{F(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c_l} |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| + \alpha\right) dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.142)$$

ここに $dV_{\boldsymbol{\xi}} = d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$ であり積分は \boldsymbol{x} を中心として半径 $c_l t$ の球 B_L にわたって行う。式(3.141)の非斉次項は、 $i = \sqrt{-1}$ と実部をとる記号 Re を用いれば

$$- \text{Re} F(\boldsymbol{x}) e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (3.143)$$

とも書ける。従って、式(3.142)は

$$\varphi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \text{Re} e^{i(\omega t + \alpha)} \int_{B_L} \frac{F(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} e^{-i(\omega/c_l) |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|} dV_{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.144)$$

式(3.144)は、指数関数項のみならず積分範囲も時間に依存している。式(3.144)は過渡応答の解析

のための式(3.50)(3.66)から出発した初期値問題の解である。そこで定常状態と考えられる時間の十分に経過した時を、その式から議論する。 t が十分大きければ積分域 B_L は非齊次項を定義する \mathcal{X} の領域にわたるだろう。その全領域は時間に独立であり V と記される。従って十分大きな t に対する解(3.144)は次のように書ける。

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \text{Re } e^{i(\omega t + \alpha)} \Phi(\mathbf{x}) \quad (3.145)$$

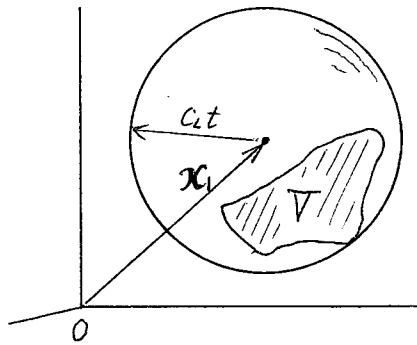
ここに

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{F(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} e^{-i(\omega/c_L)|\mathbf{x} - \xi|} dV_\xi \quad (3.146)$$

式(3.145)を本問題に対する定常解と呼んでいる。 $F(\mathbf{x}) = \delta|\mathbf{x} - \xi|$ の特別な場合に対し

$$\Phi(\mathbf{x}; \xi) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-i(\omega/c_L)|\mathbf{x} - \xi|}}{|\mathbf{x} - \xi|} \quad (3.147)$$

式(3.147)を式(3.145)に代入すれば明らかなように、時間経過とともに $|\mathbf{x} - \xi|$ の増加する方向に伝はする波を表わしている。 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ の位置でこの解が成り立つのは $t > |\mathbf{x}_1 - \xi|/c_L$ の時である。



三次元の場合、その定常解は $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ を中心とした球に波源の分布する領域(非齊次項の定義域) V がすべて包含される場合で、その球の半径の $c_L t$ よりも小さい時に、 \mathbf{x}_1 点で成り立つ。すなわち、最も観測点から離れた波源からの波が到来した時刻以後は、波の分散性のない無限空間では定常状態になる。

よく定常状態解析では最初から直接的に式(3.145)の解形を仮定し解析の最後まで記号 Re が付いていると想定して結果を誘導すると便利である。従って実部のみを考えるという理解のもとに

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \quad (3.148)$$

の形の定常解を考えることができる。ただしこの時 $\Phi(\mathbf{x})$ は位相角 α を含ませた複素関数であるとする。このような取扱いは加減算や積分微分などの線形演算のみ行なわれる(すなわち演算の前に実部をとるか、演算の後に実部をとるかどちらかが問題とならない演算)ならば可能である。式(3.148)によって記述される時間調和運動には進行調和波と定在波の二つのタイプがある。進行調和波は、

位相の空間的移動があり、ふつうは非常に大きな物体内の波動解析において興味がある。一方、定在波は節(node)と呼ばれる点の停留する(位相面の移行のない)状態が現われることによって特徴づけられ、ある有限の寸法をもった弾性体内に生ずる。もし物体の形が十分に単純であるならばたとえば1.6節のようにパラメータを介した複数の調和波の重ね合せによって組み立てることができる。

3.12.2 ヘルムホルツの方程式 式(3.148)の定常解を $\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -F(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$

に入れれば $\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = -F(\mathbf{x}) \quad (3.149)$

を得る。ここに次のような波数 k を導入した。

$$k = \omega/c_L \quad (3.150)$$

式(3.149)の特解は、式(3.146)で与えられる。式(3.149)の齊次形を波動方程式の空間形(space form)。あるいは、ヘルムホルツの方程式と呼ぶ。

3.12.3 ヘルムホルツの第1公式 (Helmholtz's first formula) 3.9節に述べた Kirchhoff の

公式を、時間調和の場合に対応する公式に書きかえられる。すなわち $\varphi = \Phi(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$, $f(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$ として代入すると

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) e^{i\omega t} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{F(\xi) e^{i\omega t} e^{-ik|\mathbf{x} - \xi|}}{|\mathbf{x} - \xi|} dV_\xi \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \left\{ e^{i\omega t} \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial n_\xi} \right\} - \Phi(\xi) e^{i\omega t} e^{-ik|\mathbf{x} - \xi|} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c_L} \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} i\omega \Phi(\xi) e^{i\omega t} e^{-ik|\mathbf{x} - \xi|} \frac{\partial |\mathbf{x} - \xi|}{\partial n_\xi} \right] dA_\xi \\ &= e^{i\omega t} \left[\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{F(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} e^{-ik|\mathbf{x} - \xi|} dV_\xi + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{-ik|\mathbf{x} - \xi|} \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial n_\xi}}{|\mathbf{x} - \xi|} - \Phi(\xi) e^{-ik|\mathbf{x} - \xi|} \frac{\partial}{\partial n_\xi} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ik \frac{e^{-ik|\mathbf{x} - \xi|}}{|\mathbf{x} - \xi|} \cdot \Phi(\xi) \frac{\partial |\mathbf{x} - \xi|}{\partial n_\xi} \right] dA_\xi \right] \end{aligned}$$

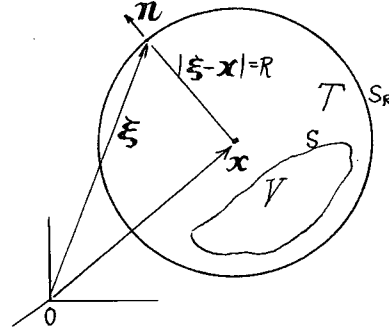
両辺を $e^{i\omega t}$ で割って整理すれば

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{F(\xi)}{|\mathbf{x} - \xi|} e^{-ik|\mathbf{x} - \xi|} dV_\xi + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{-ik|\mathbf{x} - \xi|} \frac{\partial \Phi(\xi)}{\partial n_\xi}}{|\mathbf{x} - \xi|} - \Phi(\xi) \frac{\partial}{\partial n_\xi} \left(\frac{e^{-ik|\mathbf{x} - \xi|}}{|\mathbf{x} - \xi|} \right) \right] dA_\xi \quad (3.151)$$

ここに位置ベクトル \mathbf{x} は表面 S で囲まれた領域 V の内部の点を定めるもの、また n_ξ は S に垂直で外向きである。導出された積分表示(3.151)はヘルムホルツの内部公式又は第一公式 (Helmholtz's interior [first] formula) である。

3. 12. 4 ヘルムホルツの第二公式 Helmholtz's second formula 領域 V の境界

S の外に位置ベクトル \boldsymbol{x} で定まる点を考えよう。その点が内側の閉面 S 外側の閉面 S_R によって境界づけられた領域 T 内にあるとすれば式(3.151)の面積分は $S+S_R$ にわたるものになる。 \boldsymbol{n} は積分領域 T について外向き垂直である。いま面 S_R を \boldsymbol{x} に中心をもち、十分大きな半径 R の球面にとる。そこで $R \rightarrow \infty$ とすれば



$$\frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \sim \frac{\partial}{\partial R} \quad \text{として} \quad |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|=R$$

従って

$$\frac{e^{-i k |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n_{\xi}} - \Phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \left(\frac{e^{-i k |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} \right) \sim \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} + i k \Phi \right) \frac{e^{-i k R}}{R} + \Phi \frac{e^{-i k R}}{R^2}$$

$$\text{さて} \quad |R \Phi| < M < \infty \quad (3.152)$$

$$\text{と、} R \rightarrow \infty \text{ に伴い一様に} \quad R \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} + i k \Phi \right) \rightarrow 0 \quad (3.153)$$

が成り立つと仮定しよう。これらは サマーフェルト ゾンマーフェルトの放射条件 (Sommerfeld radiation conditions) として知られている。 S の面積が R^2 のオーダーだから式(3.152)と式(3.153)より $R \rightarrow \infty$ とすれば

$$\int_{S_R} \Phi \frac{e^{-i k R}}{R^2} dA \rightarrow 0, \quad \int_{S_R} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial R} + i k \Phi \right) \frac{e^{-i k R}}{R} dA \rightarrow 0$$

したがって Φ が放射の条件を満足する時、 $\Phi(\boldsymbol{x})$ に対する積分表示は次式になる。

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_T \frac{F(\boldsymbol{\xi})}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} dV_{\xi} + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\frac{e^{-i k |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} \cdot \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\xi})}{\partial n_{\xi}} - \Phi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} \left(\frac{e^{-i k |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|} \right) \right] dA_{\xi}, \quad (3.154)$$

ここに T は S の外の全空間であり、 \boldsymbol{n} は閉面 S に垂直で内向きである。式(3.154)はヘルムホルツの第二公式で音波の介在物による散乱の解析によく用いられる。Sommerfeld の放射条件(3.152)(3.153)は、初期値問題の解が波源から外に向う波だけから成りたっているという現象論的事実にもとづいてと考えることができる。

3. 12. 5 二次元の定常解 二次元における $\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi})$ の解は

$$\Phi(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\xi}) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k r) \quad (3.155)$$

によって与えられる。ここに

$$r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}| = [(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2]^{1/2} \quad (3.156)$$

$H_0^{(2)}(k r)$ は第二種ハンケル関数である。この Bessel 関数の引数が大きくなる時の漸化式が

$$H_0^{(2)}(k r) \sim \left(\frac{2}{\pi k r} \right)^{1/2} e^{-i(k r - \frac{\pi}{4})}$$

であるから $\Phi(x_1, x_2, t) = \frac{i}{4} e^{i \omega t} H_0^{(2)}(k r)$ となり、 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\xi}$ の軸からの放射波を表わしている。

式(3.155)を用いて非斉次項 $F(\boldsymbol{x})$ をもつ二次元 Helmholtz 方程式の特解は

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{i}{4} \int_A F(\boldsymbol{\xi}) H_0^{(2)}(k r) dA_{\xi}$$

と得られる。^[註]ここに r は(3.156)によって与えられ A は $F(\boldsymbol{x})$ の定義される面積である。また、二次元の基本解を用いて対応する積分表示を導く。曲線 C によって囲まれた波源を含まない面積 A 内に存在する点で

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{i}{4} \int_C \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n_{\xi}} H_0^{(2)}(k r) - \Phi \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} H_0^{(2)}(k r) \right] dC_{\xi} \quad (3.157)$$

を見出す。^[註2]ここに \boldsymbol{n} は C に垂直外向きである。式(3.157)は Weber's interior formula として知られている。類似した外部領域に対する公式も導出できる。

3章 終り

[註2] 式(3.151)に対応する二次元解は

$$\Phi(\boldsymbol{x}) = \frac{i}{4} \int_A F(\boldsymbol{\xi}) H_0^{(2)}(k r) dA_{\xi} + \frac{i}{4} \int_C \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n_{\xi}} H_0^{(2)}(k r) - \Phi \frac{\partial}{\partial n_{\xi}} H_0^{(2)}(k r) \right] dC_{\xi}$$

[註] 式(3.147)と(3.146)の関係に対応させてみよ。

問題

[1] 体積力が位置と時間の関数として分布するとき、物質表示と空間表示の一次元運動方程式を導け。

[2] 伝ばする変位パルスが物質表示で

$$U(X, t) = F(t - \frac{X}{c})$$



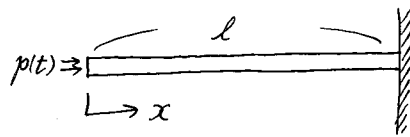
と与えられるとすれば、ある時刻 t における変位パルスは図のようになった。これより空間表示の変位パルス $u(x, t)$ はどのように決定されるか、幾何学的考察により求めてみよ。そして導波数 F' に關するある制限のあつことを確かめよ。その制限の物理的な解釈をせよ。

[3] $f(t-x/c)$ と $g(t+x/c)$ とは式(1.38)を満足することを直接代入して確かめよ。しかし、一般にはこれら二つの和 $f+g$ は式(1.38)の解にはならない。 $f+g$ が式(1.38)を満足する時は次の条件が成立しなければならぬことを示せ。

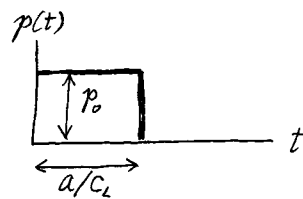
$$f''g'(1+g'/c) + g''f'(1+f'/c) = 0$$

自動的にこの関係を満たす変位分布はどのような $F(t-X/c)$ の時か。

[4] 図のように $x=l$ で剛固定された長さ l の弾性棒(縦弾性係数 E , 質量密度 ρ) が静止の状態でおかれている。そして $t=0$ で棒端 $x=0$ で圧力 $p(t)$ を受けた時線形一次近似が成り立つものとして

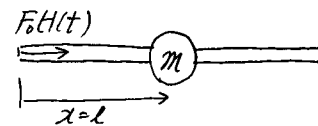


- (1) 一次応力波の $x=l$ での反射波を求めよ。
- (2) 位置 x における応力を級数形で表わせ。
- (3) $p(t)$ が図示するような方形パルスとする。ただし



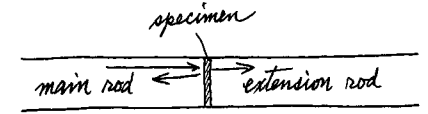
$a < l$ とする。この時、もし材料が脆性材で引張りに比べかなり弱く p_0 が棒の引張強度を超えているならば、どの位置でこの棒は破壊すると予想されるか。

[5] 断面 A の棒が集中荷重 $F_0 H(t)$ を受ける。ただし $H(t)$ をヒサイド関数とする。また棒には $x=l$ に質量 M がとりつけられている。線形理論で反射波と透過波を決定せよ。

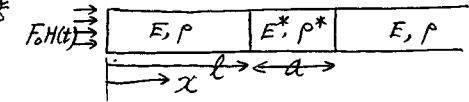


[6] 長さ l , 矩形断面 $b \times h$ の棒が滑らかな平面上に一つの側面と接して置かれてある。これの一端に $t=0$ で $F_0 H(t)$ の軸力が作用すると棒の運動はどのようになるか。界面の摩擦はなく、棒の質量密度を ρ とし、棒が完全剛体の時と縦弾性係数 E の弾性棒の時の運動状態を時間 $0 \leq t \leq 5l/c_2$ で調べ比較せよ。

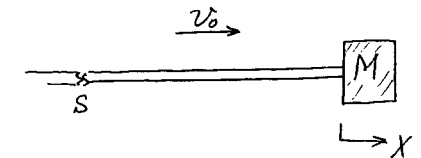
[7] 分割ホフキソン棒は図のように試料の機械的性質を測定する一つの手法で、main rod と extension rod 間に非常に薄く慣性の無視される試片をはさんで行なわれる。入射パルスと反射パルスの状態は main rod で、透過パルスの状態は extension rod で測定される。さて試片の E_2 と E_1 との関係はこれらよりどのようにして求められるか?



[8] 図のように断面 A の棒の区間 $l \leq x \leq l+a$ に異種材料が入っているとき $F_0 H(t)$ の衝撃荷重による波の $x > l+a$ の領域への透過波を求めよ。また本問の結果の極限として問[5]の結果になることを示せ。



[9] 棒端に質量 M の剛体がつりつた非常に長い断面 A の棒が右方向に一定速度 V_0 で無応力状態で動いている。 M から離れた断面 S が非常に短い時間かかって停止させられたとする。この時、



- (a) M 点に到着以前の時刻 t で S から棒に沿って行く物体点の速度波 $f'(t-x/c_2)$ の形を描け。ただし $c_2 = \sqrt{E/\rho}$ とする。
- (b) M に到達した時 $t=0$ に選び $t > 0$ の M の絶対速度が次式で与えられることを示せ。ただし $\mu = APC_2/M$

$$v_M(t) = V_0 + f'(t) + e^{-\mu t} \int_0^t e^{\mu \tau} [\mu f(\tau) - f''(\tau)] d\tau \quad ; \quad \mu = APC_2/M$$

[10] 前問で S を停止するに要する時間を 0 に極限すれば

- (a) $f'(t)$ と $g(t)$ の積分の形を調べ $v_M(t) = V_0(2e^{-\mu t} - 1)$ となることを示せ。
- (b) 波の M 点への到着後、 M の右方向への変位は $\Delta = \frac{V_0}{\mu}(1 - \ln 2)$ となることを示せ。
- (c) $M \rightarrow \infty$, $M \rightarrow 0$ とした時のそれぞれについて $v_M(t)$ の値はどうなるか、それはどうしてか。また 10(a) の式から得られる値は何か。

[11] 無限体に固定された座標原点に x_3 方向に作用する点荷重が $t=0$ で働き、その後 $v < C_L$ の一定速度 v で x_3 の正方向に動くとする。この時 $t \geq 0$ に対する運動方程式は

$$C_T^2 \nabla^2 \mathbf{u} + (C_L^2 - C_T^2) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \ddot{\mathbf{u}} = Q \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3 - vt) \mathbf{i}_3$$

となる。 Q は移動荷重の大きさを与える定数で初期条件は $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = 0$ とするとき、生ずる変位分布は動的相反恒等式により、巧みに求めることができる。そこで次を考えよ。

(a) 動的相反恒等式は $\int_V \mathbf{f} * \mathbf{u}' dV_S = \int_V \mathbf{f}' * \mathbf{u} dV_S$ となることを示せ。ただし

$$\mathbf{f}(\xi, s) = Q \delta(\xi_1) \delta(\xi_2) \delta(\xi_3 - vs) \mathbf{i}_3$$

(b) 適当に \mathbf{f}' と \mathbf{u}' の表式をえらんで x_1 方向の変位を求めよ。

[12] 二次元圧縮中心による変位成分 u_1 と u_2 を求めよ。

[13] 円柱座標 (r, θ, z) において z 軸方向に大きさ $\rho g(t)$ の点荷重によって生ずる半径方向変位は

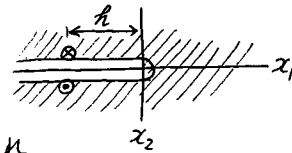
$$u_r = \frac{1}{4\pi} \frac{3\rho I}{R^3} \int_{R/C_T}^{R/C_L} s g(t-s) ds + \frac{1}{4\pi} \frac{\rho I}{R^3} \left[\frac{1}{C_L^2} g(t - \frac{R}{C_L}) - \frac{1}{C_T^2} g(t - \frac{R}{C_T}) \right]$$

になることを示せ。ただし $R^2 = r^2 + z^2$ である

[14] 図3.5に示した二つの等しい点荷重が反対向きに作用する場合、 $z=0$ 面上の u_r を前問の式を利用して求めよ。

[15] 座標 x_3 に無関係な面外負荷分布 $\mathbf{f}(x_1, x_2, t) = f_0 H(x_1) \delta(x_2) H(t) \mathbf{i}_3$ を受ける無限体に生ずる応力場 $\tau_{3i}(x_1, x_2, t)$ を式(3.130)を用いて求めよ。この時 $x_1=0, x_2=0$ 近辺の応力の特異性について説明せよ。

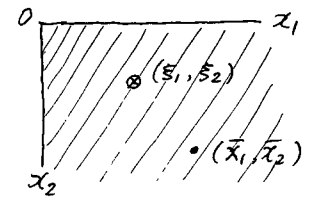
[16] 無限体内の半無限長クラック面 $(x_1 < 0)$ に、互いに等しく反対向きの線状面外負荷をかけた時、 $x_1 \geq 0$ の変位 u_3 がクラック面 ($x_2=0$) で 0 となることを確かめよ。媒体には体積力が作用せず、また $t \geq r/C_T$ として、 $x_1 \geq 0$ で常に $u_3(x_1, 0, t) \equiv 0$ なることから、クラック面上の変位 $u_3(x_1, 0, t)$ を求めるための積分方程式を作れ。



[17] 表面に応力ベクトルの作用しない四分一空間が

$$\mathbf{f} = f_0 \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \delta(t) \mathbf{i}_3$$

の内部集中体積力(集中線荷重)を受けているとき、 (\bar{x}_1, \bar{x}_2) における変位を時間の関数として求めよ。



[18] 3.12節の結果を用いて、時間調和点荷重を受ける無限体の変位の定常応答解を求めよ。

[19] 式(3.154)に類似した二次元の場合の方程式を導け。この時、必要とすべき放射条件はどのようにするか。

[20] 定常解として $\varphi(\mathbf{x}, t) = \Phi(\mathbf{x}) e^{-i\omega t}$ を仮定した時、式(3.155)~(3.157)はどうなるか。

第 4 章

無限体における弾性波

4.1 平面波

単位ベクトル \mathbf{p} によって定まる方向に位相速度 C で伝はる平面波は

$$\mathbf{u} = f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct) \mathbf{d} \quad \text{または} \quad u_i = f(x_k p_k - ct) d_i \quad (4.1)$$

によって与えられる。ただし \mathbf{x} , \mathbf{d} , \mathbf{p} はそれぞれ順に位置ベクトル, 物体点の運動方向を定める単位ベクトル, 波の伝は方向を定める単位ベクトルである。 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = \text{一定}$ は \mathbf{p} に垂直な平面を表わすので, 式(4.1)は平面位相面が \mathbf{p} に直交し, かつ速度 C で伝わる平面波を表わしている。式(2.19)と式(2.28)を用いて変位平面波(4.1)に対する応力を求める。

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}[p_j f'(x_k p_k - ct) d_i + p_i f'(x_k p_k - ct) d_j] \\ &= \frac{1}{2}(p_j d_i + p_i d_j) f'(x_k p_k - ct) \end{aligned}$$

$$E_{kk} = p_k d_k f'(x_k p_k - ct)$$

$$\text{したがって} \quad \tau_{ij} = [\lambda p_k d_k \delta_{ij} + \mu(p_i d_j + p_j d_i)] f'(x_k p_k - ct) \quad (4.2)$$

ここに総和規約を用いており, また \prime はその関数の引数による微分を示す。体積力のない場合, 均質等方な線形弾性体の変位は, 次の偏微分方程式系を満たすものでなければならない。

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (4.3)$$

ここに λ と μ は Lamé の定数であり ρ は密度である。またベクトル演算子 ∇ は

$$\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (4.4)$$

で定義される。いま, 平面波の式(4.1)を場を支配する方程式(4.3)に代入することを考える。

$$u_{i,jj} = p_j p_j f''(x_k p_k - ct) d_i = d_i f''(x_k p_k - ct) \quad \because p_j p_j = 1$$

$$\text{また} \quad u_{j,ji} = p_j p_i f''(x_k p_k - ct) d_j$$

$$\ddot{u}_i = C^2 f''(x_k p_k - ct) d_i$$

$$\text{従って} \quad \mu d_i f''(x_k p_k - ct) + (\lambda + \mu) p_j p_j d_j f''(x_k p_k - ct) = \rho C^2 d_i f''(x_k p_k - ct)$$

$$\text{すなわち} \quad (\mu - \rho C^2) \mathbf{d} + (\lambda + \mu) (\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}) \mathbf{p} = 0 \quad (4.5)$$

\mathbf{p} と \mathbf{d} は独立に導入した単位ベクトルであるから, 式(4.5)は次の二通りの場合に限って満足される。

$$\mathbf{d} = \pm \mathbf{p} \quad \text{または} \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = 0$$

もし, $\mathbf{d} = \pm \mathbf{p}$ ならば $\mathbf{d} \cdot \mathbf{p} = \pm 1$ で式(4.5)より

$$C = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2} \equiv C_L \quad (4.6)$$

を得る。この場合, 物体点の運動方向と波の伝は方向が平行になるので縦波と呼ばれている。また, 変位 \mathbf{u} の回転成分 $\nabla \wedge \mathbf{u}$ は $\epsilon_{klm} u_{m,l} = \epsilon_{klm} p_k d_m f'(x_k p_k - ct) = \pm \epsilon_{klm} p_k p_m f'(x_k p_k - ct) = 0$ となる。すなわち

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \mathbf{p} \wedge \mathbf{d} f'(x \cdot \mathbf{p} - ct) = 0$$

このように回転成分が消えるので, $\mathbf{d} = \pm \mathbf{p}$ となる波を非回転波 (irrotational wave) とおいう。また, この波を膨張波, 圧力波, P 波 (primary wave) といっている。

もし, $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = 0$ ならば式(4.5)の左辺の二つの項はそれぞれともに 0 にならないといけないので $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = 0$ であらう

$$C = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} \quad (4.7)$$

運動方向 \mathbf{d} と伝は方向 \mathbf{p} が直交しているので横波 (transverse wave) と呼ばれる。また変位ベクトルの発散 $u_{i,i}$ は $p_i d_i = 0$ より 0 になるので等容積波 (equivoluminal wave) とおいう。あるいは回転波 (rotational wave), 剪断波 (shear wave), S -波 (secondary wave) と呼ぶ。この波は, 伝は方向に直交する任意方向の変位をとらうが, \mathbf{p} が面 (x_1, x_2) に含まれるように座標系をとれば, 物体点の運動を x_1, x_2 面内に含まれる成分と x_1, x_2 面にも直交する面外成分とに分けて考えることができる。地震波などの解析上, 慣習として x_2 座標を深さ方向に選ぶので, 面内の運動をする時, 鉛直に偏った横波 (S - V 波) と呼ぶ。面外の運動をする時, 水平に偏った横波 (SH 波) と呼ぶ。

式(4.6)(4.7)より, ν をポアソン比として

$$C_L/C_T = \kappa = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right)^{1/2} = \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \right]^{1/2} \quad (4.8)$$

$0 < \nu < 0.5$ であるから $C_L > C_T$ になる。

金属に対する縦波と横波の位相速度は

一般に表4.1に示すごとく非常に速い。

表4.1 位相速度の概略値

材料	ρ (kg/cm ³)	C_L (m/s)	C_T (m/s)	κ
空気	1.2	340		
水	1000	1480		
鋼	7800	5900	3200	1.845
銅	8900	4600	2300	2
アルミ=74	2700	6300	3100	2.03
ガラス	2500	5800	3400	1.707
ゴム	930	1040	27	38.5

4.2 時間調和平面波

第1章で述べたように線形弾性体の弾性波による応答は、その線形性から周期性を有する応答については Fourier 級数によって、周期性のない過渡応答については Fourier 積分によって解析することが出来る。すなわち調和波の重ね合せに帰着できる。したがって調和波の性質およびその成分に対する解析が重要になる。

さて、位相速度 C で単位ベクトル \boldsymbol{p} によって定まる方向に伝ばする平面調和波は

$$\boldsymbol{u} = A \boldsymbol{d} \exp[i\ell(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p} - ct)] \quad ; \quad \ell \equiv \sqrt{\tau} \quad (4.9)$$

によって表わされる。実際の変位成分は右辺の実部あるいは虚部のみをとって解析する。振幅 A は実数か虚数かいずれでもよいが \boldsymbol{x} や t に依存しないものとする。また波数 ℓ は角周波数と $\omega = \ell C$ の関係を有するので周期 T と波長 λ とは $\ell = 2\pi/TC$, $\ell = 2\pi/\lambda$ になる。

式(4.9)は、式(4.1)の特別な場合にあたるので、前節の結果を利用することができ、無限体における平面調和波は位相速度 $C = C_L$ と C_T の縦波と横波の二つを考えればよい。 C_L と C_T は波数 ℓ によらない定数であるからこれら二つの波は分散性を示さない。

4.2.1 不均一平面波 (Inhomogeneous plane waves) 平面調和波の式(4.9)において

時間 t と空間座標 x_i は実数である。また、単一の調和振動に対し ω も実数であり、伝ばの方向 \boldsymbol{p} と波数 ℓ もふつうは実数として与えられる。しかしながら新しい事実を見つけるために数式上のある量を複素数に拡張し、その解析結果の物理現象説明が可能ならば意味のあるものとなる。ここでは興味ある一般化として単位ベクトル \boldsymbol{p} を複素数値にとってみる。すなわち

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + i\boldsymbol{p}'' \quad ; \quad \boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}'' \in \text{Re} \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{p} \text{ は単位ベクトルであるから } \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} = 1 \quad (4.11)$$

$$\text{すなわち、} \quad \boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}'' \cdot \boldsymbol{p}'' = 1 \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{p}'' = 0 \quad (4.13)$$

式(4.10)を式(4.9)に入れると

$$\boldsymbol{u} = A \boldsymbol{d} \exp[-\ell(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}'')] \exp[i\ell(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}' - ct)] \quad (4.14)$$

式(4.14)はベクトル \boldsymbol{p}' によって定まる方向に伝ばし、ベクトル \boldsymbol{p}'' に依存して変化する振幅の波を表わしている。ある時刻 t における一定振幅面と一定位相面はそれぞれ

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}'' = C_1 \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{p}' = C_2 \quad (4.16)$$

によって表わされる。 C_1 と C_2 は定数である。それぞれの一定面の法ベクトルが \boldsymbol{p}'' , \boldsymbol{p}' になるが式(4.13)からわかるようにこの二つの平面は直交している。以上より、 \boldsymbol{p} を複素数とすれば位相面の移動方向(伝ば方向)の線に沿っては振幅が一定となるが、それと直交する平面内では指数関数的に振幅の増減する波が説明できる。単位ベクトル \boldsymbol{p} が複素数値である時に現われるこのような平面波を不均一平面波と呼ぶ。^[註]

ベクトル \boldsymbol{p} が複素数であっても平面波の一般形は式(4.1)であり、式(4.5)の形もそのまま成り立ち

$$(\mu - \rho C^2) \boldsymbol{d} + (\lambda + \mu)(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{d}) \boldsymbol{p} = 0 \quad (4.17)$$

となるが単位ベクトル \boldsymbol{d} を複素数に考える。実数ベクトルの場合と同様に、式(4.17)はただ2つの場合に限って満足される。すなわち $\boldsymbol{d} = \pm \boldsymbol{p}$ もしくは $\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{p} = 0$ である。そしてそれぞれの場合に対し位相速度 $C = C_L$ と C_T を得る。

ここで、平面調和波の表式を次のように書きかえると便利である。

$$\boldsymbol{u} = A \boldsymbol{d} \exp[i\omega(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{g} - t)] \quad (4.18)$$

上式で \boldsymbol{g} は $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{p}/C$ によって定義されるスローネス・ベクトルである。遅度ベクトルとも呼ぶ。式(4.11)から $g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 = g^2$ になる。 g の値は縦波に対して $1/C_L$, 横波に対して $1/C_T$ とする。いま座標系を $g_3 = 0$ となるように選べば $g_3 = 0$ であるから、与えられた実数 g , g_1 に対して^[註2] g_2 は実数あるいは虚数になりうる。すなわち

$$g_2 = (g^2 - g_1^2)^{1/2} \quad (4.19)$$

$$\text{または} \quad g_2 = i(g_1^2 - g^2)^{1/2} = i\beta \quad (4.20)$$

それぞれに対応する平面波の式は

$$\boldsymbol{u} = A \boldsymbol{d} \exp[i\omega(x_1 g_1 + x_2 g_2 - t)] \quad (4.21)$$

[註2] 実数位相速度 ($1/g$) が与えられた時、 $g^2 = g_1^2 + g_2^2 + g_3^2$ より、少なくとも g_1, g_2, g_3 のいずれかは実数であるので g_2 を代表させた。
[註] 無限体中の波に限定しなければこのような平面波の例として Rayleigh 波があげられる。

そして $u = A d \exp(-\omega x_2 \beta) \exp[i\omega(x_1 \rho_1 - t)]$ (4.22)

式(4.19)のように ρ_2 が実数の時は、式(4.21)からわかるように振幅は全空間で一定であり、スローネスベクトル ρ の方向に位相速度 $1/\rho$ で伝ばする。式(4.20)のように ρ_2 が虚数となる時は式(4.22)から、 x_1 方向に速度 $1/\rho_1$ で伝ばする調和波となるが振幅は x_2 とともに指数関数的に変化する不均一平面波となっている。

4.2.2. スローネス線図 式(4.19)と(4.20)はそれぞれ円と2本の双曲線によって表わすことができ図4.1のようになる。この線図をスローネス線図という。 $\rho_1 < \rho_2$ の時、 ρ_2 の値は半径 ρ_2 の円弧上に対応し、 $\rho_1 < \rho_2$ の時 β の値は双曲線上に対応する。いま $\rho_1 = \rho \sin \theta$, $\rho_2 = \rho \cos \theta$ として新しい角度変数 θ を導入すれば $\rho_1 = \rho \sin \theta$, $\rho_2 = \rho \cos \theta$ となる。 $\rho_1 < \rho_2$ の時 θ は実数であり、 $\rho_1 > \rho_2$ の時は $\theta = \frac{\pi}{2} - i\gamma$ とおきかえることにより $\rho_1 = \rho \cosh \gamma$, $\rho_2 = \rho \sinh \gamma$ と書ける。^[註] スローネス線図は、後で5章3節に見られるように、波の反射、屈折を説明する上で大変役に立つものとなる。

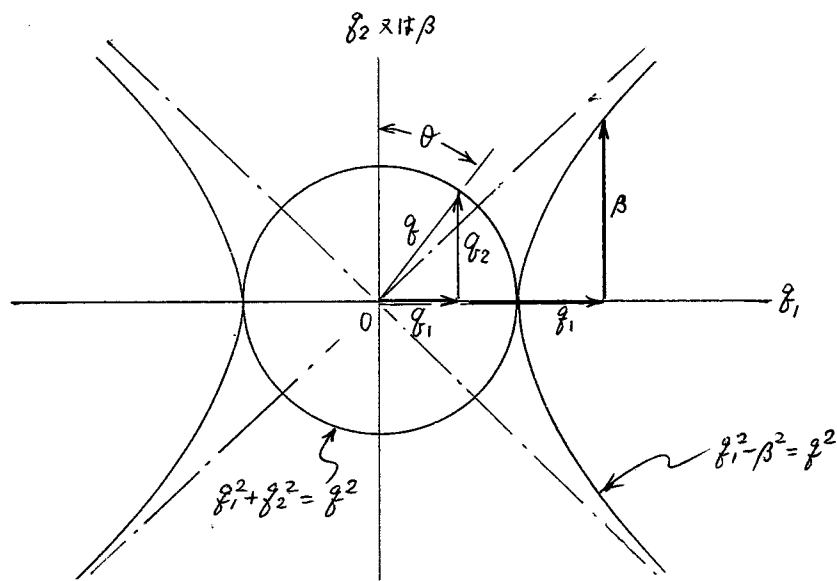


図4.1. スローネス線図

[註] $\sin ix = i \sinh x$, $\cos ix = \cosh x$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ

4.3 点対称波動

4.3.1 支配方程式 点対称の波動場を考えるには、極座標 (r, θ, z) において r のみに空間依存することに注意すればよい。また変位成分は半径方向の $u(r, t)$ のみとなる。応力は式(2.164)~(2.169)より

$$\tau_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r} \tag{4.23}$$

$$\tau_\theta = \tau_z = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r} \tag{4.24}$$

その他の剪断応力はすべて0になる。変位ポテンシャルを式(2.150)に代らて導入すれば

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{4.25}$$

このとき式(2.153)(2.154)よりポテンシャル ϕ は次式を満たす。

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

これを変形すれば $\frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (r\phi)}{\partial t^2}$ (4.26)

式(4.27)は $r\phi$ に関する一次元波動方程式となっている。そこで ϕ がある条件のもとで決定されれば応力が求まるように式(4.23)(4.24)を ϕ の表示に書きかえれば

$$\tau_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{4.27}$$

$$\tau_\theta = \tau_z = \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2(\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \tag{4.28}$$

なお、式(4.26)の一般解は $\phi(r, t) = \frac{1}{2} f(t - \frac{r}{c_2}) + \frac{1}{2} g(t + \frac{r}{c_2})$ で与えられる。明らかに右辺の二つの項は $r=0$ から外に広がって行く波に $r=0$ に集まって来る波を示している。

4.3.2 内圧を受ける球空洞(球筒) 無限弾性体内にある球空洞内に衝撃的圧力上昇

が起った時、球周囲の波動場を考えてみよう。圧力は一様に内壁に作用し、弾性体も等方均質であるとすれば点対称性を示すから式(4.25)~(4.28)がそのまま利用できる。従ってこの問題は次の境界条件と初期条件を満足する式(4.26)の解を求めることに帰着される。

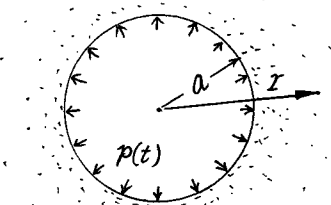


図4.2 内圧を受ける球空洞

$$r = a, \quad t \geq 0 \quad \bar{r}_r = -p(t) \quad (4.29)$$

$$r \geq a, \quad t < 0 \quad u(r, t) = \dot{u}(r, t) \equiv 0 \quad (4.30)$$

式(4.30)は弾性体が初期静止の状態であることを示す。式(4.26)の解のうち外何液となるもののみ採用してよからポテンシャル φ は

$$\varphi(r, t) = \frac{1}{r} f(s) \quad (4.31)$$

と置くことができる。ただし引数を $t - \frac{r-a}{c_r}$ とするかわりに

$$s = t - \frac{r-a}{c_r} \quad (4.32)$$

なる変数 s を導入した。この形をとった根拠は圧力の加わる内壁で $t=0$ の時引数が 0 になるようにしている。そのため $s < 0$ の時、恒等的に $f(s) = 0$ になる。関数 $f(s)$ の具体的な形は、式(4.29)(4.30)を考慮して定められる。さて $f(s)$ によって変位と応力を表示すれば

$$u(r, t) = -\frac{f'}{c_r r} - \frac{f}{r^2} \quad (4.33)$$

$$\bar{r}_r(r, t) = \frac{\rho c_r^2}{1-\nu} \left\{ \frac{(1-\nu)f''}{c_r^2 r^2} + 2(1-2\nu) \left(\frac{f'}{c_r r^2} + \frac{f}{r^3} \right) \right\} \quad (4.34)$$

$$\bar{r}_\theta(r, t) = \frac{\rho c_r^2}{1-\nu} \left\{ \frac{\nu f''}{c_r^2 r^2} - (1-2\nu) \left(\frac{f'}{c_r r^2} + \frac{f}{r^3} \right) \right\} \quad (4.35)$$

これらの式は式(4.25)(4.27)(4.28)より式(4.31)の代入によって得られる。その際、

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{f'}{c_r r} - \frac{f}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{f''}{c_r^2 r^2} + \frac{2f'}{c_r r^2} + \frac{2f}{r^3}$$

および $\lambda + 2\mu = \rho c_r^2$, $\lambda = \rho(c_r^2 - 2c_t^2)$, $c_r^2/c_t^2 = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$ となることを考慮した。次に具体的に $f(s)$ の関数形を決めなければならない。液頭において変位が連続でなければならないことから、初期条件として式(4.30)より $f(s)$ は

$$f(0) = f'(0) \equiv 0 \quad (4.36)$$

となる。 $r = a$ では $f(s)$ の引数は $s = t$ になる。残りの条件式(4.29)と半径方向応力式(4.34)より $f(s)$ に対する次の様な常微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 f}{ds^2} + 2\alpha \frac{df}{ds} + (\alpha^2 + \beta^2)f = -\frac{a}{\rho} p(s) \quad (4.37)$$

$$\alpha = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{c_r}{a}, \quad \beta^2 = \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \frac{c_r^2}{a^2}$$

$$\text{いま,} \quad f(s) = g(s) \cdot \exp(-\alpha s) \quad (4.38)$$

と置いて式(4.37)に代入すると、1次導関数の項が消えて次のようになる。

$$\frac{d^2 g}{ds^2} + \beta^2 g = -\frac{a}{\rho} p(s) \cdot \exp(\alpha s) \quad (4.39)$$

初期静止の条件を満足する解は

$$g(s) = -\frac{a}{\rho} \frac{1}{\beta} \int_0^s p(\tau) \exp(\alpha \tau) \sin[\beta(s-\tau)] d\tau \quad (4.40)$$

になる。^[註] これを式(4.38)に入れ、積分変数の変換をすると

$$f(s) = -\frac{a}{\rho} \frac{1}{\beta} \int_0^s p(\tau) e^{\alpha(\tau-s)} \sin[\beta(s-\tau)] d\tau = -\frac{a}{\rho} \frac{1}{\beta} \int_s^0 p(s-\tau) e^{-\alpha\tau} \sin\beta\tau (-d\tau)$$

式(4.31)を用いれば、ポテンシャルは

$$\varphi(r, t) = -\frac{a}{\rho} \frac{1}{\beta} \frac{1}{r} \int_0^s p(s-\tau) e^{-\alpha\tau} \sin\beta\tau d\tau \quad (4.41)$$

上式の φ を式(4.25)(4.27)(4.28)に入れるか、もしくは求めた $f(s)$ を(4.33)~(4.35)に入れば、点対称波動場に生ずる変位と応力が定まる。

この問題に対応する静的解は、式(4.41)の $\rho \rightarrow 0$ 極限によって得られる。^[註2] すなわち

$$\varphi_{st} = -\frac{a}{r} \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho\beta} \text{Im} \int_0^s p(s-\tau) e^{-(\alpha-i\beta)\tau} d\tau$$

[註] 式(4.39)を \mathcal{L} 変換 ($\mathcal{L}: s \rightarrow \tau$) すると、初期条件 $g(0) = g'(0) = 0$ を考慮して

$$(\tau^2 + \beta^2) \bar{g}(\tau) = -\frac{a}{\rho} \bar{p}(\tau - \alpha)$$

$$\bar{g}(\tau) = -\frac{a}{\rho\beta} \frac{\beta}{\tau^2 + \beta^2} \bar{p}(\tau - \alpha)$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\beta}{\tau^2 + \beta^2} \right) = \sin\beta s, \quad \mathcal{L}^{-1}[\bar{p}(\tau - \alpha)] = p(s) e^{\alpha s}$$

たたみ込みの定理より

$$g(s) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{g}(\tau)] = -\frac{a}{\rho\beta} \int_0^s p(\xi) e^{\alpha\xi} \sin[\beta(s-\xi)] d\xi$$

[註2] 運動方程式において慣性項が無限に小さくなって行く。位相速度 c_r, c_t が無限に大きくなって行き、瞬時に静的平衡状態に至る。

部分積分により積分を展開する

$$\begin{aligned} \int_0^s p(s-\tau) e^{-(\alpha-i\beta)\tau} d\tau &= \left[-\frac{p(s-\tau)}{\alpha-i\beta} e^{-(\alpha-i\beta)\tau} \right]_0^s - \int_0^s \frac{-e^{-(\alpha-i\beta)\tau}}{\alpha-i\beta} \cdot p'(s-\tau)(-1) d\tau \\ &= \frac{p(s)}{\alpha-i\beta} - \frac{1}{\alpha-i\beta} \int_0^s p'(s-\tau) e^{-(\alpha-i\beta)\tau} d\tau \\ &= \frac{\alpha+i\beta}{\alpha^2+\beta^2} p(s) - \frac{(\alpha+i\beta)^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2} p'(s) + \frac{(\alpha+i\beta)^3}{(\alpha^2+\beta^2)^3} p''(s) - \dots \end{aligned}$$

ところで $\alpha^2+\beta^2 = \frac{2(1-2\nu)C_1^2}{(1-\nu)a^2}$ だから $\alpha^2+\beta^2 \approx \frac{2(1-2\nu)(\lambda+2\mu)}{(1-\nu)a^2\rho}$ ($\rho \ll 1$)

従って、展開の、高次項が一次項と比べて小さいと考えて省けば

$$-\frac{a}{r} \frac{1}{\rho\beta} \text{Im} \int_0^s p(s-\tau) e^{-(\alpha-i\beta)\tau} d\tau \sim -\frac{a}{r} \frac{1}{\rho\beta} \frac{(1-\nu)a^2\rho\beta P(s)}{2(1-2\nu)(\lambda+2\mu)}$$

静的な解はこれより

$$P_{st} = -\frac{a^3}{r} \frac{p(t)}{\lambda+2\mu} \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)} = -\frac{a^3}{r} p(t)/(4\mu)$$

ここで荷重の時間依存をヘビサイド関数 $H(\cdot)$ によって $p(t) = p_0 H(t)$ と定める。この特別な例に対する結果は容易に評価できて三角関数の合成を行って整理すると

$$\varphi(r, t) = -\frac{1}{4\mu} \frac{a^3 p_0}{r} \left\{ 1 - (2-2\nu)^{1/2} e^{-\alpha s} \sin(\beta s + \gamma) \right\} H(s) \quad (4.42)$$

s は式(4.32)で定義され、また γ は次式である。

$$\gamma = \cot^{-1}(1-2\nu)^{1/2}, \quad \frac{\pi}{4} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$$

$\varphi(r, t)$ は、式(4.42)のごとく t を限りなく増加させて行けば静的解になる。荷重の作用が有限持続時間 T となる時、すなわち矩形パルス負荷の時、式(4.42)の解を重ね合わせることによって解が得られる。式(4.42)から求められる半径応力 τ_r と周方向応力 τ_θ のある特定位置における時間応答をそれぞれ図4.3と図4.4に示す。図からわかるように位置 r における応答は空洞球内壁から波が到来するまで静止しており $t = (r-a)/C_1$ で急激に応答している。また時間経過とともに破線で示した静的な解に漸近して行く。動的な効果として波頭の到来した直後に大きな変動をする。このような球面波は空間的には r^{-1} のオーダーで減衰している。平面波や円筒波はこうはならない。平面波は減衰せず、円筒波はほぼ $r^{-1/2}$ のオーダーである。

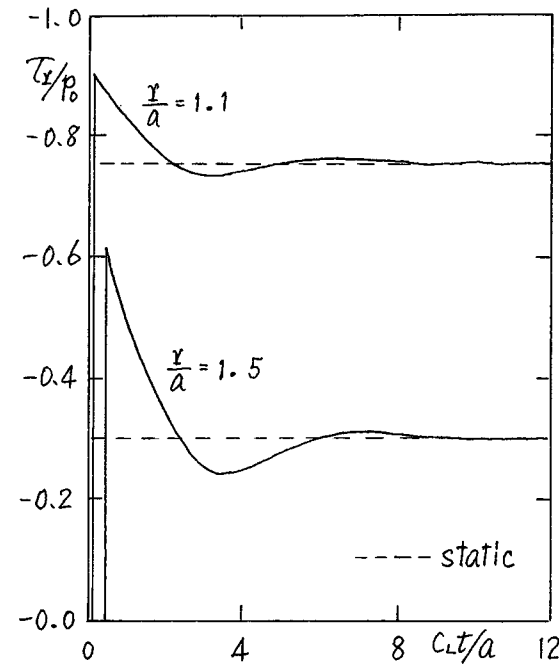


図4.3

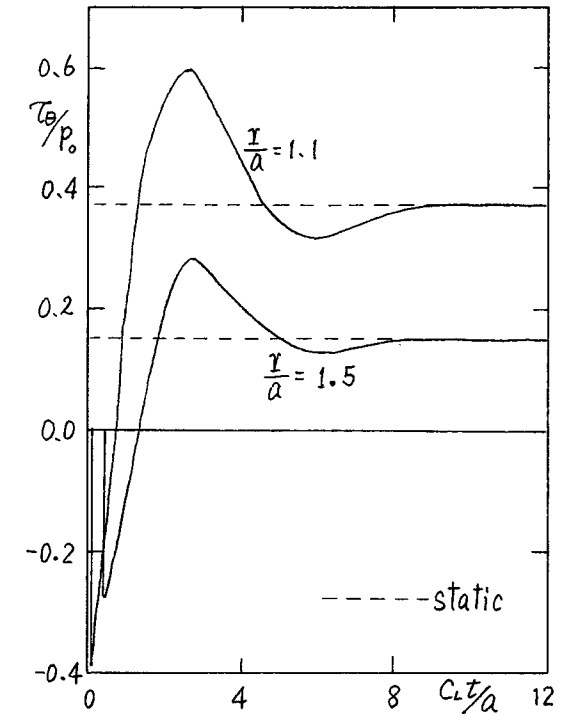


図4.4

4.3.3 調和波の重ね合せ 点対称調和波は式(4.31)(4.32)より次の形をとることができる。

$$\varphi(r, t) = \frac{A}{r} \exp\left[i\omega\left(\frac{r-a}{C_1} - t\right)\right] \quad (4.43)$$

式(4.43)から導びかれる半径方向応力 τ_r は式(4.34)より

$$\tau_r = -\rho D(\omega, r) \frac{A}{r} \exp\left[i\omega\left(\frac{r-a}{C_1} - t\right)\right] \quad (4.44)$$

$$\text{ここに、} D(\omega, r) = \omega^2 + 2i\left(\frac{a}{r}\right)\omega - 2(1-\nu)\left(\frac{a}{r}\right)^2\beta^2 \quad (4.45)$$

α と β は前節で定義した。式(4.43)と(4.44)は外向波を表わしている。また、球内壁の圧力変動を式(4.43), (4.44)を用いた重ね合せ積分によって表せば、球周囲の波動場を求める一つの方法になる。1.8節の式(1.97)を思い出せば $r=a$ における境界条件式(4.29)は

$$\tau_r(a, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (4.46)$$

と書き表わせる。これを導くための時間調和球面波は式(4.43)(4.44)の比較から

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{l} \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P^*(\omega)}{D(\omega)} e^{-i\omega[t-(l-a)/c_L]} d\omega \quad (4.47)$$

になる。ここに $D(\omega)$ は式(4.45)で $l=a$ における $D(\omega, a)$ であり

$$D(\omega) = \omega^2 + 2i\alpha\omega - 2(1-\nu)\beta^2$$

$P^*(\omega)$ は(4.29)で与えられる $P(t)$ の Fourier 変換で既知であるから、式(4.47)の積分評価ができればよい。これは複素 ω 面上の積分路を考えることにより行なわれる。次の特別な場合を考えてみよう。

$$p(t) = \frac{\varepsilon}{\pi(\varepsilon^2 + t^2)} \quad (4.48)$$

1.8 節の式(1.98)を用いれば、 $t=i\varepsilon$ における留数を考えて次を得る。

$$P^*(\omega) = e^{-\varepsilon\omega} \quad (4.49)$$

式(4.48)によって与えられる圧力変動は $\varepsilon \rightarrow 0$ にすればインパルス負荷となる。数式的には、 $p(t)$ はこの時 $t=0$ を除いていたるところ 0 であり、 $t=0$ で $p(t)$ の値は ∞ 大である。 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとった時、この $p(t)$ はディラックのデルタ関数として知られ $\delta(t)$ であらわす。式(4.49)で ε を 0 にすると $P^*(\omega)$ は 1 の値をとることがわかる。この関数 $\delta(\cdot)$ は現実的な荷重を表現するものではないが、このような荷重に対する応答が理論的に求まるならば、他の分布状態の負荷に対する応答も時間に関する重ね合せによって得ることができる。すなわち、任意関数 $f(t)$ は次のような積分によって表現できる。

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \delta(t-s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s) \delta(s) ds \quad (4.50)$$

$p(t) = \delta(t)$ とした時、式(4.47)は

$$\varphi_0(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{a}{l} \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{D(\omega)} e^{-i\omega[t-(l-a)/c_L]} d\omega$$

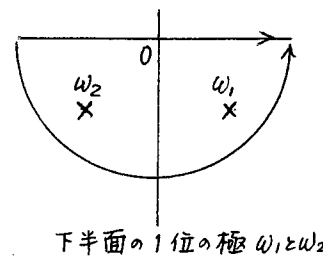
となる。ここで $D(\omega) = 0$ の根を計算すれば

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{(1-2\nu)^{1/2} \cdot c_L}{1-\nu} - i \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{c_L}{a} = \pm \beta - i\alpha$$

よって、被積分関数の極は複素 ω 面の下半分にある。

$t-(l-a)/c_L > 0$ を考慮して、積分路は下に向けた回路

路をとり留数によって評価する。その結果次を得る。



$$\varphi_0(x, t) = -\frac{a}{l} \frac{1}{\rho} \frac{1}{\beta} e^{-\alpha S} \sin(\beta S) \quad ; \quad S > 0 \quad (4.51)$$

ただし $S = t - (l-a)/c_L$ としている。 $t - (l-a)/c_L < 0$ の時は収束性

より積分閉回路を上半面にとるが、回路内に極が存在しないので $\varphi_0(x, t) \equiv 0$ となる。

式(4.51)が $p(t) = \delta(t)$ に対する解だから、これより任意時間依存の荷重 $p(t)$ に対する解

を作ってみよう。時間座標を τ だけ移行して $\delta(t-\tau)$ の解は $\varphi_0(x, t-\tau)$ となる。応答

の大きさは比例するだろうから $p(\tau)\delta(t-\tau)$ の荷重に対する解は $p(\tau)\varphi_0(x, t-\tau)$ となる。こ

こで $t-\tau = \tau$ とおけば $p(t-\tau)\delta(\tau)$ に対する解は $p(t-\tau)\varphi_0(x, \tau)$ である。さて、式(4.50)

を用いると
$$p(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau) \delta(\tau) d\tau$$

従って $p(t)$ の荷重に対する解は $\int_{-\infty}^{\infty} p(t-\tau) \varphi_0(x, \tau) d\tau$ で与えられる。ただし $\varphi_0(x, t)$ は

$\delta(t)$ に対する解。ところで荷重関数 $p(t)$ と応答関数 $\varphi_0(x, t)$ は時刻 $t > 0$ でのみの問題と

考えているから、無限区間積分は $t-\tau \geq 0, \tau \geq 0$ より $0 \leq \tau \leq t$ に限定できる。このため

荷重 $p(t)$ による応答は

$$\varphi(x, t) = \int_0^t p(t-\tau) \varphi_0(x, \tau) d\tau$$

によって与えられる。さらに式(4.51)より有限速度 c_L で衝撃の伝わる本問では $t - \frac{l-a}{c_L} > 0$

の時のみ値をもつので $\tau > (l-a)/c_L$ の積分となり

$$\varphi(x, t) = \int_{(l-a)/c_L}^t p(t-\tau) \varphi_0(x, \tau) d\tau$$

式(4.51)を上式に入れ $\tau - (l-a)/c_L = \zeta$ の変数変換すれば

$$\varphi(x, t) = -\frac{a}{l\rho\beta} \int_0^{t-(l-a)/c_L} p\left(t - \frac{l-a}{c_L} - \zeta\right) e^{-\alpha\zeta} \sin\beta\zeta d\zeta$$

$$\varphi(x, t) = -\frac{a}{l\rho\beta} \int_0^S p(S-\tau) e^{-\alpha\tau} \sin\beta\tau d\tau$$

これは式(4.41)に一致している。

4.4 軸対称二次元波動

軸対称過渡応答波は、その対称性のほかに軸座標依存性がない運動であるとしても、点対称球面波動より解析が複雑になる。その理由は、円柱波については支配方程式の解が引数 $(t \pm \frac{r}{c})$ の形となる2つの任意関数のみによって一般に表現できず Bessel 関数による表現になるためである。

4.4.1 支配方程式 円柱座標系で、軸座標 z と角座標 θ に独立な運動は連成しない3つの波動に分離できる。すなわち、2.13節の一般表示式より導びかれて

・半径運動 (Radial motions)

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (4.52)$$

$$\tau_r = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (4.53)$$

$$\tau_\theta = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + 2\mu \frac{u}{r} \quad (4.54)$$

$$\tau_z = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad \text{または} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.56)$$

・回転せん断運動 (Rotary shear motions)

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (4.57)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{または} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.59)$$

・軸せん断運動 (Axial shear motions)

$$w = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\psi_\theta)}{\partial r} \quad (4.60)$$

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial w}{\partial r} \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial r} - \frac{\psi_\theta}{r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \quad \text{または} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.62)$$

4.4.2 調和波 半径運動、回転せん断運動あるいは軸せん断運動のいずれの場合でも調和波動に基づく運動の場合は時間に依存する因子として $e^{\pm i\omega t}$ とおいて時間を分離することができる。時間調和の円柱波を説明するため例として半径運動を考えてみよう。

ポテンシャル φ の形として

$$\varphi(r, t) = \Phi(r) e^{i\omega t} \quad (4.63)$$

を考えると式(4.56)から r のみに依存する関数 $\Phi(r)$ は次式を満足しなければならない。

$$\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + k_L^2 \Phi = 0 \quad (4.64)$$

$$\text{ここに} \quad k_L = \omega/c_L \quad (4.65)$$

式(4.64)は Bessel の微分方程式であるから、その一般解は

$$\Phi(r) = A H_0^{(1)}(k_L r) + B H_0^{(2)}(k_L r) \quad (4.66)$$

$H_0^{(1)}(k_L r)$ と $H_0^{(2)}(k_L r)$ はそれぞれ 0 次の第1種 Hankel 関数と第2種 Hankel 関数である。

$$\text{式(4.66)(4.63)より} \quad \varphi(r, t) = A e^{i\omega t} H_0^{(1)}(k_L r) + B e^{i\omega t} H_0^{(2)}(k_L r) \quad (4.67)$$

このように2つの項によって表わされたポテンシャル φ はどのような性質の波から構成されているのであろうか。これは $k_L r$ の大きな Hankel 関数の漸近形によって明らかになる。これらの漸近形は

$$H_0^{(1)}(k_L r) \sim \left(\frac{2}{\pi k_L r} \right)^{1/2} e^{i(k_L r - \frac{\pi}{4})} \quad k_L r \gg 1 \quad (4.68)$$

$$H_0^{(2)}(k_L r) \sim \left(\frac{2}{\pi k_L r} \right)^{1/2} e^{-i(k_L r - \frac{\pi}{4})} \quad k_L r \gg 1 \quad (4.69)$$

となるから式(4.67)の右辺第1項は $r=0$ の原点に向って収束する波をあらわし、第2項は原点から発散してゆく波をあらわしている。ほとんどの場合、物理現象上の考察から発散する波に関して解析されるから第2項のみを採用し

$$\varphi(r, t) = B e^{i\omega t} H_0^{(2)}(k_L r) \quad (4.70)$$

の解形を考えることになる。Hankel 関数 $H_0^{(2)}(k_L r)$ は第1種、第2種の Bessel 関数によって

$$H_0^{(2)}(k_L r) = J_0(k_L r) - i Y_0(k_L r)$$

と書き表わせ、また Bessel 関数の良く知られた積分表示として $J_0(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\sin xs}{\sqrt{s^2-1}} ds$ ^[註2]

[註] 森口 ほか2名「数学公式集Ⅲ」154頁、岩波書店；[註2] 同左；181頁、182頁。

$Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_1^\infty \frac{\cos xs}{\sqrt{s^2-1}} ds$ があるから $H_0^{(2)}(k_L r)$ は

$$H_0^{(2)}(k_L r) = \frac{2i}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-ik_L r s}}{\sqrt{s^2-1}} ds$$

したがって式(4.70)の解は

$$\varphi(r, t) = \frac{2i}{\pi} B e^{i\omega t} \int_1^\infty \frac{e^{-ik_L r s}}{\sqrt{s^2-1}} ds \quad (4.71)$$

これはたとえば円孔内壁に調和変動圧力の作用する時に生ずる周囲の軸対称半径運動を解くために利用できる。Bは式(4.53)もしくは(4.52)を用いて境界面における条件から求められる定数である。具体的に境界条件を与えてBを決定し調和波動場を求めることは読者にまかせるが、一般に任意時間依存の境界条件の場合は、さらに調和波動場の重ね合せになる。その時は、重ね合せのための積分を評価することがおもな仕事になる。

この種の軸対称円柱波で過渡的応答の解析は Laplace 積分変換法によりいくつも行なわれている。^[註] また 4.8 節で述べる特性曲線法に基づく数値的解法もある。

4.5 波頭の伝播

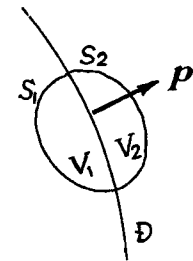
境界の部分領域もしくはその内部の部分領域が擾乱を受ければ、やがて静止状態のその周囲も運動状態になる。このように波の形で擾乱が伝ばし運動が静止の領域へ移って行く時、静止域と運動域を分ける境界を波頭(wave front)といい、一般に場の量やその導関数は、その波頭上で不連続となる。以前に述べた過渡波の例では波頭形状は平面や球面になり、厳密な解析に乗り易かったが、波頭形状が幾何学的に単純にならなければほとんどの場合厳密解を求めることは非常に難しい。しかしながら波頭における場の量、あるいはその空間微分や時間微分を求めることは可能であり、波頭上の解析が問題を解く糸口を与えることがある。

[註] H. L. Selberg, *Arkiv for Fysik* 5 (1952), 97.
 J. Miklowitz, *Jour. Appl. Mech.* 27 (1960), 165
 伊藤美和, 秋田大学修士論文(昭55年3月)

4.5.1. 不連続量の伝播 波頭における状態量の解析は、連続体中を伝播する不連続面に関する力学による一般的取扱いの結果に基づいている。弾性体に対する手短な解説は Love の著書にも見られる。^[註] また、より一般的な取扱いによって整理して述べたものが Eringen と Suhubi や Wang と Truesdell^[註2] による著書に見られる。

さて、前節で扱った例から推測できるように、線形支配方程式に従う場合は、初期条件や境界条件を満足するように基本解や調和解の重ね合せによって求めることが出来る。従って、もし、その初期条件や境界条件によって場に生ずる不連続性の有無を議論できないだろうか。これは支配偏微分方程式の型による。解の境界値や初期値に強く依存する波動方程式のように双曲型の場合に可能となる。すなわち、時間的にも空間的にも条件として与える値に不連続があれば波動場では不連続のまま媒体中を伝わって行く。^[註3] しかしながら、これらの不連続とは、解析のためのモデルとして、時間的にも空間的にも非常に短い間隔のもとで急変する実際の物理現象を数学的に理想化したものであることを知っておく必要がある。

波頭は必ずしも完全に静止している媒体に進んで行くとは限らない。そこで一般性を保つために新たな波頭が到来する以前にすでに何らかの擾乱を受けていたとして考える。いま、領域 V が移動する波頭の不連続面 D によって V₁ と V₂ の2つの部分に分けられているとし、下添字 1 が V₁ 側から D に近づけた時の D 上の場の値を示し、下添字 2 は V₂ 側から D に近づけた時の D 上の値を示すとする。T_{ij} の成分が D において不連続である時、その不連続量を角カッコ [] によって表わせは



$$[T_{ij}] = (T_{ij})_2 - (T_{ij})_1 \quad (4.72)$$

図 4.5 不連続面の伝播

[註] A. E. Love "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", P.295 (1944), Dover Pub.

[註2] A. C. Eringen and E. S. Suhubi "Elastodynamics" Vol. I, Chap. II, (1974), Academic Press.

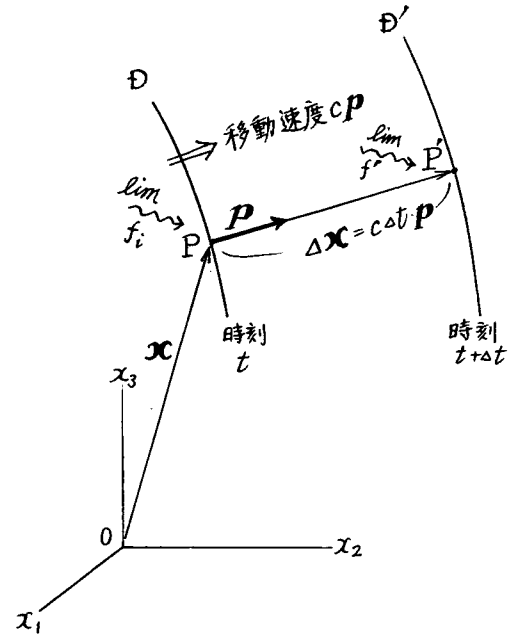
C.-C. Wang and C. Truesdell "Introduction to Rational Elasticity", Chap. VI. (1973), Noordhoff Int. Pub.

[註3] 大井鉄郎「偏微分方程式とその応用」, 第5章(昭32), コロナ社

4.5.3 波頭における運動学的条件 場の量 $f_i(\mathbf{x}, t)$ が移動する面 D

上で不連続となる時、その不連続面(波頭)上で成立するある運動学的条件を調べる。ここで言う条件とは不連続量(跳躍量)の時間偏導関数と空間座標偏導関数との間に成立する関係によって示される。

不連続面 D の時刻 t における状態と時刻 $t + \Delta t$ における状態を考える。 D 上の点 P における法ベクトル \mathbf{p} が $t + \Delta t$ の面 D' と交わる点を P' とすれば $\vec{PP'}$ は $\Delta \mathbf{x}$ と書ける。図参照
また f'_i を $f_i(\mathbf{x}, t)$ の P' 点における片側の極限值を示し、 f_i を P 点における $f_i(\mathbf{x}, t)$ の片側極限值を示すとする。



場の量 $f_i(\mathbf{x}, t)$ の不連続面 D の運動

不連続面に垂直方向に速度 $c\mathbf{p}$ で D とともに動く観測者にとって場の量 $f_i(\mathbf{x}, t)$ の時間変化率を考えれば、

$$\left(\frac{df_i}{dt}\right)_D \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f'_i - f_i}{\Delta t} \right] = \frac{\partial f_i}{\partial t} + c f_{i,j} p_j \quad \text{[註] (4.84)}$$

ところで、面 D に垂直な方向についての微分を考えると

$$\frac{\partial f_i}{\partial p} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial p} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial p} + \frac{\partial f_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial p} = f_{i,j} p_j \quad (4.85)$$

だから式(4.84)は

$$\frac{d_D f_i}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + c \frac{\partial f_i}{\partial p} \quad (4.86)$$

[註] 図より $\Delta \mathbf{x} = c\mathbf{p}\Delta t$ したがって $\Delta t \rightarrow 0$ の極限で $dx_j/dt = cp_j$. これより

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f'_i - f_i}{\Delta t} \right] = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial f_i}{\partial t} + c f_{i,j} p_j$$

式(4.87)は一次の運動学的適合条件式(kinematical condition of compatibility)として知られている。もし波頭において f_i が連続であるならば

$$[\partial f_i / \partial t] = -c [\partial f_i / \partial p] \quad (4.88)$$

さて、ここで現実的現象として重要な、波頭における変位の連続性を考えれば

$$[u_i] = 0 \quad (4.89)$$

が成り立たなければならないから、式(4.88)より

$$[\dot{u}_i] = -c [\partial u_i / \partial p] \quad (4.90)$$

また式(8.45)と $p_j p_j = 1$ からわかるように $[u_{i,j}] = [\partial u_i / \partial p] p_j$ であるから上式は

$$[\dot{u}_i] p_j = -c [u_{i,j}] \quad (4.91)$$

を得る。

4.5.4 波頭と波線 面 D において変位ベクトルの導関数が不連続ならば

応力テンソル成分も不連続になる。Stokeの法則(2.40)から

$$[\tau_{ij}] = \lambda \delta_{ij} [u_{k,k}] + \mu ([u_{i,j}] + [u_{j,i}])$$

これに式(4.91)を代入して

$$[\tau_{ij}] = -\frac{\lambda}{c} \delta_{ij} [\dot{u}_k] p_k - \frac{\mu}{c} ([\dot{u}_i] p_j + [\dot{u}_j] p_i)$$

式(4.83)は $[\tau_{ij}] p_j = -\rho c [\dot{u}_i]$ であったから

$$\rho c^2 [\dot{u}_i] = \lambda \delta_{ij} [\dot{u}_k] p_k p_j + \mu ([\dot{u}_i] p_j p_j + [\dot{u}_j] p_i p_j)$$

$$\text{従って } (\mu - \rho c^2) [\dot{u}_i] + (\lambda + \mu) [\dot{u}_k] p_k p_i = 0 \quad (4.92)$$

この式は平面波に対する式(4.5)と等価である。前と同様、ここで $\mu = 0$ の場合に分けられる。すなわち $[\dot{u}_i]$ が p_i に比例する時と $[\dot{u}_k] p_k = 0$ となる場合である。前者の場合、運動方向が p_i の方向だから縦波の波頭となる。式(4.92)で $[\dot{u}_i]$ と $[\dot{u}_k]$ をそれぞれ p_i と p_k におきかえ $p_i \neq 0$ であることから

$$c^2 = c_l^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho$$

を得る。また、 $[\dot{u}_k] p_k = 0$ の場合、運動方向が p_k と直交するから横波の波頭となり

$$c^2 = c_T^2 = \mu/\rho.$$

波頭とそれに動く点 P の軌跡は常に波頭に垂直となる。この様な波頭群(または波面群)と直交する軌跡を波線(ray)と呼ぶ。さて P の時間微分を調べて、この軌跡の方向変化を考えよう。式(4.80)から

$$\frac{dP_i}{dt} = c \frac{d}{dt}(\chi, i)$$

式(4.75)を用いれば
$$\frac{dP_i}{dt} = c \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{d\chi}{dt} \right) = c \frac{\partial}{\partial x_i} (1) = 0$$

従って均質材においては、波線は直線である。このことから時刻 $t = t_0$ と、その後の時刻 t における波頭は、波線に沿って $c(t - t_0)$ の距離だけ $t = t_0$ の波頭を進ませることにより定まる。このようにして波頭を求める方法は波動研究の初期の理論として早くから考え出されており Huyghens の原理として知られている。

不連続面の伝は過程で、その不連続量の大きさはどのように変化して行くかについて述べる。いま、 R と S を波頭における主曲率半径^[註]として波頭における場の量 f は波線に沿って

$$f^2 RS = \text{一定} \quad (4.93)$$

になる。これは球面波($R=S$)の時 f は R^{-1} で減衰して行くことを示している。もし曲率半径の一つ(たとえば S)が二次元波動の場合のように無限大であるならば式(4.93)の代わりに

$$f^2 R = \text{一定}$$

を用いる。したがって円柱波の場合、 f は $R^{-1/2}$ で減衰して行く。

[註]. 曲率半径の最大値と最小値

4.6 波頭の後方近辺における展開

波頭において、不連続量そのもののみならず、時間微分した不連続量も求められるので、波頭通過直後の場の状態をテーラー展開形で調べることができる。波頭的位置を $\chi(\mathbf{x}) = t$ によって与えればテーラー展開の一般形は $t \geq \chi(\mathbf{x})$ 、すなわち波頭後方において次のように書ける。

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \{t - \chi(\mathbf{x})\}^n \left[\frac{\partial^n f_i}{\partial t^n} \right]_{t=\chi(\mathbf{x})} \quad (4.94)$$

上式の不連続量 $[\partial^n f_i / \partial t^n]$ の求め方を過渡的な軸対称回転剪断運動を例にして説明する。半径 a の円孔が弾性板にけられている。この円孔の縁に一様な面内剪断力が $t=0$ に作用しはじめる。生ずる応答状態は回転変形と剪断応力のみによるものになり、恒等的に 0 とならない変位成分は $v(r, t)$ であり、応力は式(4.58)の

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \quad (4.95)$$

である。この時の運動方程式は、次式になる。

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.96)$$

問題を
$$v(r, 0) = \dot{v}(r, 0) = 0, \quad (r > a) \quad (4.97)$$

なる初期条件と、 $r = a$; $\tau_{r\theta} = \tau_0 g(t)$ (4.98)

の境界条件によって設定する。これらの問題はすでに Laplace 変換法によって Goodier と Jahsman によって取扱われており、本手法の吟味ができる。^[註] 軸対称回転せん断波に対する波頭的位置は、

$$\chi(r) - t = 0 \quad (4.99)$$

によって定まる。波頭における運動量の保存則をあらわす式は式(4.83)より

$$[\tau_{r\theta}] = -\rho c \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] \quad (4.100)$$

[註]. J.N. Goodier and W.E. Jahsman, *Jour. Appl. Mech.*, 23 (1956), P.284.

また、変位が連続であることから、式(4.91)を利用して、

$$\left[\frac{\partial v}{\partial r} \right] = -\frac{1}{c} \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right] \quad (4.101)$$

ここに波頭が半径方向のみに伝はするという事を考慮した。応力ひずみ関係式(4.95)に変位の連続性を考えれば

$$[\tau_{r\theta}] = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial r} \right] \quad (4.102)$$

(4.100)~(4.102)より $c = c_T = (\mu/\rho)^{1/2}$ を得るから

$$r(x) = (r-a)/c_T \quad (4.103)$$

従って式(4.99)は波頭が

$$r = a + c_T t \quad (4.104)$$

にあるということの意味する。本問に対する運動学的適合条件として(4.87)を用いれば r と ρ の方向が一致するので

$$\frac{d_0}{dt} [f] = \left[\frac{\partial f}{\partial t} \right] + c_T \left[\frac{\partial f}{\partial r} \right] \quad (4.105)$$

ここに $f(r, t)$ は場の不連続量である。

さて、新変数として

$$\tau = r^2 \tau_{r\theta}, \quad V = v/r \quad (4.106 a, b)$$

を用いれば演算が幾分簡単になる。式(4.95)と(4.96)より

$$\tau = \mu r^3 \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial r} = \rho r^3 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (4.107), (4.108)$$

を得る。運動量保存則の式(4.100)は

$$[\tau] = -\rho c_T r^3 \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right]$$

また、上式は、式(4.104)により書きかえれば

$$[\tau] = -\rho c_T (a + c_T t)^3 \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right] \quad (4.109)$$

式(4.98)の関数 $g(t)$ がマクローリン級数($t=0$ におけるテラー展開)に展開できるとす

れば $r=a$ における τ の条件は、次のようになる。

$$\tau(a, t) = a^2 \tau_0 \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{t^n}{n!} \quad (t > 0) \quad (4.110)$$

式(4.94)に準じて、 τ に対する解を次の形で求める。

$$\tau(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{t - r(x)\}^n}{n!} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right]_{t=r(x)} \quad (4.111)$$

不連続量 $[\partial^n \tau / \partial t^n]$ が簡単な常微分方程式を満足することを以下に説明する。

$\tau(r, t)$ が波頭で不連続であるとして、式(4.105)を用いれば

$$\frac{d_0}{dt} [\tau] = \left[\frac{\partial \tau}{\partial t} \right] + c_T \left[\frac{\partial \tau}{\partial r} \right] \quad (4.112)$$

式(4.107)と(4.108)とを用いて上式を書きかえてみる。 $r = a + c_T t$ における式であるから

$$\frac{d_0}{dt} [\tau] = \mu (a + c_T t)^3 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial t} \right] + \rho c_T (a + c_T t)^3 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] \quad (4.113)$$

運動学的適合条件式は $\partial V / \partial t$ に対し、

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] + c_T \left[\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial t} \right] \quad (4.114)$$

(4.113)と(4.114)より $[\partial^2 V / \partial r \partial t]$ を消去して

$$\begin{aligned} \frac{d_0}{dt} [\tau] &= \frac{\mu (a + c_T t)^3}{c_T} \left\{ \frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right] - \left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] \right\} + \rho c_T (a + c_T t)^3 \left[\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right] \\ &= \frac{\mu (a + c_T t)^3}{c_T} \frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial V}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

ここで式(4.109)を考慮すると常微分方程式

$$\frac{d_0}{dt} [\tau] + (a + c_T t)^3 \frac{d_0}{dt} \left\{ \frac{[\tau]}{(a + c_T t)^3} \right\} = 0 \quad (4.115)$$

が導かれる。式(4.115)の解は $[\tau] = A_0 (a + c_T t)^{3/2}$ であって A_0 は式(4.110)より $t=0$ を入れてみればわかるように、 $A_0 = \sqrt{a} \tau_0 g_0$ になる。本問のせん断応力の不連続量は式(4.106a)より^[註]

$$[\tau_{r\theta}] = \left(\frac{a}{a + c_T t} \right)^{1/2} \tau_0 g_0 \quad (4.116)$$

[註]. 不連続量は波頭 $r = a + c_T t$ で考える。

通常の円柱波に生ずる不連続量は円孔からの半径距離の平方根のオーダーで減衰してゆく。

さて、高次の不連続量を求めよう。 $\partial^n \tau / \partial t^n$ についての適合条件式(4.105)は

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] = \left[\frac{\partial^{n+1} \tau}{\partial t^{n+1}} \right] + C_T \left[\frac{\partial^{n+1} \tau}{\partial r \partial t^n} \right] \quad (4.117)$$

一方 $\partial^{n+1} V / \partial t^{n+1}$ に用いられは

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^{n+1} V}{\partial t^{n+1}} \right] = \left[\frac{\partial^{n+2} V}{\partial t^{n+2}} \right] + C_T \left[\frac{\partial^{n+2} V}{\partial r \partial t^{n+1}} \right] \quad (4.118)$$

式(4.118)の各項を τ の導関数で表現する。すなわち、式(107)を用いて

$$C_T \frac{\partial^{n+2} V}{\partial r \partial t^{n+1}} = C_T \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \frac{\tau}{\mu r^3} = \frac{C_T}{\mu r^3} \frac{\partial^{n+1} \tau}{\partial t^{n+1}}$$

また(4.108)より $\frac{\partial^{n+2} V}{\partial t^{n+2}} = \frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial^{n+1} \tau}{\partial r \partial t^n}$

そして $\frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^{n+1} V}{\partial t^{n+1}} \right] = \frac{d_0}{dt} \left[\frac{1}{\rho r^3} \cdot \frac{\partial^n \tau}{\partial r \partial t^{n-1}} \right]$

これらを式(4.118)に代入すれば

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial^n \tau}{\partial r \partial t^{n-1}} \right] = \frac{1}{\rho r^3} \left[\frac{\partial^{n+1} \tau}{\partial r \partial t^n} \right] + \frac{C_T}{\mu r^3} \left[\frac{\partial^{n+1} \tau}{\partial t^{n+1}} \right]$$

そこで式(4.117)により右辺の2項を書きかえると

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{1}{\rho r^3} \frac{\partial^n \tau}{\partial r \partial t^{n-1}} \right] = \frac{1}{C_T \rho r^3} \left\{ \frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] - \left[\frac{\partial^{n+1} \tau}{\partial t^{n+1}} \right] \right\} + \frac{C_T}{\mu r^3} \left[\frac{\partial^{n+1} \tau}{\partial t^{n+1}} \right]$$

従って

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] = C_T (a + C_T t)^3 \frac{d_0}{dt} \left\{ \frac{1}{(a + C_T t)^3} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial r \partial t^{n-1}} \right] \right\} \quad (4.119)$$

いま、 $\partial^{n-1} \tau / \partial t^{n-1}$ に対する適合条件式をかければ

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^{n-1} \tau}{\partial t^{n-1}} \right] = \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] + C_T \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial r \partial t^{n-1}} \right]$$

となるから(4.119)より $\partial^n \tau / \partial r \partial t^{n-1}$ を消去すれば

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] = (a + C_T t)^3 \frac{d_0}{dt} \left\{ \frac{1}{(a + C_T t)^3} \left(\frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^{n-1} \tau}{\partial t^{n-1}} \right] - \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] \right) \right\}$$

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] = (a + C_T t)^3 \frac{d_0}{dt} \left\{ \frac{1}{(a + C_T t)^3} \frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^{n-1} \tau}{\partial t^{n-1}} \right] \right\} + \frac{3 C_T}{a + C_T t} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] - \frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right]$$

従って

$$\frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] - \frac{3}{2} \cdot \frac{C_T}{a + C_T t} \left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] = F_n(t) \quad (4.120)$$

ただし $F_n(t) = \frac{1}{2} (a + C_T t)^3 \frac{d_0}{dt} \left\{ \frac{1}{(a + C_T t)^3} \cdot \frac{d_0}{dt} \left[\frac{\partial^{n-1} \tau}{\partial t^{n-1}} \right] \right\}$

式(4.120)の解は

$$\left[\frac{\partial^n \tau}{\partial t^n} \right] = (a + C_T t)^{3/2} \int_0^t F_n(s) \frac{ds}{(a + C_T s)^{3/2}} + a^2 \tau_0 f_n$$

となる。これは $n-1$ 次の不連続量によって n 次の不連続量をあらわす関係式である。

以上より式(4.111)の $\tau(r, t)$ はすべての n に対して右辺が求まるので波頭後方近辺で求めることができる。

本節の手法を用いて、非均質体や粘弾性体における問題解析も Sum によって示されている。^[註]

4.7 特性法による軸せん断波の解析

連立偏微分方程式系の特性面 (characteristic surface) の議論は、かなり詳細になされている。^[註] 一般的な性質や複雑な支配方程式の解析について知ることは本手法を使いこなす上で重要であるが、ここでは二次元弾性波の伝ばと、軸対称波の伝ばの数値解法を例示することにより、特性法とはどういうものか、手短かに紹介する。

半径 a の円柱状空洞 (円孔) を持つ無限弾性体を考える。時刻 $t=0$ で円孔の内壁に軸方向の剪断力が一様に作用するとすれば、生ずる運動は軸せん断運動で

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4.121)$$

の式に支配され $\tau_{rz} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}$ (4.122)

の関係と、初期条件 $w(r,0) = \dot{w}(r,0) = 0 \quad (r > a)$ (4.123)

と境界条件 $\tau_{rz} = \tau_0 \cdot g(t) \quad (r = a)$ (4.124)

によって定まる。式(4.121)(4.122)は式(4.61)(4.62)と本質的に同一である。便宜のため

$$\tau = \frac{\tau_{rz}}{\mu}, \quad \dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (4.125a, b)$$

を導入すれば、式(4.121)は

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} = -\frac{\tau}{r} \quad (4.126)$$

また、式(4.122)は $\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} = 0$ (4.127)

となる。式(4.126)と(4.127)は、 $\tau(r,t)$ と $\dot{w}(r,t)$ に関する連立一次偏微分方程式になっている。いま $C(r,t)=0$ で定まる曲線上で τ と \dot{w} がわかっており、そして、この曲線に近い点における τ と \dot{w} が未知であるとする。この時、未知量 τ と \dot{w} を求める方法を考える。もし、 $C(r,t)=0$ 曲線上で τ と \dot{w} の r と t による偏導関数が求まるならば、その点の近くの点の未知量である τ と \dot{w} の値が関数のテーラ-展開法により求められるだろう。すなわち、 τ 又は \dot{w} を f で代表させれば、点 (r_0, t_0) まわりの展開として

[註] 寺沢寛一(編)「数学概論」応用編、岩波書店； 犬井鉄郎「偏微分方程式とその応用」、日刊工業新聞社、R. Courant and D. Hilbert, "Methods of mathematical physics" Vol. II, New York, Interscience Pub. (1962)

$$f(r,t) = f(r_0, t_0) + \left\{ \frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r_0} (r-r_0) + \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{r_0} (t-t_0) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \Big|_{r_0} (r-r_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t} \Big|_{r_0} (r-r_0)(t-t_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Big|_{r_0} (t-t_0)^2 \right\} + \dots$$

の形に表わせる。ただし下添字 0 は $\tilde{C}(r,t)=0$ を満たす r と t であることを示す。実 (r,t) が $\tilde{C}(r,t)=0$ に非常に近い時は一次導関数だけで十分になる。しかしながら後述するように、曲線 $\tilde{C}(r,t)=0$ が、ある特別の曲線に一致する時は τ と \dot{w} が定まらなくなる。曲線 $C(r,t)=0$ 上で τ と \dot{w} およびそれらの導関数を与えて、場の量を求めて行くので、その曲線を初期曲線と言ひ、空間 (r,t,f) を走る $C(r,t)=0$ 曲線の (r,t) 平面への投影を $\tilde{C}(r,t)=0$ で表わし初期基礎曲線と呼ぶ。

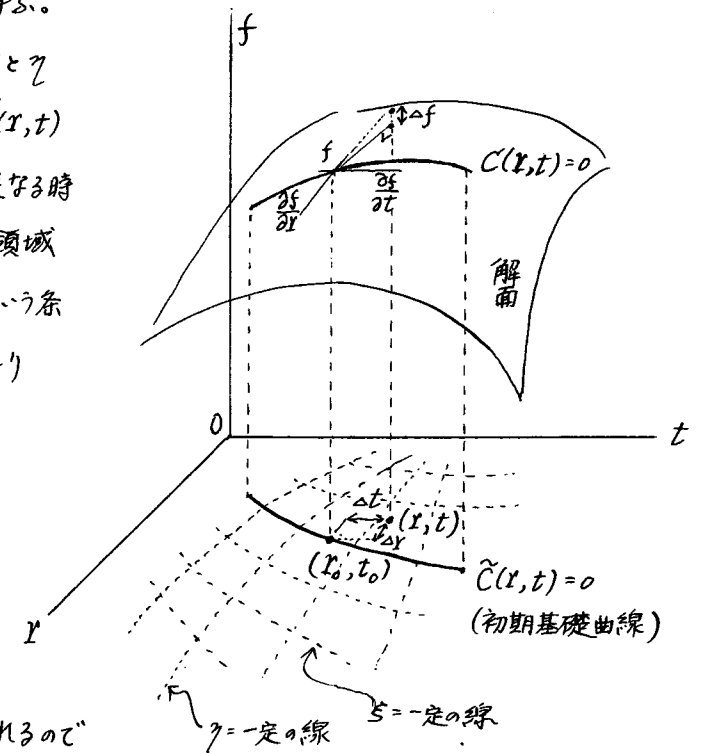
さて、新しい座標の ξ と η を導入する。それは $\xi = \tilde{C}(r,t)$ と定め、そして η は $\eta = \text{一定}$ なる時 $\xi = \text{一定}$ の曲線と考えている領域内で τ と \dot{w} が一回だけ交わるという条件で与える。微分関係より

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} = \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \dot{w}}{\partial \eta} = \frac{\partial \dot{w}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta}$$

となる。曲線 $\xi=0$ 上の

τ と \dot{w} は η の関数として与えられるので $\frac{\partial \tau}{\partial \eta}$ と $\frac{\partial \dot{w}}{\partial \eta}$ は既知である。したがって式(4.126)と式(4.127)および上記の微分関係式は $\frac{\partial \tau}{\partial r}$, $\frac{\partial \tau}{\partial t}$, $\frac{\partial \dot{w}}{\partial r}$, $\frac{\partial \dot{w}}{\partial t}$ の四つの未知導関数に対する代数方程式と見なせる。これを行列で表わせば



とは、容易に理解できよう。もし式(4.132)によって与える $g(t)$ が $t=0$ で不連続ならば $r = a + C_T t$ において σ と \dot{u} の不連続性を見越しておかなければならない。これは前節の波頭解析が利用できる。領域 $a \leq r \leq a + C_T t$ における σ と \dot{u} を求める方法は前述の C 面の σ_c, \dot{u}_c の計算とほぼ同じで、式(4.130)と式(4.131)の逐次利用により近傍の σ と \dot{u} が求められて行く。図4.6を説明すれば $r=a$ の直線上で式(4.132)により $\sigma(a, t)$ が指定される。その $\sigma(a, t)$ に時間的不連続性があるならば特性曲線に沿って伝ばするだろう。その時の不連続量は波頭解析の手法で評価される。あるいは $g(t)$ の飛移りに要する立上り時間を入れることにより近似することも可能である。 σ と \dot{u} がこの場合連続な取扱いとなるが十分短い立上り時間に設定すれば現象把握に大差ないだろう。いずれにせよ $\overline{PQS} \cdots Z$ 上では σ と \dot{u} が、 $r=a$ 上では σ が指定されて、まず \overline{QR} に沿う(4.131)の積分により R 点の \dot{u} が求まる。次に \overline{RT} と \overline{ST} のそれぞれについて(4.130)(4.131)の積分をして T 点の σ と \dot{u} が求まる。これを続ければ希望とする領域全部の σ と \dot{u} が決定する。

この手法は比較的計算量が少なく、効率がよい。また特性曲線の格子を細かくすることにより精度の高い数値結果も期待できよう。

4.8 半径方向運動

特性曲線法は、円孔内壁に作用する衝撃圧によって生ずる平面ひずみの波動応答場を調べるためにも適用できる。この場合、運動方程式は応力表示で

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (4.133)$$

の形である。また、関連する応力-ひずみ式は式(4.53)-(4.55)である。一次の偏微分方程式系にするため要素の速度

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (4.134)$$

を用いて、式(4.133)を書きかえれば

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} - \frac{\sigma_\theta}{r} - \rho \frac{\partial \dot{u}}{\partial t} = 0 \quad (4.135)$$

$$\text{式(4.53)を時間微分して} \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} - \lambda \frac{\dot{u}}{r} = 0 \quad (4.136)$$

同様に式(4.54)(4.55)も時間微分し、式(4.136)の $\partial \dot{u} / \partial r$ を消去すれば次式を得る。

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial t} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} - 4 \frac{(\lambda + \mu)\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\dot{u}}{r} = 0 \quad (4.137)$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial t} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \sigma_r}{\partial t} - \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\dot{u}}{r} = 0 \quad (4.138)$$

連立式(4.135)~(4.138)に対する特性曲線が前節に示した手順で求まり

$$\frac{dr}{dt} = \pm C_L \quad \text{ただし} \quad C_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \quad (4.139)$$

$$\text{これらのほかに} \quad \frac{dr}{dt} = 0 \quad (4.140)$$

式(4.139)(4.140)によって定まる $r-t$ 面の線を順に C_L^+ , C_L^- , C^0 の特性曲線と呼べば C_L^+ すなわち $dr/dt = C_L$ に沿っては式(4.135)(4.136)より

$$d\sigma_r - \rho C_L d\dot{u} + (\sigma_r - \sigma_\theta - \lambda \dot{u} / C_L) dr / r = 0 \quad (4.141)$$

C_L^- すなわち $dr/dt = -C_L$ に沿っては

$$d\sigma_r + \rho C_L d\dot{u} - (\sigma_r - \sigma_\theta + \lambda \dot{u} / C_L) dr / r = 0 \quad (4.142)$$

C^0 すなわち $dr/dt = 0$ に沿っては式(4.137)(4.138)より

$$d\sigma_\theta - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} d\sigma_r - \frac{4(\lambda + \mu)\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\dot{u}}{r} dt = 0 \quad (4.143)$$

$$d\sigma_r - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} d\sigma_r - \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\dot{u}}{r} dt = 0 \quad (4.144)$$

広く用いられている縦弾性係数 E とポアソン比 ν を用いれば、式(4.141)~(4.143)は

$$C_L^+ ; \quad d\sigma_r - \rho C_L d\dot{u} = - \left\{ \sigma_r - \sigma_\theta - \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{E}{C_L} \dot{u} \right\} \frac{dr}{r} \quad (4.145)$$

$$C_L^- ; \quad d\sigma_r + \rho C_L d\dot{u} = - \left\{ \sigma_r - \sigma_\theta + \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \cdot \frac{E}{C_L} \dot{u} \right\} \frac{dr}{r} \quad (4.146)$$

$$C^0 ; \quad d\sigma_r - \frac{1-\nu}{\nu} d\sigma_\theta = - \frac{E}{(1+\nu)\nu} \cdot \frac{\dot{u}}{r} dt \quad (4.147)$$

式(4.145)~(4.147)の差分形にした数値計算で、未知量の σ_r , σ_θ , \dot{u} が求まる。特性法に基づく解析例や一般理論がいくつか報告されている。^[註]

[註] Chou, P.C. and Koenig, H.A., *Jour. Appl. Mech.*, 33(1966) P.159; 円孔からの波。

Clifton, R.J., *Quart. Appl. Math.*, XXV(1967), P.97; 二次元弾性の数値解析の一般的手法

Ziv, M., *Int. Jour. Solids Structures*; 5(1969), P.1135; 二次元弾性波の伝播。

4.9 波動方程式の自己相似解 (self-similar solutions)

4.9.1 Chaplygin 変換 領域 R 内の全ての点に対して $(f_1, f_2, \dots, f_n) \in R$

$$W(\alpha f_1, \alpha f_2, \dots, \alpha f_n) = \alpha^m W(f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (4.148)$$

が常に成り立つ時、関数 $W(f_1, f_2, \dots, f_n)$ を m 次の冪次関数であるという。

いま、特に関数 W が 0 次の冪次関数である時を同次関数もしくは自己相似関数と呼び、二次元波動方程式の解がそのような関数となる場合の解析を考えてみよう。

式(4.148)の形が成り立つ解は、直角座標系では x/t と y/t の変数をもつ関数となるが、後ほどの説明のため、極座標における次の波動方程式を考える。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (4.149)$$

式(4.149)に対する同次解は r/t と θ の関数である。現象的には式(4.149)は、

$W(r/t, \theta)$ が (r, θ) 面に垂直な変位となる面外せん断変形運動を支配する方程式である。一般に、 $W(r/t, \theta)$ の形になる解はどのような境界条件あるいはどのような荷重形態に対して現われるものなのか、すぐには明確にできないが、おおむね、集中荷重の作用点、もしくは幾何学的にとがった角などの近くに生ずる円柱波を表現できるのではないかと予想されよう。すなわち変数 r/t に依存することから、円柱波の中心が一つしか生じないような場合であり幾何学的固有寸法(媒体の形状に有限長さを与える寸法)が存在しない時になる。これは、二次元空間では、すべての時間に対し、自己相似解の見い出せる最も一般的な形状が鈍角クサビ形であることを意味する。^[註] では、最初にそのような解になるための条件として、外乱の時間依存性がどういうものでなければならないか、ということをはっきりとさせる必要があるだろうか。これは、任意の時間依存に対する応答が重ね合せを意味する積分によって与えられるので、その心配はない。手順として、始めに解が自己相似形となるような外乱の時間依存性を考え、その後、希望とする解を組み立てるいわば半逆法(semi-inverse method)によって進められる。従って、この手法によって解かれる問題が極めて限られたものになることはない。

[註] 本手法を拡張して、鋭角クサビの応答の解析も示されている。大好、三浦，日本機械学会論文集 44巻 384号(昭53.8)

r/t と θ に依存する式(4.149)の解を見つけるため新しい変数

$$S = r/t \quad (4.150)$$

を導入すると便利である。この時、 S と θ の関数 $w(S, \theta)$ は次式を満たさなければならない。^[註]

$$S^2 \left(1 - \frac{S^2}{C_T^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial S^2} + S \left(1 - \frac{2S^2}{C_T^2}\right) \frac{\partial w}{\partial S} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.151)$$

次に $S < C_T$ の場合に対して Chaplygin 変換として知られている置換

$$\beta = \cosh^{-1}(C_T/S) \quad (4.152)$$

により、式(4.151)は、見事にも

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.153)$$

の Laplace の方程式に帰着できる。この方程式の解法は、たくさんあるが、一つの有効な方法として、

$$w(\beta, \theta) = \text{Re} \{ \chi(\beta, \theta) \}$$

すなわち解析関数 $\chi(\beta, \theta)$ の実部として $w(\beta, \theta)$ を与え、複素変数を $S = \theta + i\beta$ とすれば、解析関数論に基づいた手法が考えられる。 θ は空間的にある有限区間で指定される角度であるから、 S は一般に複素面の帯状領域として与えられる。式(4.152)より、 $S = C_T$ すなわち $r = C_T t$ は $\beta = 0$ に対応し(円柱波の波頭に対応し) $r = 0$ は $\beta = \infty$ (円柱波の中心)に対応する。従って帯状領域は $0 \leq \theta \leq \theta^*$ 、 $0 \leq \beta < \infty$ によって与えらるれば

右図のようになる。

$S > C_T$ の場合、式(4.151)は

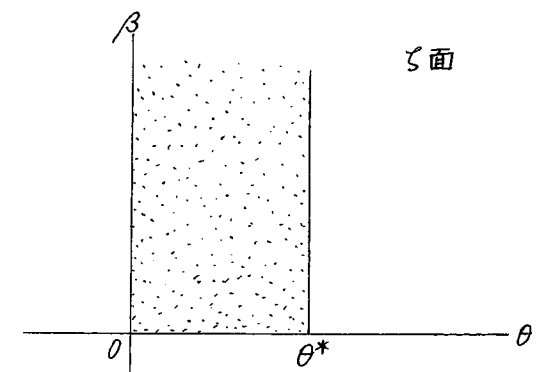
$$S = C_T \sec \alpha$$

の変換により、次のような波動方程式に帰着される。

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d}{d\alpha}(\sec \alpha) &= \sec \alpha \cdot \tan \alpha \\ \sec^2 \alpha &= 1 + \tan^2 \alpha \end{aligned}$$

[註] 式(4.149)から導いてみよ。



解析の対象となる領域

4.9.2 無限体に面外線荷重 時刻 $t=0$ で、面外変形をひきおこすせん

断力が直線に集中してその線方向に作用すれば、波頭の $r = C_T t$ によって定義される軸対称円柱波となる。波頭後方領域は $r/t < C_T$ だから、その場は式(4.153)に支配される。軸対称性より θ には無関係なので式(4.153)の一般解は

$$w = A\beta + C \quad (4.154)$$

荷重が $t=0$ で始めて作用する問題では、もともと波の到来する以前の媒体は静止しているから、波頭で変位が連続となる自然な考え方に立てば、その変位は 0 である。

すなわち $\beta=0$ で $w=0$ (4.155)

したがって式(4.154)と(4.155)より定数 C は 0 となる。また $\beta = \cosh^{-1}(\frac{r}{S}) = \cosh^{-1}(\frac{C_T t}{r})$

だから $w = A \ln \frac{C_T t + (C_T^2 t^2 - r^2)^{1/2}}{r}$ (4.156)

ここで定数 A を定めるために応力 τ_{rz} の表示を求めておく

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\mu A C_T t}{r(C_T^2 t^2 - r^2)^{1/2}} \quad (4.157)$$

さて、単位長さ当りの集中力の大きさを、次のように与える。

$$P = -2\pi \lim_{a \rightarrow 0} [r \tau_{rz}]_{r=a}, \quad (r=a) \quad (4.158)$$

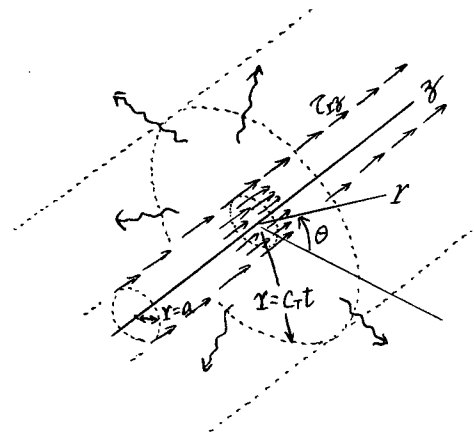
解 w が、このような集中力に対するものとなるように A を式(4.157)と(4.158)より計算すれば $A = P/2\pi\mu$ となる。結局

本例題の衝撃面外せん断線荷重による変位解は、波頭以前で 0 になる

ことを考えあわせて次式のように書ける。

$$w = \frac{P}{2\pi\mu} \ln \frac{C_T t + (C_T^2 t^2 - r^2)^{1/2}}{r} H(C_T t - r) \quad (4.159)$$

ここに $H(\cdot)$ はヘビサイドのステップ関数である。



τ_{rz} が $r=a$ に作用する時の幾何関係

4.9.3 クサビ形に切取られた弾性体の面外せん断波 次に、弾性体内でのクサビ角を $\gamma\pi$ ととり、それぞれの面を $\theta=0$ と $\theta=\gamma\pi$ で指定する。この時の幾何学的様相を図4.7に示す。

$\theta=0$ の面に一様な、しかし時間に依存する剪断力 $\tau_{\theta z}$ が作用するとしよう。この剪断力により z 方向に偏向運動する SH 波が生ずる。任意時間依存の場合は、たとえばデルタ関数のように時間依存する作用力に対する変位解が一たん定まれば、その線形重ね合せにより得ることができよう。そこで表面作用力が $\delta(t)$ で与えらると思えば、場の変位が 0 次の齊次関数で表現できるので、この節では、次の境界条件によって定まる問題を考える。

$$\theta = 0, r \geq 0; \quad \tau_{\theta z} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = \tau_0 \delta(t) \quad (4.160)$$

$$\theta = \gamma\pi, r \geq 0; \quad \tau_{\theta z} = 0 \quad (4.161)$$

ここで γ は $\frac{1}{2}$ に等しいか、またはそれよりも大きいと仮定する。なぜなら $\gamma < \frac{1}{2}$ の場合の解析が解の鏡像関係を利用して求められるので、 $\gamma \geq \frac{1}{2}$ であっても一般性を失わないからである。

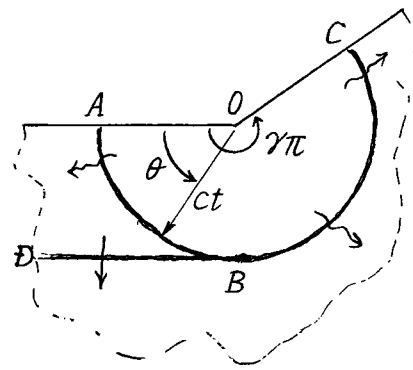
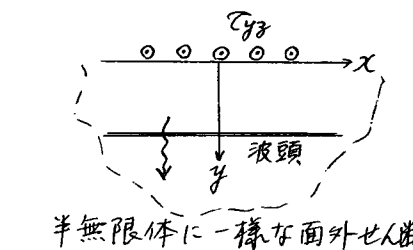


図4.7 時刻 t における波頭



半無限体に一様な面外せん断

の解析が解の鏡像関係を利用して求められるので、 $\gamma \geq \frac{1}{2}$ であっても一般性を失わないからである。

クサビ内を伝わる波の様相は波の伝播の基本的な解析から導びかれる。まず半無限体の表面に面外せん断が $\tau_{yz} = \tau_0 \delta(t)$ で作用すれば、波動方程式 $\partial^2 w / \partial y^2 = (1/C_T^2) \ddot{w}$ に支配される場の解は $w_1 = A f(t - \frac{y}{C_T})$ の形になる。

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w_1}{\partial y} = -\frac{A\mu}{C_T} f'(t - \frac{y}{C_T})$$

$$[\mu \frac{\partial w_1}{\partial y}]_{y=0} = -\frac{A\mu}{C_T} f'(t) = \tau_0 \delta(t)$$

従って $A = -\frac{C_T \tau_0}{\mu}, f(t) = H(t)$
 $f(t - \frac{y}{C_T}) = H(t - \frac{y}{C_T})$

以上より $w_1 = -\frac{C_T \tau_0}{\mu} H(t - \frac{y}{C_T})$

これらの考察から、表面作用力(4.160)によって生ずる変位

$$w_i = -\frac{C_T \tau}{\mu} \quad (4.162)$$

の平面波が図4.7のBDによって示される波頭を有することがわかる。この波を一次波と呼ぶ。弾性体はもとより $t=0$ で静止状態であるから、波頭BDより先は $w=0$ である。従ってBDの波頭では $C_T \tau / \mu$ だけの変位不連続が生ずる。また一次波の他にクサビの頂点Oを中心とする円柱波が生ずる。この円柱波の波頭における変位は連続であるから \widehat{BC} に沿う変位は0である。式(4.152)により、扇形領域OABCは (β, θ) 面の帯状領域 $0 \leq \theta \leq \gamma\pi$, $0 \leq \beta < \infty$ に写像される。 $r=0$ で変位は拘束されたままであるとすれば、 β を増やすにつれ、 w は0に近づく。 (β, θ) 面における条件は、

$$\theta = 0, \beta \geq 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (4.163)$$

$$\theta = \gamma\pi, \beta \geq 0; \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad (4.164)$$

$$\beta = 0, 0 \leq \theta \leq \pi/2; \quad w = w_i \quad (4.165)$$

$$\beta = 0, \pi/2 \leq \theta \leq \gamma\pi; \quad w = 0 \quad (4.166)$$

この場合のラプラスの方程式(4.153)の解は、初歩的な方法でも求まる。式(4.163)(4.164)を満足する解は次の形に書ける。

$$w(\beta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-n\beta/\gamma} \cdot \cos\left(\frac{n\theta}{\gamma}\right) \quad (4.167)$$

この解は、 β を無限大にしても特異性は生じない。区間 $0 \leq \theta \leq \gamma\pi$ において $\cos(n\theta/\gamma)$ の直交性と式(4.165), (4.166)の境界条件より係数 a_n は

$$a_n = \frac{2w_i}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2\gamma}\right) \quad (4.168)$$

従って変位は $w(\beta, \theta) = \frac{2w_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\beta/\gamma} \cos\left(\frac{n\theta}{\gamma}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2\gamma}\right)$, (4.169)

β の置換をもとにゆとせば $w(r, \theta, t)$ が求まる。

前式において、 γ が特別な値となる場合を考えよう。

$\gamma=1/2$ の場合、一様な面外せん断力を受ける四半分体の問題になる。式(4.169)に $\gamma=1/2$ を入れると恒等的に0となり、クサビ頂点を中心とした扇形波の生じないことがわかる。すなわち一次波 $w_i = -C_T \tau / \mu$ のみが伝播する。

$\gamma=1$ の場合、半無限弾性体の問題になる。この時、式(4.169)は

$$w(\beta, \theta) = \frac{2w_i}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\beta} \cos(n\theta) \sin\left(\frac{1}{2}n\pi\right)$$

さらに書きかえり $w(\beta, \theta) = \frac{2w_i}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} [(p_1)^n + (p_2)^n]$ (4.170)

ここに、 $p_1 = \exp[-\beta + i(\frac{\pi}{2} + \theta)]$, $p_2 = \exp[-\beta + i(\frac{\pi}{2} - \theta)]$

式(4.170)の級数は $\tanh^{-1} p$ の展開形となっているから $w(\beta, \theta)$ の解析解は

$$w(\beta, \theta) = \frac{2w_i}{\pi} \operatorname{Im} [\tanh^{-1} p_1 + \tanh^{-1} p_2]$$

上式は、もっと簡潔になり、

$$w(\beta, \theta) = \frac{w_i}{2\pi} \left\{ \tan^{-1} \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\sinh \beta} \right] + \tan^{-1} \left[\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\sinh \beta} \right] \right\} \quad (4.171)$$

式(4.152)より $\sinh \beta = [(C_T t / r)^2 - 1]^{1/2}$ であるから式(4.171)を変形すると、扇形域内で $w(r, \theta) = \frac{w_i}{\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{\cos \theta}{[(C_T t / r)^2 - 1]^{1/2}} \right\}$ (4.172)

になる。これに対応する応力 $\tau_{\theta z}$ は式(4.162)を用いて求めると、

$$\tau_{\theta z} = \frac{[(C_T t)^2 - r^2]^{1/2} C_T \tau \sin \theta}{\pi [(C_T t)^2 - r^2 \sin^2 \theta]} \quad (4.173)$$

γ の値が任意である場合は直接、式(4.169)の計算を電算機等で求めるか、または複素半空間 ($\operatorname{Im} z \geq 0$ など) に等角写像して解析解を得る気の利いた方法もある。^[註1] 解析関数の特長により著しく、簡単な取扱いになるからである。波動方程式の奇次な解を見つける同様な手法は、一般的な討論とともにスミルノフの著書に見られる。^[註2]

(第四章終り)

[註1] J. D. Achenbach *Int. Jour. Solids. Struct.* 6 (1970) p. 379

[註2] 福原満洲雄他監訳「スミルノフ高等数学教程」第6巻 172頁, 共立出版(昭34)

第 5 章

弾性半空間における平面調和波

5.1 平面境界における反射と屈折透過

波を伝える弾性体に材質的な不連続が存在すれば、その波動系は、かなりその影響を受ける。例として無限弾性体が二つの異種半無限体よりなるとき、平面調和波の伝ばの様子を調べてみる。

生ずる平面波は、異種媒体の界面における応力と変位の連続性を満足させるため反射、屈折透過現象として現われる。そのため理論上の全波動場は、これら平面波と入射波との重ね合わせとなる。もちろん、第二の媒体が真空などのように機械的な波(mechanical waves)を伝達しない特別の場合には、透過波は現れない。また、一般の弾性固体と空気とを媒体として組み立てられた場合、厳密に言えば界面を透過する波が存在するが、その効果は小さいとして無視できるのが常である。従って、自由面を境界として有する弾性半無限体では、反射波の状態を詳細に調べてみる。

媒体の材質が定まっているとき、入射波の界面によって生ずる反射波と透過波は一義的に決定される。入射波の位相面は界面に近づき、反射波と透過波のそれは界面から遠ざかるように考慮するためである。

本章のほとんどは、一定位相平面内で、すなわち波動の伝ばベクトル \boldsymbol{P} に垂直な平面内で、振幅の一定な平面波を考えている。しかしながら、材質的に不連続な界面を有する媒体では、一定位相平面上の振幅が空間的に一定とまらない平面波もある。^[註]これらは表面波(surface waves)や界面波(interface waves)と呼ばれ、それぞれ自由面や界面に沿って伝わり、その境界からの距離とともに指数関数的に振幅の減衰する性質を有している。自由面を伝わる波をレーレー波と呼び表面の応答解析に非常に重要となる。このレーレー波の特性を第5.11節で述べる。界面波はストーンレー波と呼ばれ第5.12節に述べる。

[註] 第4.2.1項参照

5.2 平面調和波

ここで、後ほどの議論のために便宜を計って、平面調和波の表式を示しておく。

$$\boldsymbol{u} = A \boldsymbol{d} e^{i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}} \quad (5.1)$$

$$\gamma = \tau(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{P} - ct) \quad (5.2)$$

第4.2節でも述べたように、式(5.1)は単位伝ばベクトル \boldsymbol{P} によって定まる方向に位相速度 C で伝ばする平面波をあらわす。均質等方弾性体では2つの伝ば様式があった。すなわち (1) $\boldsymbol{d} = \pm \boldsymbol{P}$ で $C = C_L$ の縦波と (2) $\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{P} = 0$ で $C = C_T$ の横波である。式(5.1)の変位成分を、第2.4節のフックの法則式(2.28)に入れると、応力成分は次のように表現される。

$$\tau_{lm} = [\lambda \delta_{lm} d_j P_j + \mu (d_l P_m + d_m P_l)] i k A e^{i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}} \quad (5.3)$$

ここに総和規約を適用する。

5.3 時間調和波におけるエネルギー束密度

単位面積の面素に作用して応力ベクトル(traction)が単位時間にする仕事は、その応力ベクトルと体素の速度との内積によって与えられる。この内積を単位時間当りのパワー(仕事率)と呼ぶ。 \mathcal{P} で表わすとそれは

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \quad (5.4)$$

ただし \boldsymbol{t} は応力ベクトルである。第1章で議論したように、パワーは単位面積当りの伝達エネルギーの割合を定義しているから、明らかに、面素を通過するエネルギー束密度を表わしている。 \boldsymbol{n} を、その面素の外向き単位法ベクトルとすれば、 $\boldsymbol{t} = \tau_{lm} \boldsymbol{n}_m$ であるから流入するパワーは、総和規約を用いて表わせば、

$$\mathcal{P} = \tau_{lm} n_m \dot{u}_l \quad (5.5)$$

いま、伝ばベクトル \boldsymbol{P} を有する縦波を調べてみる。まず

$$d_1 = P_1 = \sin\theta, \quad d_2 = P_2 = \cos\theta, \quad d_3 = P_3 = 0$$

とする。流入する領域を囲む境界の面素は $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{P}$ の法ベクトルになるから、

$$\pi_1 = -P_1 = -\sin\theta, \quad \pi_2 = -P_2 = -\cos\theta, \quad \pi_3 = 0$$

式(5.5)に現われる応力テンソル成分は、 $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}$ であるから、それらの表式を式(5.3)より算出すれば、

$$\tau_{11} = (\lambda + 2\mu \sin^2\theta) ikA e^{i\gamma}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = (2\mu \sin\theta \cos\theta) ikA e^{i\gamma}$$

$$\tau_{22} = (\lambda + 2\mu \cos^2\theta) ikA e^{i\gamma}$$

$$\text{ここに } \gamma = k(x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta - c_L t)$$

パワーの計算は \mathbf{u} も \mathbf{d} も実ベクトルをとっていることに注意して、これらを式(5.5)に入れば、 A が実数である条件で次を得る。

$$\mathcal{P}_L = (\lambda + 2\mu) c_L k^2 A^2 \operatorname{Re}(ie^{i\gamma}) \operatorname{Re}(ie^{i\gamma})$$

式(1.87)を利用すれば、パワーの一周期時間平均は

$$\langle \mathcal{P}_L \rangle = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) c_L k^2 A^2 = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \frac{\omega^2}{c_L} A^2 \quad (5.6)$$

運動エネルギー密度の時間平均は

$$\langle \mathcal{K} \rangle = \frac{1}{4} \rho \omega^2 A^2 \quad (5.7)$$

全エネルギーの時間平均は $\langle \mathcal{K} \rangle$ の2倍であるから^[註]

$$\langle \mathcal{U} \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \quad (5.8)$$

$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle \mathcal{U} \rangle c_e$ の関係より、エネルギーの流れる速度が

$$c_e = c_L \quad (5.9)$$

となることがわかる。横波に対しても同様な手順で時間平均パワーが求められ

$$\langle \mathcal{P}_T \rangle = \frac{1}{2} \mu \frac{\omega^2}{c_T} A^2 = \frac{1}{2} c_T \rho \omega^2 A^2 \quad (5.10)$$

したがって $c_e = c_T$ になる。また式(5.6)と(5.10)を比較すればわかるように同一周波数、同一振幅のもとでは $\langle \mathcal{P}_L \rangle > \langle \mathcal{P}_T \rangle$ 、すなわち、時間平均のパワーの伝達量は S 波よりも P 波の方が大きい。

[註] 式(1.89)と(1.90)の計算を参考にして、本節の場合も $\langle \mathcal{K} \rangle = \langle \mathcal{U} \rangle$ となることを示す。

5.4 異種半無限弾性体の接合体

面内変形の波動を考えれば、二つの半無限体の接合界面で、応力と変位の4つの連続条件を満足しなければならない。したがってそれぞれの入射波に対して、一般に2つの反射波と2つの透過波を考える必要がある。これらの各々の波の単位伝播ベクトルを図5.1に示す。入射波と反射波の伝播する媒体の材料定数は、Laméの定数 λ と μ 、そして質量密度 ρ として表記する。また透過波の生ずる第2媒体のその定数には上添字 B を付けて区別する。一般に図5.1に示したそれぞれの平面波は

$$\mathbf{u}^{(n)} = A_n \mathbf{d}^{(n)} \exp[i\gamma_n] \quad (5.11)$$

によって与えられる。ここに指標 n は波を区別するために用いている。また式(5.11)における γ_n は

$$\gamma_n = k_n(x_1 p_1^{(n)} + x_2 p_2^{(n)} - c_n t) \quad (5.12)$$

である。 $n=0$ の時、入射波を表わし

$$\mathbf{p}^{(0)} = \sin\theta_0 \mathbf{i}_1 + \cos\theta_0 \mathbf{i}_2 \quad (5.13)$$

$$\text{もし、入射波が縦波ならば } \mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)}, \quad c_0 = c_L \quad (5.14)$$

また、入射波が横波ならば $\mathbf{d}^{(0)} \cdot \mathbf{p}^{(0)} = 0, \quad c_0 = c_T$ となるが、さらに2つのタイプ、すなわち SV 波と SH 波を区別する。入射 SV 波は

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{p}^{(0)}, \quad c_0 = c_T \quad (5.15)$$

$$\text{また、入射 SH 波は } \mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{i}_3, \quad c_0 = c_T \quad (5.16)$$

によって定まる。反射波と透過波については、それぞれ $n=3$ と 4 とし、まとめて示すと

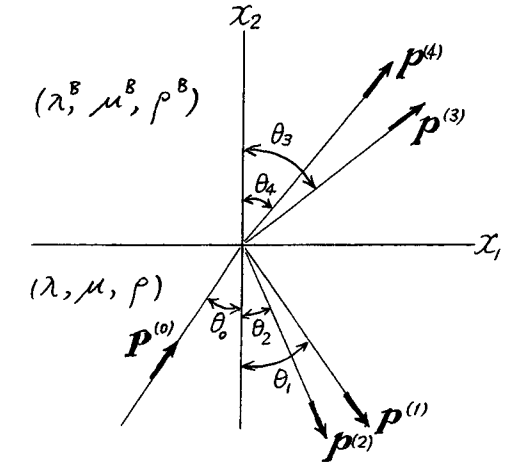


図5.1. 入射波と反射、透過する波

反射縦波: $\mathbf{p}^{(1)} = \sin\theta_1 \mathbf{i}_1 - \cos\theta_1 \mathbf{i}_2$, $\mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{p}^{(1)}$, $C_1 = C_L$ (5.17)

反射横波: $\mathbf{p}^{(2)} = \sin\theta_2 \mathbf{i}_1 - \cos\theta_2 \mathbf{i}_2$, $\mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{p}^{(2)}$, $C_2 = C_T$ (5.18)

透過縦波: $\mathbf{p}^{(3)} = \sin\theta_3 \mathbf{i}_1 + \cos\theta_3 \mathbf{i}_2$, $\mathbf{d}^{(3)} = \mathbf{p}^{(3)}$, $C_3 = C_L^B$ (5.19)

透過横波: $\mathbf{p}^{(4)} = \sin\theta_4 \mathbf{i}_1 + \cos\theta_4 \mathbf{i}_2$, $\mathbf{d}^{(4)} = \mathbf{i}_3 \wedge \mathbf{p}^{(4)}$, $C_4 = C_T^B$ (5.20)

以下の節に、与えられた入射波に対する反射波や透過波の振幅や伝ば方向を求める考え方を示す。はじめは第2媒体のない半無限体の自由面からの完全反射を調べ、その後、接合された空間媒体を調べる。

5.5 SH波の反射

式(5.16)によって定義されるように水平偏向した横波(SH波)の反射を考える。

この波は x_3 方向のみの変位成分を有し、 $x_2 < 0$ の半空間をやって来る入射波は

$$u_3^{(0)} = A_0 \exp[ik_0(x_1 \sin\theta_0 + x_2 \cos\theta_0 - C_T t)]$$

(5.21)

と表現できる。これは $x_2 = 0$ の表面上で

$$u_3^{(0)} = A_0 \exp[ik_0(x_1 \sin\theta_0 - C_T t)]$$

と書けるから表面変位は、見かけの波数と位相速度が $k_0 \sin\theta_0$ と $C_T / \sin\theta_0$ の波となって x_1 方向に伝ばする。注意したいことは $\sin\theta_0 \leq 1$

であるから、見かけの位相速度は、境界平行入射

(grazing incidence)の $\theta_0 = \pi/2$ の場合を除いて C_T よりも速い。反射波の状態は表面の境界条件に依存し、次の2つが考えられる。

(a) $x_2 = 0$ で変位が0

(b) $x_2 = 0$ で応力が0

これらの境界条件は、それぞれ固定面と自由面を表わしている。入射SH波がSH波として反射すると仮定して、上の(a)と(b)の条件が満足されるかどうかを調べてみる。反射するSH波は次式で与えられる。

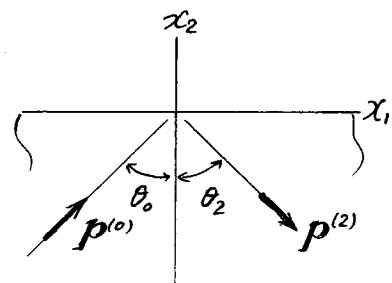


図5.2 SH波の反射

$$u_3^{(2)} = A_2 \exp[ik_2(x_1 \sin\theta_2 - x_2 \cos\theta_2 - C_T t)]$$

(5.22)

(a)の条件 ($x_2 = 0$ で変位0) ならば $u_3 = u_3^{(0)} + u_3^{(2)} \equiv 0$ だから

$$A_0 \exp[ik_0(x_1 \sin\theta_0 - C_T t)] + A_2 \exp[ik_2(x_1 \sin\theta_2 - C_T t)] = 0$$

(5.23)

上式は任意の x_1 と t に対して成り立たねばならないから、指数部を等置することにより

$$k_0 \sin\theta_0 = k_2 \sin\theta_2, \quad k_0 = k_2$$

これを式(5.23)に入れば、大きさが等しく異符号の振幅でなければならぬ。よって

$$k_2 = k_0, \quad \theta_2 = \theta_0, \quad A_2 = -A_0$$

(5.24a, b, c)

このことは、反射によって変位の位相が反転(180°変化)することを示している。

(b)の条件(自由表面)ならば、この場合、応力成分 τ_{2j} を考える必要がある。式(5.21)で与えられる入射波に対し、恒等的に0とならない応力成分は τ_{23} である。それは $\mu u_{3,2}$ で得られるから表面($x_2 = 0$)における表式は、入射波成分に対し、

$$\tau_{23}^{(0)} = ik_0 \mu A_0 \cos\theta_0 \exp[ik_0(x_1 \sin\theta_0 - C_T t)]$$

また、反射波成分に対し

$$\tau_{23}^{(2)} = -ik_2 \mu A_2 \cos\theta_2 \exp[ik_2(x_1 \sin\theta_2 - C_T t)]$$

従って $\tau_{23}^{(0)} + \tau_{23}^{(2)}$ が $x_2 = 0$ で0となる(b)の条件から

$$k_2 = k_0, \quad \theta_2 = \theta_0, \quad A_2 = A_0$$

(5.25; a, b, c)

自由面によるSH波の反射に位相変化は起らないことを示している。

(a)の条件を満足する全波動場(入射波と反射波の重ね合せ)は、式(5.21)(5.22)(5.24)より

$$u_3 = 2i A_0 \sin(k_0 x_2 \cos\theta_0) \exp[ik_0(x_1 \sin\theta_0 - C_T t)]$$

(5.26)

また(b)の条件を満足する全波動場は

$$u_3 = 2 A_0 \cos(k_0 x_2 \cos\theta_0) \exp[ik_0(x_1 \sin\theta_0 - C_T t)]$$

(5.27)

となる。式(5.26)と(5.27)はいずれも x_2 方向に定在波、 x_1 方向に進行波となる波動を表わしている。垂直入射($\theta_0 = 0$)の時、式(5.26)(5.27)は完全な定在波となる。もし表面が完全に固定(a)の条件されると $\theta_0 = \pi/2$ の時 $u_3 \equiv 0$ となるので、水平偏向した波動に、平行入射(grazing incidence)は存在しない。

5.6 P波の反射

本節では、変位ベクトルと応力ベクトルが (x_1, x_2) 面内にある平面縦波が入射する時の反射を考える。第5.4節で導入した記号を用いれば入射波の反射波の

$$\mathbf{u}^{(n)} = A_n \mathbf{d}^{(n)} e^{i\bar{\gamma}_n} \quad (5.28)$$

によって表記できる。ここに $\bar{\gamma}_n$ は式(5.12)によって定義される。 $x_2=0$ の自由表面における反射を考える場合、考えなければならない応力成分 $\tau_{2j}^{(n)}$ ($j=1, 2$) は、フックの法則の式(2.40)から次のようになる。

$$\tau_{22}^{(n)} = i k_n [(\lambda+2\mu)d_2^{(n)}p_2^{(n)} + \lambda d_1^{(n)}p_1^{(n)}] A_n e^{i\bar{\gamma}_n} \quad (5.29)$$

$$\tau_{21}^{(n)} = i k_n \mu [d_2^{(n)}p_1^{(n)} + d_1^{(n)}p_2^{(n)}] A_n e^{i\bar{\gamma}_n} \quad (5.30)$$

$x_2=0$ における変位と応力は式(5.28)~(5.30)において $\bar{\gamma}_n$ を次式の $\bar{\gamma}_n$ におきかえることにより得られる。

$$\bar{\gamma}_n = k_n(x_1 p_1^{(n)} - C_n t) \quad (5.31)$$

指標 n は、入射P波に対して $n=0$ とする。

式(5.13)と(5.14)に従えば

$$d_1^{(0)} = \sin\theta_0, \quad d_2^{(0)} = \cos\theta_0, \quad (5.32a)$$

$$p_1^{(0)} = \sin\theta_0, \quad p_2^{(0)} = \cos\theta_0. \quad (5.32b)$$

$$C_0 = C_L \quad (5.32c)$$

になるから、入射波成分によって生ずる $x_2=0$ 表面の変位と応力は

$$u_1^{(0)} = A_0 \sin\theta_0 \exp(i\bar{\gamma}_0) \quad (5.33)$$

$$u_2^{(0)} = A_0 \cos\theta_0 \exp(i\bar{\gamma}_0) \quad (5.34)$$

$$\tau_{22}^{(0)} = i k_0 (\lambda+2\mu \cos^2\theta_0) A_0 \exp(i\bar{\gamma}_0) \quad (5.35)$$

$$\tau_{21}^{(0)} = 2i k_0 \mu \sin\theta_0 \cos\theta_0 A_0 \exp(i\bar{\gamma}_0) \quad (5.36)$$

ここに、 $\bar{\gamma}_0 = k_0(x_1 \sin\theta_0 - C_L t) \quad (5.37)$

反射P波は式(5.17)より $d_1^{(1)} = \sin\theta_1, \quad d_2^{(1)} = -\cos\theta_1 \quad (5.38a);$

$p_1^{(1)} = \sin\theta_1, \quad p_2^{(1)} = -\cos\theta_1, \quad (5.38b); \quad C_1 = C_L \quad (5.38c).$

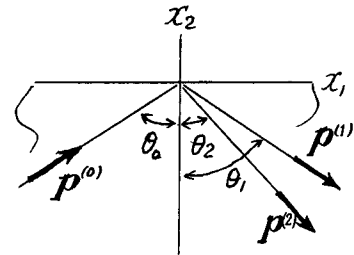


図5.3 P波の反射

入射P波は (x_1, x_2) 面内変位の反射縦波と反射横波を生じさせることがわかる。反射横波、すなわちSV波は $n=2$ で指示され、次のようになる。図5.3参照

$$d_1^{(2)} = \cos\theta_2, \quad d_2^{(2)} = \sin\theta_2 \quad (5.39a)$$

$$p_1^{(2)} = \sin\theta_2, \quad p_2^{(2)} = -\cos\theta_2 \quad (5.39b)$$

$$C_2 = C_T \quad (5.39c)$$

反射波の場合は、 $x_2=0$ における境界条件に依存しており、その条件は次のものが考えられる。

- (a) $x_2=0$ 面に応力が作用しない; $\tau_{22} = \tau_{21} = 0$ (自由境界)
- (b) $x_2=0$ で変位が0 ; $u_1 = u_2 = 0$ (固定境界)
- (c) 垂直変位と接線応力が0 ; $u_2 = 0, \tau_{21} = 0$ (平滑境界)
- (d) 接線変位と垂直応力が0 ; $u_1 = 0, \tau_{22} = 0$

各々の境界条件に対して考えるよりも、逆に入射P波がP波として反射し、しかも反射角も振幅も波数も等しくなるような境界条件をあてはめる方が分かりやすい。

すなわち $A_2 \equiv 0, \quad \theta_1 = \theta_0, \quad A_1 = A_0, \quad k_1 = k_0 \quad (5.40)$

式(5.28)~(5.30), (5.38)(5.40)を用いれば、反射P波は $x_2=0$ において

$$u_1^{(1)} = A_0 \sin\theta_0 e^{i\bar{\gamma}_0} \quad (5.41)$$

$$u_2^{(1)} = -A_0 \cos\theta_0 e^{i\bar{\gamma}_0} \quad (5.42)$$

$$\tau_{22}^{(1)} = i k_0 (\lambda+2\mu \cos^2\theta_0) A_0 e^{i\bar{\gamma}_0} \quad (5.43)$$

$$\tau_{21}^{(1)} = -2i k_0 \mu \sin\theta_0 \cos\theta_0 A_0 e^{i\bar{\gamma}_0} \quad (5.44)$$

全波動場における $x_2=0$ の変位と応力を求めるため、式(5.33)~(5.36)を式(5.41)~(5.44)に重ね合わせれば、垂直変位と接線応力が $x_2=0$ で0になることがすぐわかる。明らかに、式(5.40)は $x_2=0$ の境界条件(c)による結果として与えられるものである。従って、(c)で定義されるなめらかな境界面により入射縦波は同一振幅、同一波数の縦波として反射する。

同様に $A_2 \equiv 0, \quad \theta_1 = \theta_0, \quad A_1 = -A_0, \quad k_1 = k_0$ も考えられる。

これらの関係は、接線変位と垂直応力を $x_2=0$ で0にすることがすぐ確かめられる。従

って、境界条件(d)のもとでは入射縦波は縦波のみで反射する。(c)と(d)で定義される二つの混合境界条件は、いずれも、あいにく多少、物理現象上、特殊な場合に当たる。より実際的な意味合いをもつものは、(a)または(b)の場合であろう。これらの条件に対しては自由面あるいは固定面を保つために、反射波はP波のみならず、SV波も生じるであろうと予想できよう。

以下に条件(a)、すなわち自由境界に対する反射を考える。 $x_2=0$ で3つの波(入射、反射P、反射SV)に対する応力ベクトルの和が0にならないから式(5.29)(5.30)(5.38)(5.38)(5.39)より

$$\tau_{22} = \tau_{22}^{(0)} + \tau_{22}^{(1)} + \tau_{22}^{(2)} = 0 \quad \text{すなわち}$$

$$ik_0(\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_0) A_0 e^{i\bar{\gamma}_0} + ik_1(\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_1) A_1 e^{i\bar{\gamma}_1} - 2ik_2 \mu \sin \theta_2 \cos \theta_2 A_2 e^{i\bar{\gamma}_2} = 0 \quad (5.45)$$

$$\tau_{21} = \tau_{21}^{(0)} + \tau_{21}^{(1)} + \tau_{21}^{(2)} = 0 \quad \text{すなわち}$$

$$2ik_0 \mu \sin \theta_0 \cos \theta_0 A_0 e^{i\bar{\gamma}_0} - 2ik_1 \mu \sin \theta_1 \cos \theta_1 A_1 e^{i\bar{\gamma}_1} + ik_2 \mu (\sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2) A_2 e^{i\bar{\gamma}_2} = 0 \quad (5.46)$$

式(5.45)と(5.46)はすべての x_1 と t に対して成り立たねばならない。両式に指数関数が因子として現われているので

$$\bar{\gamma}_0 = \bar{\gamma}_1 = \bar{\gamma}_2$$

となるから、式(5.31)の $\bar{\gamma}_n$ の定義より、次の関係が成立する。

$$k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 = k \quad ; \text{見からの波数}$$

$$k_0 C_L = k_1 C_L = k_2 C_T = \omega \quad ; \text{角周波数}$$

これらの結果より

$$k_1 = k_0 \quad (5.47) \quad , \quad k_2/k_0 = C_L/C_T = \kappa \quad (5.48)$$

$$\theta_1 = \theta_0 \quad (5.49) \quad , \quad \sin \theta_2 = \kappa^{-1} \sin \theta_0 \quad (5.50)$$

を得る。こゝに κ は材料定数であって式(4.8)のごとく

$$\kappa = [2(1-\nu)/(1-2\nu)]^{1/2} \quad (5.51)$$

で与えられる縦波の横波に対する速度比である。 $\kappa > 1$ かつ $0 < \theta_2 \leq \pi/2$ の領

域を考えるから、式(5.50)より $\theta_2 < \theta_1$ になる。図5.3参照。表面 $x_2=0$ に沿って伝ばする波の波数と位相速度は、それぞれ $k = k_0 \sin \theta_0$ と $C = \omega/k = C_L/\sin \theta_0$ になる。反射波の入射波に対する振幅比、 A_1/A_0 と A_2/A_0 を与える代数方程式(5.45)(5.46)は

$$(\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_0)(A_1/A_0) - \kappa \mu \sin 2\theta_2 (A_2/A_0) = -(\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_0)$$

$$-\mu \sin 2\theta_0 (A_1/A_0) - \kappa \mu \cos 2\theta_2 (A_2/A_0) = -\mu \sin 2\theta_0$$

この連立方程式を解いて

$$A_1/A_0 = (\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_2 - \kappa^2 \cos^2 2\theta_2) / (\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_2 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_2) \quad (5.52)$$

$$A_2/A_0 = 2\kappa \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_2 / (\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_2 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_2) \quad (5.53)$$

式(5.52)(5.53)の振幅比より、次のようないくつかの事実が明らかになる。

- (1) 振幅比は入射波の波長に無関係であるが入射角 θ_0 と材料定数 κ に依存する。
- (2) 垂直入射($\theta_0=0^\circ$)の場合、 $\theta_1=0$ 、 $A_2/A_0=0$ 、 $A_1/A_0=-1$ である。すなわち、入射P波はP波として反射する。 $A_0 d_2^{(0)} = A_1 d_2^{(1)}$ を得るから反射波の変位は入射波と位相が一致している。全波動場は二つの波(入射波と反射波)の重ね合せより定在波の場となる。

- (3) 平行入射($\theta_0=90^\circ$; grazing incidence)で入射P波がP波として反射し、その波は入射波と位相が 180° ずれる。二つの波を重ね合せれば変位は0となる。

- (4) もし、 $2\theta_0 \sin 2\theta_2 = \kappa^2 \cos^2 2\theta_2$ ならば入射P波の反射波はSV波のみとなる。この現象は完全なモード変換(mode conversion)である。その反射SV波の振幅は、

$$A_2/A_0 = \kappa \cot 2\theta_2$$

として得られる。例としてポアソン比 $\nu=0.25$ の時を考えれば $\kappa=\sqrt{3}$ にあたるから完全なモード変換は $\theta_0=60^\circ$ でおこる。図5.4は $\nu=0.25$ の時の振幅比 A_1/A_0 と A_2/A_0 を入射角 θ_0 に対して示したものである。図5.5は ν を補助変数にして A_1/A_0 の θ_0 依存性を示したものである。

条件(b)、すなわち固定境界に対する反射も全く類似した手法で議論できる。

このときの得られる振幅比を示せば

$$A_1/A_0 = [\cos(\theta_0 + \theta_2)] / [\cos(\theta_0 - \theta_2)]$$

$$A_2/A_0 = \sin 2\theta_0 / [\cos(\theta_0 - \theta_2)]$$

ここに、 θ_2 と θ_0 の関係は、式(5.50)によって与えられている。

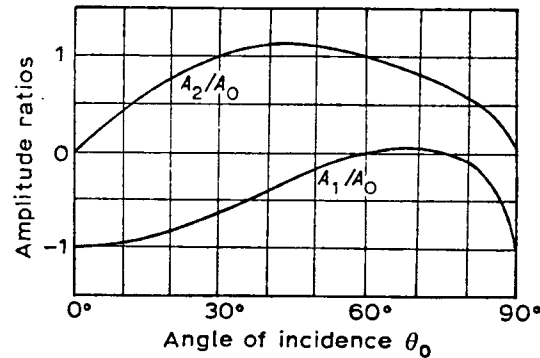


図5.4. P波の反射による反射波の振幅 ($\nu=0.25$)
 (A_1/A_0 : 入射波に対する反射P波の相対振幅, A_2/A_0 : 反射SV波の相対振幅)

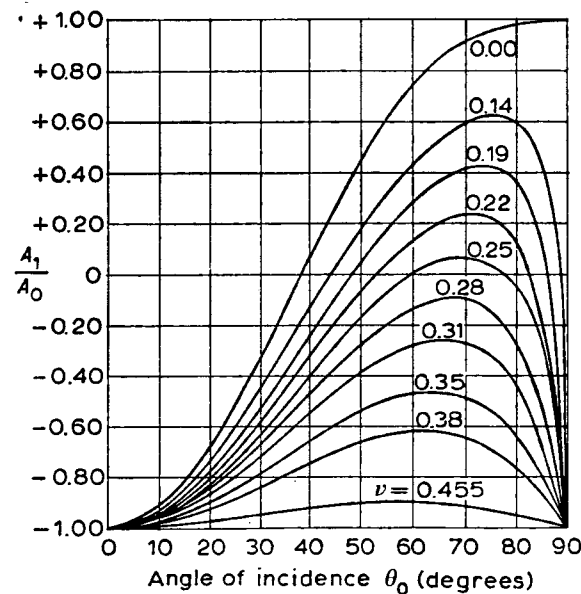


図5.5 ポアソン比を補助変数として変えた時の反射P波の相対振幅

5.7 SV波の反射

入射SV波の反射を調べるためP波の時と同様、式(5.28)~(5.30)を用いる。入射SV波を $n=0$ で指示すれば

$$p_1^{(0)} = \sin\theta_0, \quad p_2^{(0)} = \cos\theta_0 \quad (5.54a)$$

$$d_1^{(0)} = -\cos\theta_0, \quad d_2^{(0)} = \sin\theta_0 \quad (5.54b)$$

$$C_0 = C_T \quad (5.54c)$$

入射波のみによる変位と応力成分は $x_2=0$ の反射面で次のように書ける。

$$u_1^{(0)} = -A_0 \cos\theta_0 \exp(i\bar{\eta}_0) \quad (5.55)$$

$$u_2^{(0)} = A_0 \sin\theta_0 \exp(i\bar{\eta}_0) \quad (5.56)$$

$$\tau_{22}^{(0)} = 2i k_0 \mu \sin\theta_0 \cos\theta_0 A_0 \exp(i\bar{\eta}_0) \quad (5.57)$$

$$\tau_{21}^{(0)} = i k_0 \mu (\sin^2\theta_0 - \cos^2\theta_0) A_0 \exp(i\bar{\eta}_0) \quad (5.58)$$

ここに
$$\bar{\eta}_0 = k_0 (x_1 \sin\theta_0 - C_T t) \quad (5.59)$$

$x_2=0$ の反射面が自由面の時を考える。入射SV波によって、この場合、反射SV波と反射P波が生ずるから、3つの波による応力ベクトルがその反射面で0となる。したがって、

$$\tau_{22} = \tau_{22}^{(0)} + \tau_{22}^{(1)} + \tau_{22}^{(2)} \equiv 0 \quad \text{すなわち}$$

$$2i k_0 \mu \sin\theta_0 \cos\theta_0 A_0 \exp(i\bar{\eta}_0) + i k_1 (\lambda + 2\mu \cos^2\theta_1) A_1 \exp(i\bar{\eta}_1) - 2i k_2 \mu \sin\theta_2 \cos\theta_2 A_2 \exp(i\bar{\eta}_2) = 0 \quad (5.60)$$

$$\tau_{21} = \tau_{21}^{(0)} + \tau_{21}^{(1)} + \tau_{21}^{(2)} \equiv 0 \quad \text{すなわち}$$

$$i k_0 \mu (\sin^2\theta_0 - \cos^2\theta_0) A_0 \exp(i\bar{\eta}_0) - 2i k_1 \mu \sin\theta_1 \cos\theta_1 A_1 \exp(i\bar{\eta}_1) + i k_2 \mu (\sin^2\theta_2 - \cos^2\theta_2) A_2 \exp(i\bar{\eta}_2) = 0 \quad (5.61)$$

を得る。ただし反射P波と反射S波に関する量のそれぞれに対し、 $n=1$ と $n=2$ の添字を用いて表記した。任意の t と x_1 に対して上式が成り立つことと指数関数が因数として現われているから $\bar{\eta}_n$ の定義に注意して $k_0 \sin\theta_0 = k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2 = k$ として、 $k_0 C_T = k_1 C_L = k_2 C_T = \omega$ となる。これらは次のようにより簡潔になる。

$$k_2 = k_0 \quad (5.62), \quad k_1/k_0 = C_T/C_L = \kappa^{-1} \quad (5.63)$$

$$\theta_2 = \theta_0 \quad (5.64), \quad \sin \theta_1 = \kappa \sin \theta_0 \quad (5.65)$$

式(5.62)~(5.65)を用いれば A_1/A_0 と A_2/A_0 に関する代数方程式が次のようになる。

$$A_1/A_0 = -\kappa \sin 4\theta_0 / (\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_1 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_0) \quad (5.66)$$

$$A_2/A_0 = (\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_1 - \kappa^2 \cos^2 2\theta_0) / (\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_1 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_0), \quad (5.67)$$

A_1/A_0 の式から反射P波は $\theta_0 = 0, \pi/4, \pi/2$ の時、振幅が0となって反射波のなくなる事がわかる。このような θ_0 の時は、入射SV波はSV波のまま反射する。一方、式(5.67)で分子が0となるならば入射SV波はP波に変換されて反射する。さて、式(5.65)を見れば三角関数値が±1の範囲内をとるから、 θ_0 の値によっては実数 θ_1 の存在しない場合が考えられる。すなわち θ_0 がある角度 $\arcsin(1/\kappa)$ より大きい時、 θ_1 は実数とならない。したがってこれに対応する反射角(波)が存在しなくなる。このような $\arcsin(1/\kappa)$ を臨界角という。たとえば $\nu = 0.25$ ならば $\kappa = \sqrt{3}$ であり、 θ_1 を実数値にするためには $\theta_0 < 35^\circ 16'$ の条件を満たさなければならない。 $\theta = \theta_{cr}$ (臨界角) の時は、式(5.65)~(5.67)より

$$\theta_1 = \pi/2, \quad A_1/A_0 = \frac{4\sqrt{\kappa^2-1}}{\kappa(2-\kappa^2)}, \quad A_2/A_0 = -1$$

となる。もし $\theta_0 > \theta_{cr}$ ならば成分 $p_2^{(1)}$ が

$$p_2^{(1)} = -\cos \theta_1 = -i\kappa\beta \quad ; \quad \beta = \sqrt{\sin^2 \theta - \kappa^2}$$

であるから反射P波は次のように書けるだろう。

$$u^{(1)} = S d^{(1)} \exp(k_0 \beta x_2) \exp[ik_0 \sin \theta_0 (x_1 - c_L t / \kappa \sin \theta_0) - i\alpha] \quad (5.68)$$

ただし

$$S = \frac{A_0 \sin 4\theta_0}{[\kappa^2 \cos^4 2\theta_0 + 4(\kappa^2 \sin^2 \theta_0 - 1) \sin^2 2\theta_0 \sin^2 \theta_0]}^{1/2} \quad (5.69)$$

$$\tan \alpha = 2(\kappa^2 \sin^2 \theta_0 - 1)^{1/2} \sin 2\theta_0 \sin \theta_0 / (\kappa \cos^2 2\theta_0) \quad (5.70)$$

式(5.68)は第4.2節で述べた不等振幅の平面波の例になっている。式(4.14)を参考に、ベクトル \mathbf{p}' と \mathbf{p}'' 、波数 k と位相速度 C は

$$\mathbf{p}' = p_1^{(1)} \mathbf{i}_1 = \kappa \sin \theta_0 \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{p}'' = p_2^{(1)} \mathbf{i}_2 = -\kappa(\sin^2 \theta_0 - \kappa^2) \mathbf{i}_2$$

$$k = k_1 = k_0 / \kappa, \quad C = C_L$$

式(5.67)が2つの複素共役の比になっているから $|A_2/A_0| = 1$ であり

$$u^{(2)} = -A_0 d^{(2)} \exp[ik_0 (x_1 \sin \theta_0 - x_2 \cos \theta_0 - C_L t) - 2i\alpha]$$

ここに α は式(5.70)によって定義されている。反射P波は、波数 $k_0 \sin \theta_0$ 、位相速度 $C_L / (\kappa \sin \theta_0)$ で x_1 方向に伝はし、振幅は反射面からの距離とともに減衰している。このような波を表面波と呼んでいる。振幅比 A_2/A_0 を図5.6に示した。補助変数をポアソン比とするそれぞれの曲線は $\nu = 0$ を除いてある入射角(臨界角) θ_{cr} 以下である。このような臨界角を与えるポアソン比は図5.7からわかる。 θ_{cr} 曲線がそれぞれある。また入射SV波あるいは入射P波が完全にモード変換する入射角 θ_0 も同図よりわかる。それぞれSV-P曲線とP-SV曲線がそれぞれある。

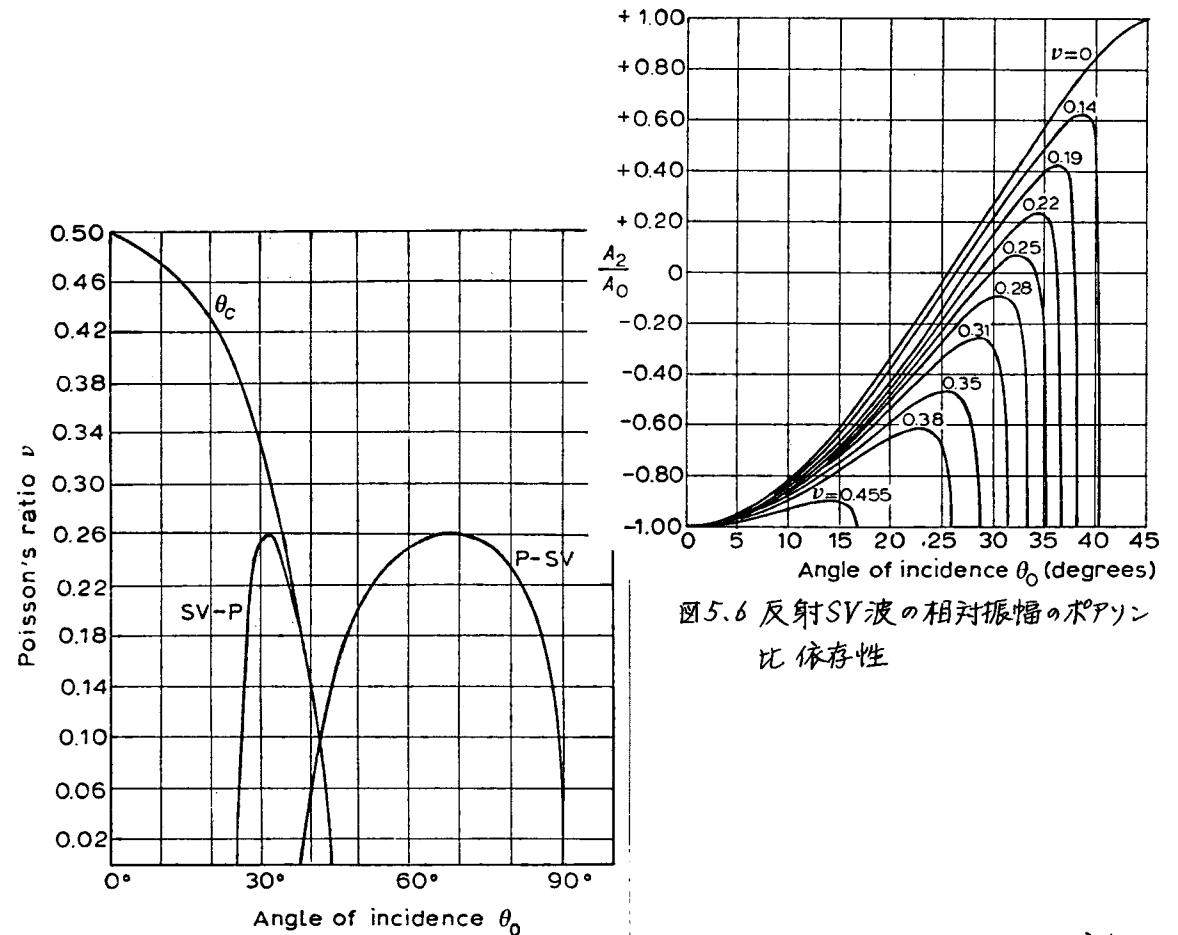


図5.6 反射SV波の相対振幅のポアソン比依存性

図5.7 特殊な入射角(全反射の臨界角 θ_{cr} , SV波の完全モード変換する入射角, P波の完全モード変換する入射角)を与える θ_{cr} 曲線, SV-P曲線, P-SV曲線とポアソン比

5.8 自由面によるエネルギーの反射と分配

第5.3節で述べたように、縦波と横波の時間平均エネルギー束密度は

$$\langle \mathcal{P}_L \rangle = \frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\frac{\omega^2}{c_L}A^2, \quad \langle \mathcal{P}_T \rangle = \frac{1}{2}\mu\frac{\omega^2}{c_T}A^2$$

と表わせる。そこで図5.8に示すような断面積 ΔS_0 の入射P波の波線束(Beam)を考えよう。これに対応する反射P波と反射SV波の波線束の断面積を、それぞれ ΔS_1 と ΔS_2 とする。この時、関与する表面積 ΔS には外からの仕事もなく、そして波の伝播過程でエネルギーの散逸もない場合には、 ΔS_0 をよぎって流入する平均エネルギー量は、 ΔS_1 と ΔS_2 をよぎって流出する平均エネルギー量の和に等しいはずである。従って、

$$\frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\frac{\omega^2}{c_L}A_0^2\Delta S_0 = \frac{1}{2}(\lambda+2\mu)\frac{\omega^2}{c_L}A_1^2\Delta S_1 + \frac{1}{2}\mu\frac{\omega^2}{c_T}A_2^2\Delta S_2 \quad (5.71)$$

幾何学的関係から $\Delta S_0 = \Delta S_1 = \Delta S \cos\theta_0$, $\Delta S_2 = \Delta S \cos\theta_2$ であるから上式は

$$\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 \frac{c_T \cos\theta_2}{c_L \cos\theta_0} = 1 \quad (5.72a)$$

または $K = \sin\theta_0 / \sin\theta_2 = c_L / c_T$ だから上式は

$$\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 \frac{\sin 2\theta_2}{\sin 2\theta_0} = 1 \quad (5.72b)$$

θ_2 を消去するならば

$$\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{A_0}\right)^2 \frac{1}{K \cos\theta_0} \left(1 - \frac{\sin^2\theta_0}{K^2}\right)^{1/2} = 1, \quad (5.73)$$

以前に導いた振幅比を与える式(5.52)と(5.53)は式(5.72b)の関係を満たしていることが確かめられるから、式(5.71)のエネルギーの恒等関係に矛盾のないことがわかる。従って、平均入射エネルギーが自由境界面の反射によってP波とSV波にどのように分配されて行くのか式(5.71)~(73)のいずれかによって決まらばよい。

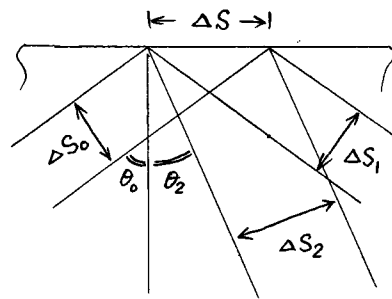


図5.8 入射波と反射波の波線束

5.9 SH波の反射と透過

$x_2 > 0$ の空間が $x_2 < 0$ の空間と異なる媒体によって占められているならば、波は、境界面 $x_2 = 0$ を透過して、その第二媒体へ伝わる。この時の反射と屈折透過現象のいくつかの特徴ある点を、まず、入射SH波に対する解析で見よう。SH波が入射する場合は、反射波も透過波もSH波のみになる。伝播ベクトル(波面法線ベクトル)を第5.4節の記号を用いて図5.9に示す。入射波成分による変位が

$$u_3^{(0)} = A_0 \exp[ik_0(x_1 \sin\theta_0 + x_2 \cos\theta_0 - c_T t)]$$

と表わせるから $x_2 = 0$ の平面上では

$$u_3^{(0)} = A_0 \exp[ik_0(x_1 \sin\theta_0 - c_T t)]$$

$$z_{23}^{(0)} = ik_0 \mu \cos\theta_0 A_0 \exp[ik_0(x_1 \sin\theta_0 - c_T t)]$$

となる。この他の応力と変位は0である。

反射SH波は $x_2 = 0$ で

$$u_3^{(2)} = A_2 \exp[ik_2(x_1 \sin\theta_2 - c_T t)]$$

$$z_{23}^{(2)} = -ik_2 \mu \cos\theta_2 A_2 \exp[ik_2(x_1 \sin\theta_2 - c_T t)]$$

第二媒体の物質定数を上添字Bによって指定すれば透過SH波は、

$$u_3^{(4)} = A_4 \exp[ik_4(x_1 \sin\theta_4 - c_T^B t)]$$

$$z_{23}^{(4)} = ik_4 \mu^B \cos\theta_4 A_4 \exp[ik_4(x_1 \sin\theta_4 - c_T^B t)]$$

界面($x_2 = 0$)で変位と応力が連続であることから A_2 と A_4 を求める A_0 表示の二つの方程式が導ける。考えるすべての t と x_1 について恒等的に等号が成立しなければならぬから現われる指数関数を等置して、 $k_0 \sin\theta_0 = k_2 \sin\theta_2 = k_4 \sin\theta_4$ として $k_0 c_T = k_2 c_T = k_4 c_T^B$ を得る。したがって

$$k_2 = k_0, \quad \theta_2 = \theta_0 \quad (5.74)$$

$$k_4 = (c_T / c_T^B) k_0 \quad (5.75)$$

$$\sin\theta_4 = (c_T^B / c_T) \sin\theta_0 \quad (5.76)$$

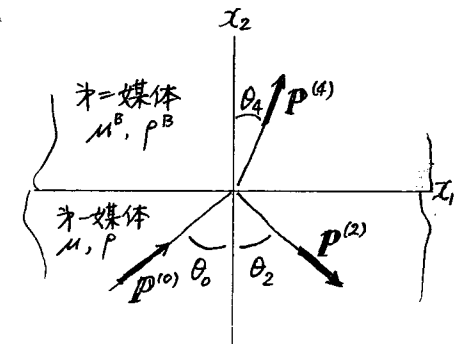


図5.9 SH波の反射と透過

$x_2=0$ における変位の連続性から $A_0 + A_2 = A_4$, また $x_2=0$ における応力の連続性から $\mu \cos \theta_0 (A_0 - A_2) = (C_T/C_T^B) \mu^B \cos \theta_4 \cdot A_4$ になる。これらより振幅比を求めると

$$A_2/A_0 = \{ \mu \cos \theta_0 - \mu^B (C_T/C_T^B) \cos \theta_4 \} / \{ \mu \cos \theta_0 + \mu^B (C_T/C_T^B) \cos \theta_4 \} \quad (5.77)$$

$$A_4/A_0 = \{ 2\mu \cos \theta_0 \} / \{ \mu \cos \theta_0 + \mu^B (C_T/C_T^B) \cos \theta_4 \} \quad (5.78)$$

その振幅比の様子を図5.10に示す。

さて、式(5.74)~(5.78)より、次の事柄がわかる。

(1) $\mu \cos \theta_0 - \mu^B (C_T/C_T^B) \cos \theta_4 = 0$ ならば波は完全に透過する。したがって、入射角と材質比によっては、SH波の反射しない場合が起こりうる。

(2) もし、 $(C_T^B/C_T) \sin \theta_0 > 1$ ならば、 $\sin \theta_4$ は1より大きくなり、 $\cos \theta_4$ は純虚数となる。そして透過波による変位は

$$u_3^{(4)} = A_4 \exp(-t x_2) \exp[i k_4 (x_1 \sin \theta_4 - C_T^B t)]$$

$$t = k_0 [\sin^2 \theta_0 - (C_T/C_T^B)^2]^{1/2}$$

と表わせる。このことは透過する波がない代わりに、第=媒体中に界面からの距離とともに、振幅の指数関数的に減衰する運動が生ずることを示している。 $\cos \theta_4$ が虚数の時、 A_2/A_0 が二つの複素共役数の比の形で与えられるから、入射波振幅と等しいが位相変化が起っている。^[註] 透過波の生じないので全反射の状態である。

(3) もし、 $x_2 > 0$ が真空ならば当然 反射波のみとなり

$$r_2 = r_0, \quad \theta_2 = \theta_0, \quad A_2 = A_0$$

となって 式(5.25)に一致する。

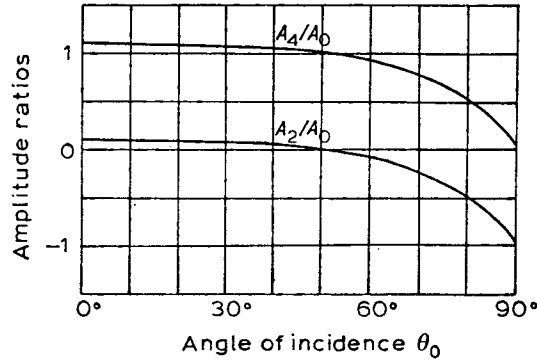


図5.10: SH波の反射と透過における振幅比 ($\mu^B/\mu = 0.64$, $C_T^B/C_T = 0.8$ の時.)

[註] もし、 $\sin \theta_0 = C_T/C_T^B$ 、すなわち $\sin \theta_4 = 1$ ならば位相変化は生じない。

5.10 P波の反射と透過

一般に、異種弾性体の界面にP波が入射すると図5.1に示すように、P波とSV波の両方の反射波と透過波が生ずる。入射P波に対する変位と応力は式(5.33)~(5.36)によって与えられ、また、反射P波と反射SV波に対しては式(5.28)~(5.30)にそれぞれ式(5.38)と(5.39)を考慮して求められる。透過P波に対しては $n=3$ として

$$d_1^{(3)} = \sin \theta_3, \quad d_2^{(3)} = \cos \theta_3 \quad (5.79a)$$

$$p_1^{(3)} = \sin \theta_3, \quad p_2^{(3)} = \cos \theta_3 \quad (5.79b)$$

$$C_4 = C_L^B \quad (5.79c)$$

となり、そして透過SV波では $n=4$ として

$$d_1^{(4)} = -\cos \theta_4, \quad d_2^{(4)} = \sin \theta_4 \quad (5.80a)$$

$$p_1^{(4)} = \sin \theta_4, \quad p_2^{(4)} = \cos \theta_4 \quad (5.80b)$$

$$C_4 = C_T^B \quad (5.80c)$$

によって定まる。ここに c = 媒体の波の速度 C_L^B と C_T^B はそれぞれ $[(\lambda+2\mu^B)/\rho^B]^{1/2}$ と $[\mu^B/\rho^B]^{1/2}$ である。

物理的に最も考えられる状態の完全接合では、変位と応力の $x_2=0$ における連続性から

$$u_j^{(0)} + u_j^{(1)} + u_j^{(2)} = u_j^{(3)} + u_j^{(4)} \quad ; j=1 \text{ or } 2 \quad (5.81)$$

$$\tau_{2j}^{(0)} + \tau_{2j}^{(1)} + \tau_{2j}^{(2)} = \tau_{2j}^{(3)} + \tau_{2j}^{(4)} \quad ; j=1 \text{ or } 2 \quad (5.82)$$

式(5.81)と(5.82)がすべての x_1 と t の値に対して常に成り立たねばならないことから

$$\bar{r}_0 = \bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \bar{r}_3 = \bar{r}_4 \quad (5.83)$$

式(5.31)を用いれば、式(5.83)は

$$r_0 \sin \theta_0 = r_1 \sin \theta_1 = r_2 \sin \theta_2 = r_3 \sin \theta_3 = r_4 \sin \theta_4 \quad (5.84)$$

$$r_0 C_L = r_1 C_L = r_2 C_T = r_3 C_L^B = r_4 C_T^B \quad (5.85)$$

を意味する。 θ_0 と r_0 が与えられれば他の角度と波数が式(5.84)(5.85)より決まるので、式(5.81)と(5.82)は、入射振幅 A_0 に対する振幅 A_1, A_2, A_3, A_4 の比を未知数とする4つの連立方程式となる。それを行列を用いて表現すれば、次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} -\sin\theta_1 & -\cos\theta_2 & \sin\theta_3 & -\cos\theta_4 \\ \cos\theta_1 & -\sin\theta_2 & \cos\theta_3 & \sin\theta_4 \\ \sin 2\theta_1 & \kappa \cos 2\theta_2 & \frac{\mu^B C_L}{\mu C_L^B} \sin 2\theta_3 & -\frac{\mu^B C_L}{\mu C_L^B} \cos 2\theta_4 \\ -\kappa^2 \cos 2\theta_2 & \kappa \sin 2\theta_2 & \frac{\mu^B C_L}{\mu C_L^B} (\kappa^B)^2 \cos 2\theta_4 & \frac{\mu^B C_L}{\mu C_L^B} \sin 2\theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = A_0 \begin{pmatrix} \sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \\ \sin 2\theta_0 \\ \kappa^2 \cos 2\theta_0 \end{pmatrix}, \quad (5.86)$$

式(5.86)の整理に当たり、関係式 $(\lambda + 2\mu \cos^2\theta_0)/\mu = \kappa^2 \cos 2\theta_2$ を用いた。これを解いて得られる振幅比 A_j/A_0 ($j=1\sim 4$) の具体的な表式は Ewing らの著書^[註]に掲載されている。ここでは $\theta_0 = 0$ の特別な垂直入射の場合を検討してみよう。式(5.84)よりすべての角度が 0 となり、式(5.86)の第1, 第3式から $A_2 = A_4 = 0$ である。残りの振幅比は次のように得られる。

$$A_1/A_0 = (\rho^B C_L^B - \rho C_L) / (\rho^B C_L^B + \rho C_L) \quad (5.87)$$

$$A_3/A_0 = 2\rho C_L / (\rho^B C_L^B + \rho C_L) \quad (5.88)$$

式(5.87)は、質量密度と縦波速度の積が二つの媒体で等しい時 ($\rho^B C_L^B = \rho C_L$)、反射波が生じないことを示している。積 ρC_L はその媒体の機械インピーダンスであった(第1.3節参照)。もし、 $\rho^B C_L^B > \rho C_L$ ならば A_1 と A_2 の符号は同一であるが、伝は方向が反射によって変わるから、その波の位相は 180° 変化する。式(5.87)と(5.88)はそれぞれ垂直入射時の調和波に対する反射と透過の割合(反射率と透過率)を示している。第1章で、その割合を任意形状の応カパルスについて議論した。

5.11 L-L-波

運動の主要部分が、半無限弾性体の自由表面の近くに限定された状態で伝はるような波について、Lord Rayleigh が研究した。表面波もしくは L-L-波といわれているこの波は、自由表面からの距離とともに運動がほぼ指数関数的に減衰するところに特徴がある。ここでは x_1 方向に伝はる二次元平面波の L-L-波の可能性と運動の様子を調べてみる。 x_1 方向に伝わるということ、次の形で変位成分を与える。

$$u_1 = A e^{-b_1 x_2} \exp[ik(x_1 - ct)] \quad (5.89)$$

$$u_2 = B e^{-b_2 x_2} \exp[ik(x_1 - ct)] \quad (5.90)$$

$$u_3 = 0 \quad (5.91)$$

x_2 とともに、変位が減衰し、 x_2 を無限大にした時 0 となるように b の実部は正值であるとする。式(5.89)~(5.91)を変位運動方程式に入れれば、定数 A と B に対する 2 本の同次式を得る。これらを連立させて、意味のある解が存在するための条件、すなわち

$$[C_1^2 b^2 - (C_1^2 - C^2) \rho^2][C_2^2 b^2 - (C_2^2 - C^2) \rho^2] = 0 \quad (5.92)$$

が導かれる。式(5.92)の 2 根は

$$b_1 = \rho \left(1 - \frac{C^2}{C_1^2}\right)^{1/2}, \quad b_2 = \rho \left(1 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^{1/2}$$

となる。 b_1 と b_2 は $C < C_1 < C_2$ の時に、正の平方根をとった実数である。 b_1 と b_2 に対応する比 (B/A) は、次のように算出できる。

$$\left(\frac{B}{A}\right)_1 = -\frac{b_1}{i\rho}, \quad \left(\frac{B}{A}\right)_2 = \frac{i\rho}{b_2}$$

式(5.89)~(5.91)にもとづいて、変位運動方程式の一般解は、 b_1 と b_2 に対する解の重ね合せとして、次の形に書けよう。

$$u_1 = [A_1 e^{-b_1 x_2} + A_2 e^{-b_2 x_2}] \exp[ik(x_1 - ct)] \quad (5.93)$$

$$u_2 = \left[-\frac{b_1}{i\rho} A_1 e^{-b_1 x_2} + \frac{i\rho}{b_2} A_2 e^{-b_2 x_2}\right] \exp[ik(x_1 - ct)] \quad (5.94)$$

定数 A_1 と A_2 と C は、 $x_2 = 0$ で応カ τ_{22} と τ_{21} がなくなるように決めなければならない。式(5.93)(5.94)と(5.91)を、 $x_2 = 0$ における τ_{22} と τ_{21} の表式に代入すれば、

$$2b_1 A_1 + \left(2 - \frac{C^2}{C_1^2}\right) \rho^2 \frac{A_2}{b_2} = 0, \quad \left(2 - \frac{C^2}{C_1^2}\right) A_1 + 2b_2 \frac{A_2}{b_2} = 0$$

ここで A_1 と A_2 の係数行列式を 0 とおけば、 L-L-波速度 C を与えるための良く知られた式の

$$\left(2 - \frac{C^2}{C_1^2}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{C^2}{C_1^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{C^2}{C_2^2}\right)^{1/2} = 0 \quad (5.95)$$

を得る。式(5.95)は波数 ρ が入っていないので、表面波には波数依存性がない。すなわち非分散的である。

[註] Ewing, W.M., Jardetzky, W.S., Press, F. "Elastic Waves in Layered Media" New York, McGraw-Hill Book Co., (1957). P.87,

式(5.95)を誘導する解析は第2.10節で用いた変位ポテンシャルを使えば多少簡単になる。平面ひずみの二次元問題では、変位成分 u_1 と u_2 は $\varphi(x_1, x_2, t)$ と $\psi_3(x_1, x_2, t)$ の表示で与えられる。そのポテンシャルは波動方程式

$$\nabla^2 \varphi = (1/C_L)^2 \ddot{\varphi} \quad \text{と} \quad \nabla^2 \psi_3 = (1/C_T)^2 \ddot{\psi}_3$$

を満たし、また変位成分の一般形が式(5.89)と(5.90)の形をとるから、それぞれ

$$\varphi = C e^{-\epsilon_1 x_2} e^{i k(x_1 - ct)} \quad , \quad \psi_3 = D e^{-\epsilon_2 x_2} e^{i k(x_1 - ct)}$$

と置ける。これらを τ_{22} と τ_{21} に代入し、 $x_2=0$ の境界条件を用いれば式(5.95)を得る。式(5.95)の左辺に $C=C_T$ を入れれば1になり、また ϵ を非常に小さな正数として、 $C=\epsilon C_T$ を入れれば $-2[1-(C_T/C_L)^2]\epsilon^2$ となり、これは常に負となる。従って $C=0$ と $C=C_T$ の間に少なくとも1つの実根が存在することがわかる。

さて、区間 $0 < C < C_T$ にただ1つの実根のみ存在するかどうか、また実軸もしくは複素平面内のどこにも根が存在するかどうか考える必要がある。そこで式(5.95)の根の数を検討するために便利な方法として偏角の原理(principle of the argument)による手法がある。これは以下に述べるような複素変数解析の理論に基づいた原理である。

関数 $G(z)$ が一つの閉回路 C の内部とその上の有限個の極を除いて解析的(正則)であるとき、 $G(z)$ が C 上で0点をもちないとするれば

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dG}{dz} \frac{dz}{G(z)} = Z - P$$

が成立する。ただし Z は C 内の0点の数であり、 P は極の数である。この Z と P は、それぞれ0点と極の次数を含めて数える。すなわち、3位の極ならば P を3として数える。この公式は閉回路内の被積分関数の特異性に関する原理であるから、 Z と P の値は、その

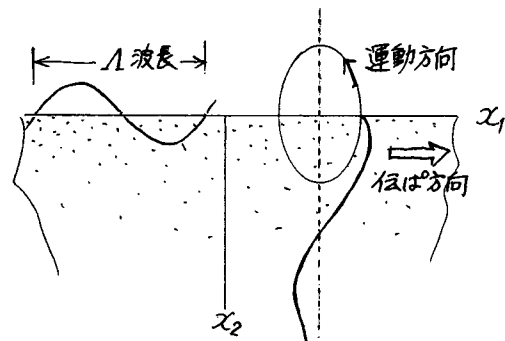


図 5.11 レー波

閉回路 C を $G(z)$ の各々の0点もしくは極を回る個々の閉回路に置き換え、その閉回路の数によって再検討することができる。また、Laurent級数展開を用いれば、これらの個々の回路積分は容易に評価でき、その積分和は $Z-P$ の値を与える。

レー方程式に偏角の原理を適用するため、式(5.95)を次の形に書きかえておくこと便利である。

$$R(s) = (2s^2 - s_T^2)^2 + 4s^2(s_L^2 - s^2)^{1/2}(s_T^2 - s^2)^{1/2} \quad (5.96)$$

ここに $s=1/c$ は表面波のスローネス(slowness: 遅度)であり、また s_L と s_T は、それぞれ縦波と横波のスローネス、すなわち

$$s_L = 1/C_L \quad , \quad s_T = 1/C_T \quad (5.97, a, b)$$

である。複素 s 面において関数 $R(s)$ は $1/C_L \leq |\text{Re}(s)| \leq 1/C_T$ 、 $\text{Im}(s)=0$ に沿って切断する分岐を入れることにより一価関数になる。そこで図5.12aに示すように Γ と Γ_L と Γ_T からなる積分路 C について考える。関数 $R(s)$ は明らかに複素 s 面に極を持たない。従って閉回路 $C = \Gamma + \Gamma_L + \Gamma_T$ 内の0点の数は

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dR}{ds} \frac{ds}{R(s)} \quad (5.98)$$

によって与えられることがわかる。 s 面から v 面への写像 $v=R(s)$ により0点を数えられる。 s 面の回路 C は v 面で C_v へ写像されるとすれば積分(5.98)は

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \frac{dv}{v}$$

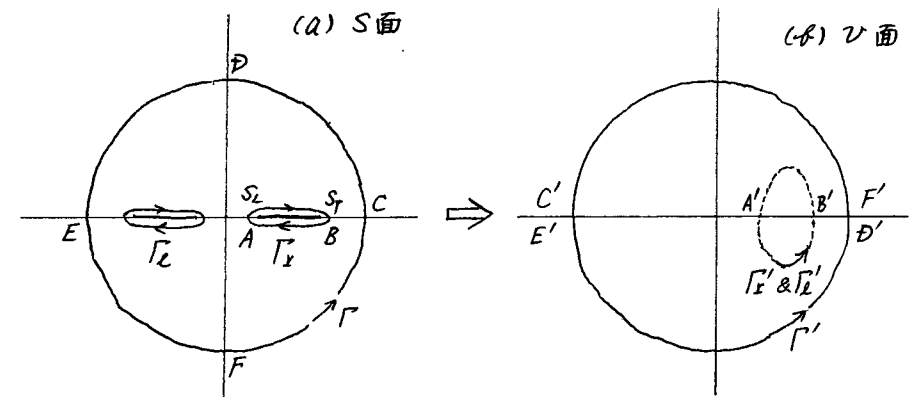


図 5.12 S面からv面への写像

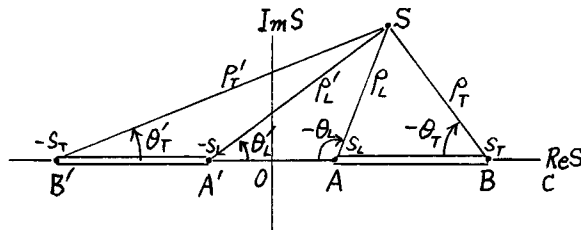
前記の式は $v=0$ で一位の極を持つから、 Z は単に v 面の原点を反時計方向に回る写像回路 C_T の回数になる。したがって S 面で 0 点の数を探するためには、回路 C の v 面への写像を忠実に追跡することである。 $R(S)$ は偶関数、すなわち $R(S) = R(-S)$ だから Γ_L と Γ_R の写像は同一で重なるので、そのうちの一方 (Γ_L とする) のみ考えれば十分である。図 5.12 から

点 A で $R(S_L) = (2S_L^2 - S_T^2)^2$

分岐線分 AB で $R(S) = (2S^2 - S_T^2)^2 \mp i4S^2(S^2 - S_L^2)^{1/2}(S_T^2 - S^2)^{1/2}$

になる。複符号の (-) 符号は分岐線の上側に沿う場合、(+) 符号は下側に沿う場合にある。^[註] また、点 B で $R(S_T) = S_T^4$ である。また Γ_L に沿って $\text{Re}[R(S)] > 0$ である

[註] 複素 S 面で次のような (ρ, θ) 極座標を導入する。そして動点 S と結ぶ動径の方向が複素 S 面原点 0 の方向となった時、偏角 θ を 0 と定める。これに解析する空間分岐が指定される。



$(S_L - S) = \rho_L e^{i\theta_L}$, $(S_T - S) = \rho_T e^{i\theta_T}$
 $(S_L + S) = \rho'_L e^{i\theta'_L}$, $(S_T + S) = \rho'_T e^{i\theta'_T}$

そうすれば、式(5.96)の右辺第2項にあらわれる多価関数は以下の手順で、上図の一価空間で具体的な値が指定できる。表にして考えれば ρ と θ のとる値は

Sの位置	ρ_L	θ_L	ρ_T	θ_T	ρ'_L	θ'_L	ρ'_T	θ'_T
OA上	$S_L - S$	0	$S_T - S$	0	$S_L + S$	0	$S_T + S$	0
AB分岐線の上岸	$S - S_L$	$-\pi$	$S_T - S$	0	$S_L + S$	0	$S_T + S$	0
BC上	$S - S_L$	$-\pi$	$S - S_T$	$-\pi$	$S_L + S$	0	$S_T + S$	0
AB分岐線の下岸	$S - S_L$	$-\pi$	$S_T - S$	-2π	$S_L + S$	0	$S_T + S$	0

となるから AB分岐線の上側に沿って

$$4S^2(S_L^2 - S^2)^{1/2}(S_T^2 - S^2)^{1/2} = 4S^2[(S_L - S)(S_L + S)(S_T - S)(S_T + S)]^{1/2}$$

$$= 4S^2[\rho_L \rho'_L \rho_T \rho'_T \exp\{i(\theta_L + \theta'_L + \theta_T + \theta'_T)\}]^{1/2}$$

$$= 4S^2[(S^2 - S_L^2)(S_T^2 - S^2)]^{1/2} \exp\{i(-\pi)/2\}$$

$$= -i4S^2(S^2 - S_L^2)^{1/2}(S_T^2 - S^2)^{1/2}$$

ABの下側に沿えば

$$4S^2(S_L^2 - S^2)^{1/2}(S_T^2 - S^2)^{1/2} = 4S^2[(S^2 - S_L^2)(S_T^2 - S^2)]^{1/2} \exp\{i(-3\pi)/2\}$$

$$= i4S^2(S^2 - S_L^2)^{1/2}(S_T^2 - S^2)^{1/2}$$

これで根号の内部は正值になっている。

から Γ_L の写像 Γ'_L は v 面の右半空間にある。図 5.12(b) を見よ。 $|S|$ が非常に大きい時、

$$R(S) = 2S^2(S_L^2 - S_T^2) + O(1) \tag{5.99}$$

を得るから、^[註] Γ の写像 Γ' は v 面の原点を2度回る。 Γ_L と Γ_R の写像は原点を回らなかつたから結局、 $R(S)$ には S 面に2つの 0 点が存在し、式(5.95)が2根を有することがわかった。式(5.95)が C^2 に関する方程式であるからその2根は互いに反対符号で絶対値の等しいものであって、前に述べたように実軸の $-C_T < C < C_T$ 部分のどこかにあるだろうことがわかる。 C は伝ば速度にあたるので正実根のみを考えればよい。実さい、 C^2 に対する根は式(5.95)を有利化して C^2 の3次式になおして求められる。この場合 C^2 について3実根を得るが、そのうちの2つは自乗操作による有利化のさいに入ってきた無縁根である。

C の正実根で表面波速度を与えるものを C_R と表わす。式(5.95)からポアソン比を補助変数と見て求めた値を C_T で無次元化して表にすれば以下ようになる。

表 5.1 レー波速度

v	C_R/C_T	v	C_R/C_T	v	C_R/C_T
0	0.874032	0.11	0.894953	0.22	0.914404
0.01	0.875982	0.12	0.896789	0.23	0.916085
0.02	0.877924	0.13	0.898612	0.24	0.917751
0.03	0.879857	0.14	0.900422	0.25	0.919401
0.04	0.881780	0.15	0.902219	0.26	0.921036
0.05	0.883694	0.16	0.904003	0.27	0.922654
0.06	0.885598	0.17	0.905772	0.28	0.924256
0.07	0.887492	0.18	0.907528	0.29	0.925842
0.08	0.889374	0.19	0.909269	0.30	0.927412
0.09	0.891246	0.20	0.910995	0.31	0.928965
0.10	0.893106	0.21	0.912707	0.32	0.930502 (続く)

[註] $S = \rho e^{i\theta}$ として前頁で定義した $\theta_L, \theta_T, \theta'_L, \theta'_T$ を用いれば $|S| = \rho \rightarrow \infty$ の時、 $\theta_L \rightarrow \pi - \theta$, $\theta_T \rightarrow \pi - \theta$, $\theta'_L \rightarrow \theta$, $\theta'_T \rightarrow \theta$ となる。従って $(S_L^2 - S^2)^{1/2}(S_T^2 - S^2)^{1/2}$ の偏角は $\frac{1}{2}(\theta_L + \theta'_L + \theta_T + \theta'_T) \rightarrow \frac{1}{2}(\pi - \theta) + \theta + (\pi - \theta) + \theta = 2\pi/2$ かつ $R(S) = (2S^2 - S_T^2)^2 - 4S^2(S^2 - S_L^2)^{1/2}(S_T^2 - S^2)^{1/2}$ として $(S^2 - S_L^2)^{1/2} \sim S(1 - \frac{S_L^2}{2S^2})$ などを利用すれば $|S| \rightarrow \infty$ の漸近形 $R(S) \sim 2S^2(S_L^2 - S_T^2)$ を得る。

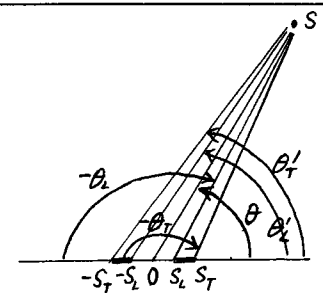


表5.1の続き

ν	C_R/C_T	ν	C_R/C_T	ν	C_R/C_T
0.33	0.932022	0.39	0.940792	0.45	0.948959
0.34	0.933526	0.40	0.942195	0.46	0.950262
0.35	0.935013	0.41	0.943581	0.47	0.951549
0.36	0.936483	0.42	0.944951	0.48	0.952820
0.37	0.937936	0.43	0.946303	0.49	0.954074
0.38	0.939372	0.44	0.947640	0.50	0.955312

ポアソン比 ν によって C_R/C_T のよい近似値を得るための近似式として

$$C_R/C_T = (0.862 + 1.14\nu)/(1+\nu) \quad (5.100)$$

C_R/C_T の値は ν の単調増加関数として与えられる。

さて、これらの位相速度 C_R に対応する表面波の位相は、変形はどのようになるだろうか。その算出結果を表面における深さ方向変位 u_2 で標準化して図5.13に示す。深さ x_2 は波長 Λ で標準化した。また、それらに対応する応力を表面における τ_{ii} で標準化して図5.14に示した。いずれも点線はポアソン比が0.25の時、実線が0.34の時のものである。これらの図は、表面波波長の約2倍程度の表層に限定された波動であることをよく示している。表面における物体点の運動を調べる。 $\nu=0.25$ の時、 $u_1 = 0.4227 \lambda A \sin\{c(C_R t - x_1)\}$ 、 $u_2 = 0.6204 \lambda A \cos\{c(C_R t - x_1)\}$ となるから、運動軌跡は楕円であり運動方向は図5.11に示すように反時計方向(逆行楕円; retrograde)である。深さ x_2 がほぼ 0.2Λ で、 u_1 の

符号が変わるので運動方向が逆回転する。軌跡楕円の長軸は自由面に垂直であり短軸は平行になる。その比は、ほぼ3:2になる。レ-レ波は非常に詳しく研究されており、その応用も見られる。^[註]

レ-レ波に特徴ある点は、波動分散性がなく、表面近くの波動であることだった。また、何らかの負荷によってこの波はP波やS波とともに自由境界面に生ずるが、二次元的空間の問題と考えられる場合、P波やS波の体積波(body waves)が円状に広がるのに対し、レ-レ波は境界に垂直な平面波として一次元的に伝わりゆく。従ってそれぞれの波の関与する幾何学的ひろがりからレ-レ波は体積波に比べて減衰のしにくい波であることがわかる。このことから、波源からある距離へたれば、波動による応答は、レ-レ波によるものが支配的である。三次元的に

もっと一般的に表面波の性質を調べるためにはスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル ψ_α が

$$\phi = \bar{\Phi}(x_1, x_3) e^{-\alpha x_2 + i k c t} \quad (5.101)$$

$$\psi_\alpha = \bar{\Psi}_\alpha(x_1, x_3) e^{-\alpha x_2 + i k c t} \quad (5.102)$$

の形になると考える。 ϕ と ψ_α が波動方程式を満たし、 $x_2=0$ でせん断応力 $\tau_{2\alpha}$ (ただし $\alpha=1, 3$) が消えるという条件から、 ϕ と ψ_2 は次式のように $\psi_1, \psi_3, c, \lambda$ によって表わせる。

$$\phi = -\frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{c^2}{c_T^2}\right) e_{\alpha\beta} \psi_{\alpha,\beta} \quad ; \alpha=1, 2, 3 \quad (5.103)$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right)^{1/2} \psi_{\beta,\beta} \quad ; \alpha=1, 2, 3 \quad (5.104)$$

また a と b は
$$a = \lambda \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right)^{1/2}, \quad b = \lambda \left(1 - \frac{c^2}{c_T^2}\right)^{1/2} \quad (5.105a, b)$$

式(5.103)で $e_{\alpha\beta}$ は二次元的交代記号であり

$$e_{11} = e_{33} = 0, \quad e_{13} = 1, \quad e_{31} = -1$$

である。さらに ψ_1 と ψ_3 は波動方程式

$$\nabla^2 \psi_\alpha + k^2 \psi_\alpha = 0 \quad ; \alpha=1, 2, 3 \quad (5.106)$$

を満足しなければならない。ただし $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ とする。そして $x_2=0$ で垂直応力 τ_{22} が0になるという残りの条件を考慮すれば、式(5.95)を得る。要するに、二次元解析であっても三次元解析であっても当然のことながら表面波の位相速度は等しく、レ-レ波速度である。

[註] Viktorov, I.A., "Rayleigh and Lamb waves", New York, Plenum Press, (1967).
 Eringen, A.C and Suhubi, E.S., "Elastodynamics" Vol II, P.518, New York, Academic Press (1975)
 Knowles, J.K., Jour. Geophysical Research 71 (1966) P.5480,
 大橋ほか訳(Y.C.フン著)「固体の力学/理論」179頁、培風館(昭45)

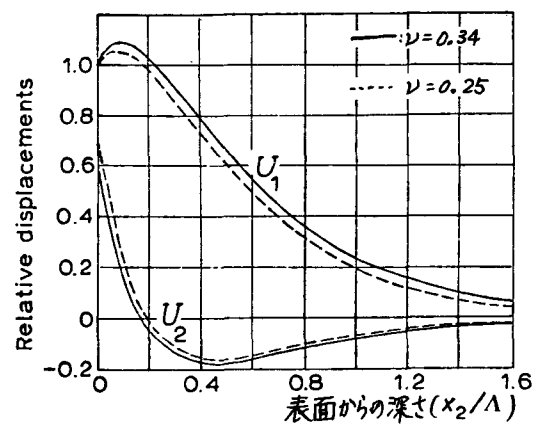


図5.13 変位振幅(表面の u_2 で標準化している)

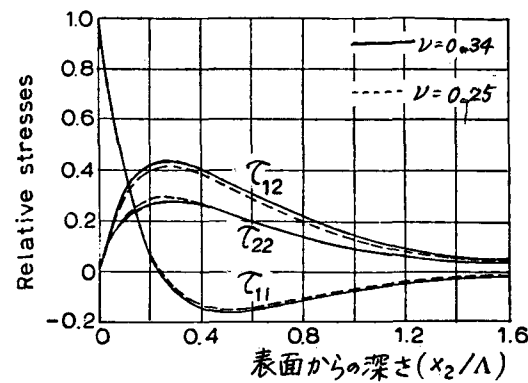
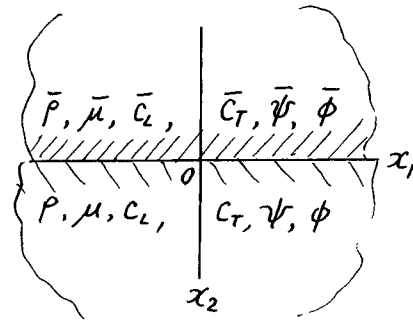


図5.14 応力振幅(表面の τ_{11} で標準化している)

5.12 ストンレー波 (Stoneley waves)

レ-レー波のように自由境界に沿って伝わる表面波は、その媒体の動的応答を性格づけるので重要である。では、この様な特性波が異種半無限弾性体の接合界面 ($x_2=0$) に存在するだろうか。それを調べてみよう。右図のように座標系を定め、第一媒体 ($x_2 < 0$) に対する量は上付線を示す。 $x_2 \geq 0$, $x_2 \leq 0$ のそれぞれの領域に対する変位ポテンシャルは次のように置くことができる。



$$\phi = A_2 \exp(-k \nu_1 x_2) \cdot \exp[ik(x_1 - ct)] \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad (5.107a)$$

$$\psi = B_2 \exp(-k \nu_2 x_2) \cdot \exp[ik(x_1 - ct)] \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad (5.107b)$$

$$\bar{\phi} = \bar{A}_1 \exp(k \bar{\nu}_1 x_2) \cdot \exp[ik(x_1 - ct)] \quad , \quad x_2 \leq 0 \quad (5.107c)$$

$$\bar{\psi} = \bar{B}_1 \exp(k \bar{\nu}_2 x_2) \cdot \exp[ik(x_1 - ct)] \quad , \quad x_2 \leq 0 \quad (5.107d)$$

ただし $\nu_1^2 = 1 - (C^2/c_L^2) \quad , \quad \nu_2^2 = 1 - (C^2/c_T^2) \quad (5.107e)$

$$\bar{\nu}_1^2 = 1 - (C^2/\bar{c}_L^2) \quad , \quad \bar{\nu}_2^2 = 1 - (C^2/\bar{c}_T^2) \quad (5.107f)$$

(5.107a)-(5.107d) で与えられるポテンシャルは波動方程式を満たしている。式(5.107e)-(5.107f) で定まる $\nu_1, \nu_2, \bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2$ の実部が正であるならば、これらのポテンシャルによる波動は界面 ($x_2=0$) 近辺で大きく遠ざかるにつれ指数関数的に減衰する。すなわち界面の波を与えている。ここで界面における連続条件

$$u_1 = \bar{u}_1, \quad u_2 = \bar{u}_2, \quad \tau_{22} = \bar{\tau}_{22}, \quad \tau_{21} = \bar{\tau}_{21} \quad (x_2=0) \quad (5.108)$$

考慮すると未定係数 $A_2, B_2, \bar{A}_1, \bar{B}_1$ に対する有次の連立方程式を得る。それらは

$$A_2 - \bar{A}_1 + i \nu_2 B_2 + i \bar{\nu}_2 \bar{B}_1 = 0$$

$$-i \nu_1 A_2 - i \bar{\nu}_1 \bar{A}_1 + B_2 - \bar{B}_1 = 0$$

$$(1 + \nu_2^2) A_2 - \bar{\rho} (1 + \bar{\nu}_2^2) \bar{A}_1 + 2i \nu_2 B_2 + 2i \bar{\rho} \bar{\nu}_2 \bar{B}_1 = 0$$

$$2i \nu_1 A_2 + 2i \bar{\rho} \bar{\nu}_1 \bar{A}_1 - (1 + \nu_2^2) B_2 + \bar{\rho} (1 + \bar{\nu}_2^2) \bar{B}_1 = 0$$

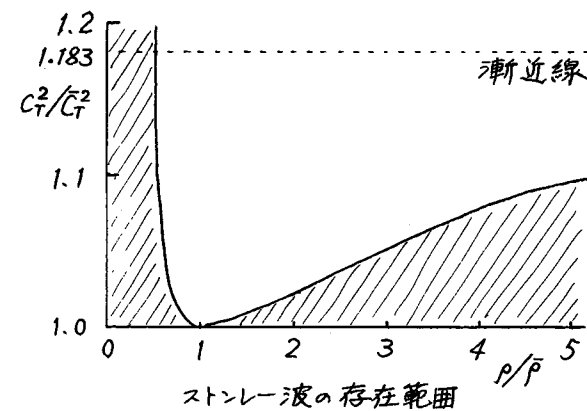
ただし $\bar{\rho} = \bar{\mu}/\mu$ である。有意な解をもつ条件として係数行列式の値を 0 とおいて

$$\Delta(C^2) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \nu_2 & -\bar{\nu}_2 \\ \nu_1 & \bar{\nu}_1 & 1 & 1 \\ -(1+\nu_2^2) & \bar{\rho}(1+\bar{\nu}_2^2) & -2\nu_2 & 2\bar{\rho}\bar{\nu}_2 \\ 2\nu_1 & 2\bar{\rho}\bar{\nu}_1 & 1+\nu_2^2 & \bar{\rho}(1+\bar{\nu}_2^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (5.109)$$

式(5.109)を見れば、界面波の位相速度 C を決定するこの特性方程式が波数 k に依存しないことがわかるから、この波は分散性のない波であることがわかる。式(5.109)を用いて

$$\Delta(C^2) = (C/c_T)^4 \left\{ (1 - \bar{\rho} m^2)^2 - (\bar{\nu}_1 + \bar{\rho} m^2 \nu_1)(\bar{\nu}_2 + \bar{\rho} m^2 \nu_2) \right\} - 4(1 - \bar{\rho})(C/c_T)^2 \left\{ 1 - \bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2 - \bar{\rho} m^2 (1 - \nu_1 \nu_2) \right\} + 4(1 - \bar{\rho})^2 (1 - \nu_1 \nu_2)(1 - \bar{\nu}_1 \bar{\nu}_2) = 0 \quad (5.110)$$

ここに $\bar{\rho} = \bar{\mu}/\mu$, $m = c_T/\bar{c}_T$, または $\bar{\rho} m^2 = \bar{\rho}/\rho$ である。上式を満たす根の数と、その様子は偏角の原理(前節参照)を用いて調べられる。その結果、常に 2 根を有するがそれらの根は必ずしも実数とは限らない。特定のリーマン面(分岐線によって一価にされたある分岐の面)上にあるとも限らない。 ν_1 の多価性から来ているので、解析の対象分岐を物理現象に合うように選んで調べる必要がある。そこで具体的にポアソン比を 0.25 (すなわち $\nu = \mu$, $\bar{\nu} = \bar{\mu}$) の時の実根の存在範囲を考れば、図のように影をつけた領域に限定される。^[註] 一般性を失わずに $c_T > \bar{c}_T$ または $m > 1$ とおくことができるから



できるから ストンレー波の存在する材質の組合せは比較的狭い範囲になる。もし $c_T > \bar{c}_T$ ならば C/c_T の値はレ-レー波速度に対する c_T/\bar{c}_T よりも小さくはならないことが数値的にわかっているから $\bar{c}_R < C < \bar{c}_T < c_T$

[註] A.C. Eringen and E.S. Suhubi "Elastodynamics" Vol. II, P.539 (前出)

したがって、柔かい半無限体を伝わるレレー波と横波との中間の速度でストーンレー波は伝はする。多くの実用材では $\bar{\rho}$ と ρ の値は数倍も異なるのは特殊な場合であるから二つの材質の剛性が近い値の時 ($\mu \approx \bar{\mu}$) のみストーンレー波が存在する。なお、界面における物質点の運動はレレー波の時の運動と非常によく似ている。

次に、(5.109)の特別な場合として $\beta \rightarrow 0$ で $\beta m^2 \neq 0$ となる時を考える。これは一方が液体で他方が弾性体 なた状態にあたり、次式に帰着される。

$$\begin{vmatrix} \sqrt{1-(c/c_L)^2} & / & \sqrt{1-(c/c^*)^2} \\ (c/c_T)^2 - 2 & -2\sqrt{1-(c/c_T)^2} & -\frac{\rho^*}{\bar{\rho}}(c/c_T)^2 \\ -2\sqrt{1-(c/c_L)^2} & (c/c_T)^2 - 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.109)'$$

ここに c^* と ρ^* は流体内の音速と密度である。この場合の解 (c の実数値) は常に存在する。さらに特殊化する。 $\beta m^2 \rightarrow 0$ に極限するとレレーの方程式

$$[2 - (c^2/c_T^2)]^2 - 4\nu_1\nu_2 = 0 \quad (5.109)''$$

になる。

5.13 スローネス線図

第5.5節~第5.7節および第5.9節と第5.10節で得られた反射角や透過角の特性は、スローネス線図によって図式的に説明でき、理解しやすくなる。入射角に対応する反射角や透過角の関係のみならず、臨界角や複素伝ばベクトルをもつ平面波の垂直方向距離に伴う減衰率を求めることができる。

スローネス線図は、第4.2節で導入したが、そこではスローネスベクトル \mathcal{F} の成分が (平面波を対象とするとき) 一般性を失うことなく円もしくは漸近線の直交する双曲線によって関係付けられることを示した。 $\beta_1 < \beta$ ($=|\mathcal{F}_1|$) が与えられれば対応する β_2 の値は半径 β の円上にあり、 $\beta < \beta_1$ ならば図4.1に示すごとく対応する β の値は双曲線上にある。等方均質弾性体を伝わる縦波と横波に対する β はそれぞれ $\beta = \beta_L = 1/c_L$,

$\beta = \beta_T = 1/c_T$ である。図5.15に入射縦波の場合を示す。その入射波のスローネスベクトルは $\mathcal{F}^{(0)}$ である。反射P波と反射SV波のスローネスベクトルをそれぞれ $\mathcal{F}^{(1)}$, $\mathcal{F}^{(2)}$ とする。さて、式(5.31)より

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_n &= k_n(x_1 P_1^{(n)} - c_n t) \\ &= \omega_n (\beta^{(n)} \sin \theta_n x_1 - t) \end{aligned}$$

そこで $x_2 = 0$ の表面もしくは界面で、独立な2つの境界条件もしくは連続の条件が位置 x_1 によらず、また時刻 t によらず満足されるならば $x_2 = 0$ における因子 $\bar{\eta}_n$ の $\beta^{(n)} \sin \theta_n$ 成分が n によらず等しく、また同一の ω_n をもたねばならない。したがって図5.15のような場合には、 $\mathcal{F}^{(1)}$ と $\mathcal{F}^{(2)}$ の方向は、そのベクトルの x_1 方向成分が $|\mathcal{F}^{(0)}| \sin \theta_0$ すなわち $\beta_1^{(0)}$ に等しいということから決定できる。 $|\mathcal{F}^{(0)}| = |\mathcal{F}^{(1)}|$ だから $\theta_0 = \theta_1$ 。また、 $|\mathcal{F}^{(0)}| / |\mathcal{F}^{(2)}| = c_T / c_L = 1/\kappa$ だから $\beta_1^{(0)} \sin \theta_0 = \beta_2^{(2)} \sin \theta_2$ より $\sin \theta_2 = \kappa^{-1} \sin \theta_0$ を得る。これらの結果は式(5.49)と(5.50)と一致する。

図5.16は入射SV波に対するスローネス線図である。図5.15、図5.16ともに自由表面に沿うスローネス成分 $\beta_1^{(0)}$ が

β_L もしくは β_T よりも小さいので、すべての波は実スローネス成分となる。図5.17は入射SV波が $\beta_L < \beta_1^{(0)} < \beta_T$ なるスローネス成分 $\beta_1^{(0)}$ をもつ場合で、反射P波が複素スローネスを有する。振幅減衰率は式(4.20)で定まる β_L によって決まる。この場合は、式(5.68)によって与えられる結果に対応している。

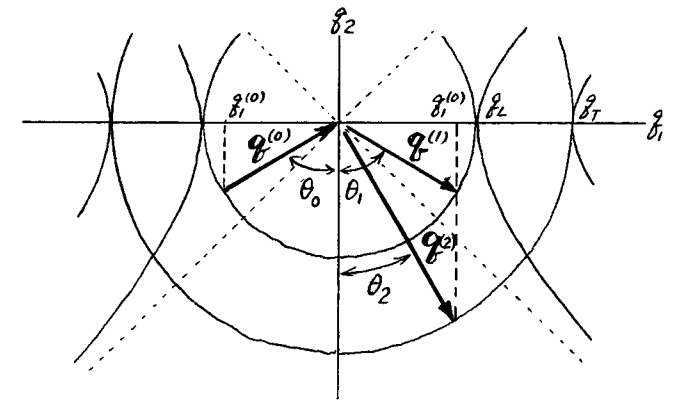


図5.15 入射P波に対するスローネス線図

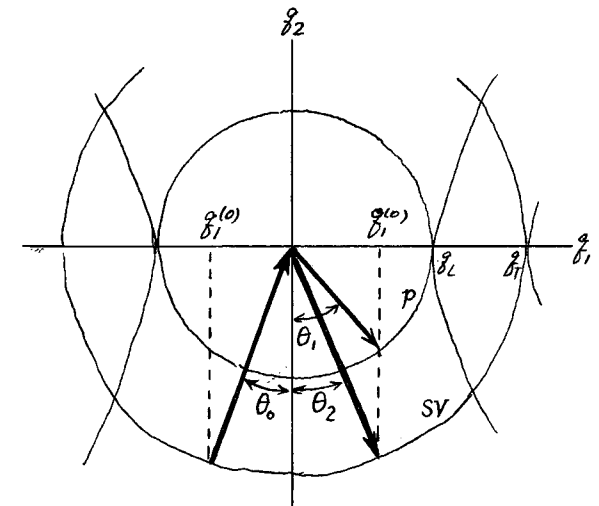


図5.16 入射SV波に対するスローネス線図 ($0 < \beta_1^{(0)} < \beta_L$ のとき)

次に、第2媒体が存在して、界面で反射のみならず透過も生ずる場合を考えよう。一般的にはP波が入射する時、図5.18のように4つの波に対する実スローネスベクトルが求められるが、入射角が大きかったり、又は媒体の組合せによって全反射(図5.19)や一部透過(図5.20)がおこる。

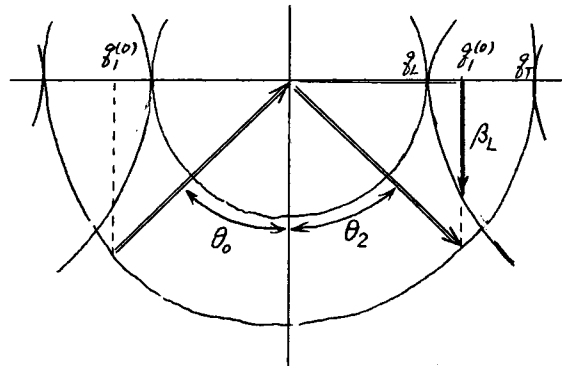


図5.17 入射SV波に対するスローネス線図 ($c_2 < c_1^{(0)} < c_1$ のとき)

りも波の伝ば速度の速い場合のスローネス線図を示したがこの逆の組み合わせも考えられる。その場合は波が透過伝達しやすくなる。

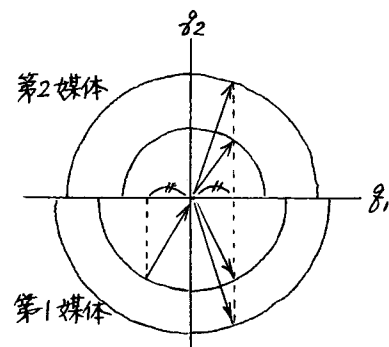


図5.18 P波の反射と透過のスローネス線図

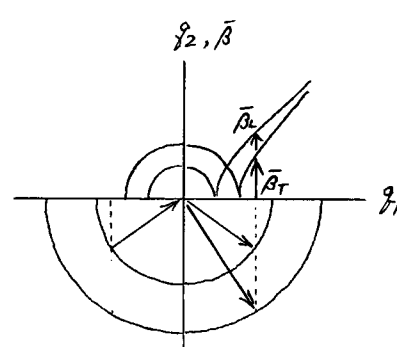


図5.19 P波の全反射の時のスローネス線図

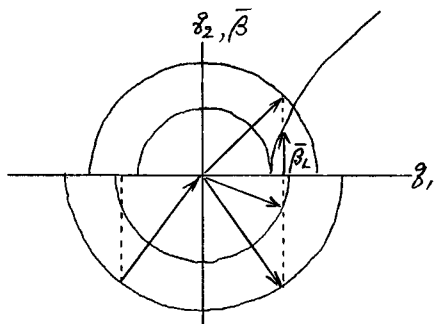


図5.20 SV波の一部透過のスローネス線図

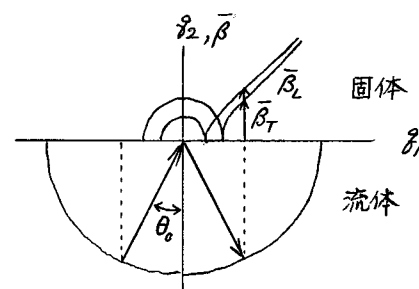


図5.21 流体からの波の伝達のスローネス線図

また図5.21のように速度の大きく異なる媒体どうしの場合、遅い媒体からの入射波は、ほとんどの角度 θ_0 に対して、全反射となる。いずれも第2媒体の方が第1媒体よ

[第5章終り]

第 6 章

導波体を伝わる調和波

6.1 はじめに

半無限体における、時間的もしくは空間的に調和な波の解析は、第5章で、多少詳しく述べたように、境界面による反射波や透過波の直接的な手法による構成によって、そう難しい点もなく、示すことができた。では、物体の断面形状がある有限な寸法によって与えられる場合の波動現象の解析はどの様に行ったらよいだろうか。本章ではそのような物体を伝わる波の特性とその解析を考えてみる。

まず、厚さ $2h$ で、かつ無限に長い均質等方な弾性単層内の調和波^[註]を考える。第5章の結果より、その波は層の上下面を反射しながら伝わるのがわかるだろう、しかし調和波であるという仮定からその定常波動状態では上へ進行する波と下へ進行する波との干渉してちょうど層厚方向に定在波(Standing wave)が構成され、波の本質的な伝播は層の広がっている方向(層面と平行な方向)になる。このように波動の伝わる方向が限定されて導びかれる現象が生ずることから、層に限らずより一般に有限寸法の断面を持つ物体を導波体(Wave guide)と呼んでいる。導波体として、層のほか本章後半で扱う無限長の円柱が代表的である。

単層内を伝わる波の様相は、運動を x_1, x_2 面内に限定したとしても複雑になる。その理由は図6.1にも示すようにP波もしくはSV波が上下の境界面で反射するたびに、いずれの入射波であってもP波とSV波の双方の波を同時に反射波として生じさせるためである。

まして円柱のように曲面による反射波を追跡して行くことは非現実的である。したがって反射波を追う解析手法は特別の場合であって、定常波動の解

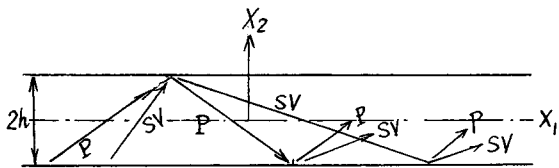


図6.1 単層内を伝わる波

析では採用せず、最初から波動解を
 [註] 「層」という文字には、幾何学的に繰返し重ねられた状態を意味しているが、ここで取扱う形状が平板であっても解析的にいわゆる板の近似取扱いをせず弾性論に基づいているので、その区別を明確にするため「単層」と呼ぶことにする。

次の形に仮定して解析を進めるのが普通である。

$$f(x_2, x_3) \exp[i\omega(x_1 - ct)] \quad (6.1)$$

式(6.1)は層厚方向(たとえば x_2 方向)に対しては定在波であって導波体の方向(x_1 の方向)に c の速度で伝播する波の形になっている。

弾性層を伝わる面外変形波(水平方向に偏角したせん断波: SH波)は、前の場合と異なって、その波の境界面による反射がその波だけなので、反射波を追跡して解析できる^[註]。これは初等幾何学的説明で単層内の波の構成や波動の特性式が導びけるので導波現象を理解する上で大変参考になる。それを第6.2節に述べる。

式(6.1)の関数 $f(x_2, x_3)$ は反射波どうしによる干渉模様を与える。 x_3 方向に無限に広がった層であるならば、その $f(x_2, x_3)$ は厚さ方向の座標 x_2 のみの関数である。そして三角関数によって表現される関数となる。断面が円形となる導波体においてはBessel関数によって表現され、波動の解析はいく分複雑になる。後ほど導波特性の研究において重要ないくつかの概念として、波の伝播のモード、周波数スペクトル、波動分散、群速度といったものが説明される。これらは機械的な構造物の動的応答解析には欠くことのできないものとなる。本章の最後に、弾性単層、あるいは柱状体を伝わる波の解析をかなり簡単化するいくつかの近似理論を調べてみる。古典的な近似理論は導波体の断面寸法に比べて波長が十分大きい場合に適用可能となるのがほとんどである。

6.2 弾性単層内の面外せん断変形波

SH波の自由表面による反射は、第5.5節に述べたように、全反射の際に位相の変化がない。すなわち、式(5.25a, b, c)で示すように $\theta_2 = \theta_0$, $A_2 = A_0$ 。そして $k_2 = k_0$ である。このことから層内を2つのSH波が伝播すると考え、その重ね合せの結果として境界条件を満足することができるであろう。一つは単位伝播ベクトルが $\sin\theta_0 \hat{i}_1 + \cos\theta_0 \hat{i}_2$ であるような波で $x_2 = h$ の自由面に入射(または $x_2 = -h$ 面からの反射)するもの、もう一つは単位伝播ベクトルが $\sin\theta_0 \hat{i}_1 - \cos\theta_0 \hat{i}_2$ で $x_2 = h$ 面から反射(または $x_2 = -h$ 面に入射)す

[註] 伝播ベクトルの方向に沿っている線を波線(ray)といい、この線に沿う波を追って解析するやり方を波線理論(ray theory)と呼んでいる。一般には時間経過とともに波線の本数がふえ複雑になるが電算機の発達でよく用いられるようになった。

る波である。図6.2に示すようにその2つのSH波はそれぞれ左下から右上へ進行する波と左上から右下へ進行する。その組合せを適当に位相を考えて行えばちょうど境界で応力を消すことができる。図の波線(線ABDEF)を考える。もしPBE面にあった位相面がBDEだけ先に進んでいた波の位相面と点Eのように一致するならば、その変形は強まる(増

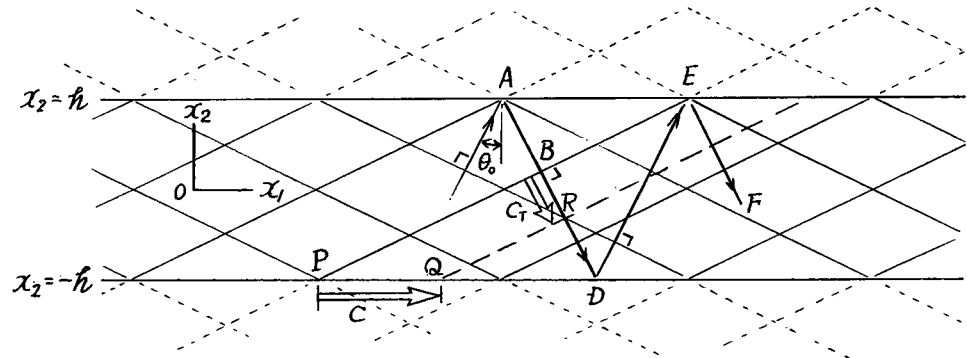


図6.2 SH波の波線理論による弾性単層内の伝ば

幅的干渉)だろう。しかも進行方向は上下逆方向で変位の x_2 による導関数が互いに反対符号の波の重なりだから応力が0になっている。これは、E点の位相の値が x_2 座標も任意であるから $x_2 = \pm h$ の境界上では常に成り立っている。ただその境界上で自由面となるよう変形の増幅的な波の干渉にならなければならない。そこでこの条件を調べてみよう。点Eで位相が一致するというより、ちょうど数波長先行した波と重なるから

$$(\text{長さ BDE}) / (\text{波長 } \Lambda) = (\text{整数 } n) \quad (6.2)$$

図6.2の幾何学的関係より

$$\overline{\text{BDE}} = \frac{2h}{\cos\theta_0} + \frac{2h \cos 2\theta_0}{\cos\theta_0} = 4h \cos\theta_0 \quad (6.3)$$

位相面PBEがBRの距離だけ進むとき、それに対応した水平方向移動はPQの距離になる。もし、Cが波の層方向伝ばの位相速度であるとすれば、図の幾何学的関係より

$$\sin\theta_0 = \frac{BR}{PQ} = \frac{C_T}{C} \quad (6.4)$$

x_1 方向とAD方向の波数をそれぞれ k と k' で表わせば場の周波数は

$$\omega = kc = k'c_T$$

であるから、波数 k は

$$k = 2\pi/\Lambda = k' \sin\theta_0 = \frac{2\pi \sin\theta_0}{\Lambda'} \quad (6.5)$$

上式で Λ は層方向(x_1 方向)の波長であり、 Λ' は波線AD方向の波長である。よって

$$\Lambda = \Lambda' / \sin\theta_0 \quad (6.6)$$

式(6.3)を式(6.2)に代入し、式(6.5)を用いて Λ' を消去すれば

$$k \cot\theta_0 = n\pi / (2h) \quad (6.7)$$

また $\cot\theta_0 = \{(1/\sin^2\theta_0) - 1\}^{1/2}$ であるから、式(6.4)を考慮すれば、上式は

$$\left(\frac{c}{c_T}\right)^2 = 1 + \left(\frac{n\pi}{2kh}\right)^2 \quad (6.8)$$

式(6.8)は $n=0$ の場合を除いて位相速度が波数 k に依存していることを示している。したがって単層における調和SH波は分散性を有している。 $\omega = kc$ の関係を用いて上式を書きかえれば

$$\Omega^2 = n^2 + \xi^2 \quad (6.9)$$

となる。ただし Ω と ξ は、それぞれ次のような無次元周波数と無次元波数である。

$$\Omega = \frac{2h\omega}{\pi c_T}, \quad \xi = \frac{2h k}{\pi} \quad (6.10 a, b)$$

式(6.9)は周波数方程式(Frequency equation)と呼ばれている。

以上のような波の干渉を波線に沿って考える方法は、導波体中の波を構成し、その状態を理解するためには便利であるが、次のような解の形を仮定して周波数方程式を数学的に直接的に導くことが出来る。

$$u_3 = f(x_2) \exp[i(kx_1 - \omega t)] \quad (6.11)$$

この解は面外変形を支配する波動方程式

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (6.12)$$

$$\text{と境界条件 } \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \quad (x_2 = \pm h \text{ において}) \quad (6.13)$$

を満たすものでなければならぬ。式(6.11)を式(6.12)に代入し、 $f(x_2)$ について解

$$\text{けば} \quad f(x_2) = B_1 \sin(\beta x_2) + B_2 \cos(\beta x_2) \quad (6.14)$$

$$\text{ただし} \quad \beta^2 = (\omega/c_T)^2 - k^2 \quad (6.15)$$

境界でせん断応力 τ_{23} が 0 になる条件式(6.13)より

$$B_1 \cos(\beta h) \pm B_2 \sin(\beta h) = 0 \quad (6.16)$$

が成り立たなければならぬから、そのためには

$$B_1 = 0 \text{ で } \sin(\beta h) = 0 \quad (6.17)$$

$$\text{あるいは} \quad B_2 = 0 \text{ で } \cos(\beta h) = 0 \quad (6.18)$$

のいずれかでなければならぬ。任意の波数 k に対し、式(6.17)と(6.18)は、無限個の ω の解をもっている。弾性単層を伝ばする特定の波動、すなわちモード伝ばと呼ばれているものは、式(6.17)あるいは(6.18)を満足する各々の周波数に対応する変形の伝ば様式である。もし、 $B_1 = 0$ とするならば、変形 $f(x_2)$ が層の中央面に関して対称となり、また $B_2 = 0$ ならば、変形は反対称になる。いずれの場合も式(6.17)(6.18)から、

$$\beta h = n\pi/2 \quad (6.19)$$

となる。ただし n が 0, 2, 4, ... の時対称モードとなり、 n が 1, 3, 5, ... の時、反対称モードとなる。ここで式(6.15)の定義と、無次元周波数 Ω および無次元波数 ξ の定義(式(6.10a, c))を用いれば、式(6.19)は前に求めた式(6.9)に一致する。すなわち、式(6.19)より

$$\beta h = \frac{n\pi}{2} \longrightarrow \sqrt{(\omega/c_T)^2 - k^2} \cdot h = \frac{n\pi}{2} \quad \text{自乗して}$$

$$\left(\frac{\omega h}{c_T}\right)^2 - (kh)^2 = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{2\omega h}{\pi c_T}\right)^2 - \left(\frac{2kh}{\pi}\right)^2 = n^2 \quad \text{式(6.10a, c)を用いて}$$

$$\therefore \Omega^2 = n^2 + \xi^2 \longrightarrow \text{式(6.9)}$$

6.3 面外変形モードの周波数スペクトル

$$\text{周波数方程式} \quad \Omega^2 = n^2 + \xi^2 \quad (6.20)$$

を満足する Ω と ξ は Ω - ξ 面に描かれる無限本数の曲線上の値をとる。これらの曲線はそれぞれ整数 n に対応しており、それぞれの曲線を周波数スペクトル分枝 (branch) という。その分枝は特定の伝ばモードに対して無次元周波数 Ω と無次元波数 ξ との関係を示すものであって、この分枝の集まりによって周波数スペクトル (Frequency spectrum) を構成する。

以下の説明の便宜のために対称な SH 波モード ($n=0, 2, 4, \dots$) を SS モード、また反対称な SH 波モード ($n=1, 3, 5, \dots$) を AS モードと呼ぶことにする。また指標 I を導入して I 番目の対称または反対称な SH 波モードを $SS(I)$, $AS(I)$ と表記する。この時、対称モードに対しては I と n との間に $I = (n/2)$ の関係があり、一方、反対称モードに対しては $I = \frac{1}{2}(n+1)$ の関係がある。図 6.3 に、いくつかの低次モードに対する変位分布を示す。最低次の対称モード $SS(1)$ は一定分布となる。最低次の反対称モード $AS(1)$ では一つの節 (node) を有している。 Ω を $\omega = \xi c$, あるいは $\Omega = \xi c/c_T$ の関係を用いて式(6.20)の Ω を消去すれば

$$c/c_T = \pm [1 + (n/\xi)^2]^{1/2}$$

Ω のかわりに ξ を消去するのであれば

$$c/c_T = \pm [1 - (n/\Omega)^2]^{-1/2} \quad (6.21)$$

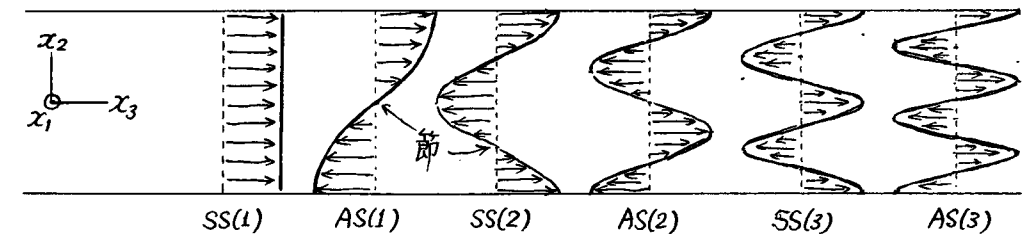


図 6.3 : SH 波の伝ばによって生ずる x_2 - x_3 面における変位分布モード。伝ば方向は紙面に垂直になる。

複符号は波の伝ば方向を示し(+は x_1 の正方向, -は負方向) 現象上は実質的に同じである。これらの式より SS(1)のモードを除けば位相速度 C が波数,あるいは周波数に依存し,分散性を有していることがわかる。

式(6.20)から, $\Omega < \pi$ の時, ξ は純虚数になる。すなわち ξ が虚数となって式(6.11)の変位 u_3 は x_1 の増加とともにその振幅が指数関数的に減衰(増大)し,導波体に沿って進行する波にはならない。局所的な定在波動を示す。特定のモードに対して波数が実数から,このような虚数(もしくは複素数)に変わるところの周波数を遮断周波数(cut-off frequency)と言う。SH波の場合の遮断周波数は波数が0の時の周波数で与えられる。図6.4にSH波に対する周波数スペクトルを示す。対称性を考慮して $\Omega > 0, \text{Re } \xi > 0, \text{Im } \xi > 0$ の領域のみ示した。この図の各分枝は,横弾性係数 μ や密度 ρ ,そして層厚 $2a$ が Ω と ξ に考慮されているから,任意の均質等方弾性単層に用いることができる。

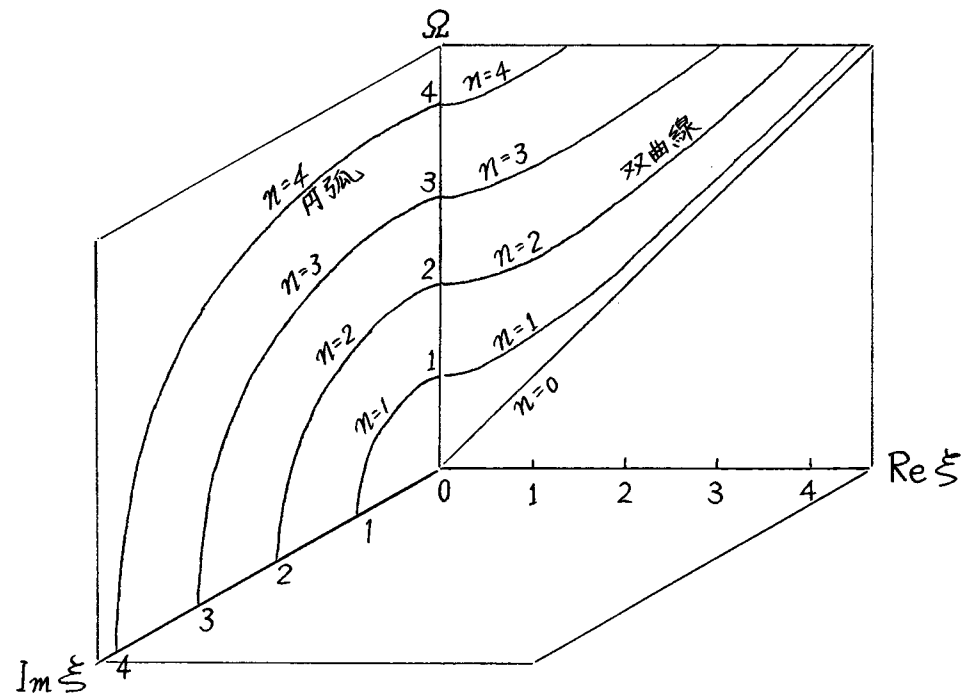


図 6.4 周波数スペクトル (SH波の弾性単層内伝ば)

6.4 SH波によって単層内を伝わるエネルギー

第5.3節で,時間調和波の伝播の際にエネルギーの流れを伴うことを示した。横波に対する時間平均エネルギー密度パワーは式(5.10)のように与えられる。そこで単層を伝わるSH波の時のエネルギー伝搬を考えてみよう。特にその伝搬速度に注意されたい。

層厚にわたって積分した単位面積当りのパワー(エネルギーの時間変化率)の一周期の時平均を $\langle P \rangle$ で表わせば

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-a}^a \tau_{13} \dot{u}_3 dx_2 \quad (6.22)$$

同様に,厚さにわたって積分した全エネルギー密度,運動エネルギー密度,弾性ひずみエネルギー密度の時間平均を求め,それぞれを $\langle H \rangle, \langle K \rangle, \langle U \rangle$ とする。この時,

$$\langle H \rangle = \langle K \rangle + \langle U \rangle = 2 \langle K \rangle \quad (6.23)$$

が成立する。^[註2] ただし

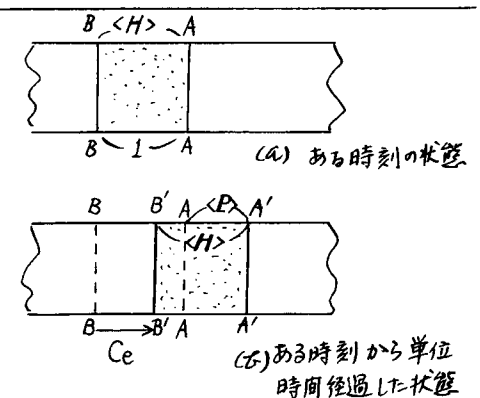
$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-a}^a \frac{1}{2} \rho (\dot{u}_3)^2 dx_2 \quad (6.24)$$

エネルギー伝搬速度 C_e は次式によって定義される。

$$C_e = \langle P \rangle / \langle H \rangle \quad (6.25)$$

式(6.25)を解釈すれば C_e は時間平均の量によって与えられ,単位全エネルギー当り,ある断面を単位時間に通過するエネルギー量になる。^[註]

[註] 図で説明する。すべての機械的エネルギーが ABB の領域に均等に集まっているとする。それが AA'B'B' に移動したとする。これが単位時間に対して起ったとすれば BB' の距離がそのエネルギーの伝搬速度と言えよう。ところで AA'A' 領域に集まっているエネルギーはこの単位時間に断面 AA を通過したエネルギーである。



よて, $\frac{BB'}{BA} = \frac{\langle P \rangle}{\langle H \rangle} \rightarrow C_e = \langle P \rangle / \langle H \rangle \quad \because \langle H \rangle$ は伝搬方向に単位長さ($BA=1$)をとった密度

[註2] 式(6.11)を用いて $\langle K \rangle$ と $\langle U \rangle$ を定義式から誘導し, $\langle K \rangle = \langle U \rangle$ となることを確かめよ。

反対称モードを例として考えれば

$$u_3 = B_1 \sin(\beta x_2) \cos[\ell(x_1 - ct)] \quad (6.26)$$

ここに、 β と C は式(6.15)と(6.8)によって定義される。これより τ_{β} と \dot{u}_3 が決まるから式(6.22)と(6.24)の積分が容易に求まり、その結果

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu c h B_1^2 \ell^2, \quad \langle K \rangle = \frac{1}{4} \rho c^2 h B_1^2 \ell^2$$

従って式(6.25)と式(6.23)を用いれば、エネルギー伝搬速度は次のようになる。

$$C_e = \frac{C_T^2}{C} \quad \text{または} \quad \frac{C_e}{C_T} = \frac{C_T}{C} = \frac{\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}} \quad (6.27)$$

上式の導出には式(6.8)(6.10)を利用した。周波数方程式(6.20)より

$$\frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}} \quad (6.28)$$

であるから

$$\frac{C_e}{C_T} = \frac{d\Omega}{d\xi} \quad (6.29)$$

または

$$C_e = \frac{d\omega}{d\ell} \quad (6.30)$$

層内をSH波が伝わる時にもなって生ずるエネルギーの伝搬速度 C_e は周波数の波数による微分に等しいということが示された。 $\omega = \ell c$ の関係を用いれば

$$C_e = c + \ell (dc/d\ell) \quad (6.31)$$

とも書ける。最低次対称モードでは $C = C_T$ で定数となるから C_e は位相速度 C_T に等しい。もし、波動分散性を有するならば位相速度が波数 ℓ の関数になるので式(6.31)からわかるようにエネルギー伝搬速度は位相速度(波動の伝播速度)と異なる。

歴史的立場から見れば $d\omega/d\ell$ によって定義される速度がGroup velocity(群速度)という名称で文献等に現われたのはエネルギーの伝搬される速度として直接考え出されたものではなく、運動形態を議論するためである。この時、用いられた"Group"速度という言葉には少しずつ異った周波数の重ね合せによって出来る波形の移動速度を意味しているが、さしあたって $C_g = d\omega/d\ell$ によって群速度を定義し、詳しくは次節で述べる。

さて、SH波の無次元群速度は

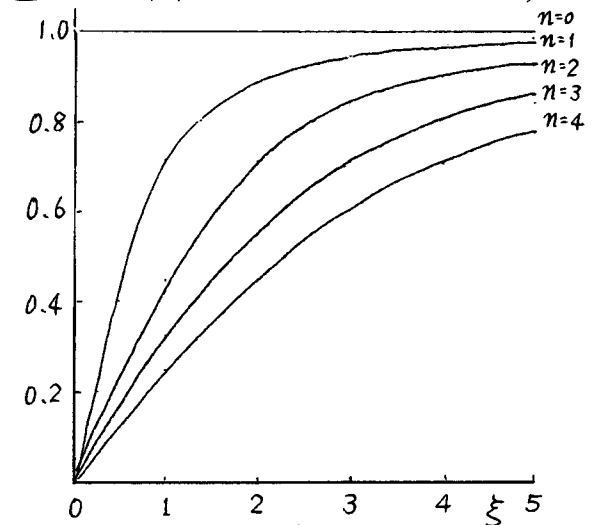
$$\frac{C_g}{C_T} = \frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{\pm \xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}} \quad (6.32)$$

で計算できる。 ξ を消去した別の表現をとれば

$$\frac{C_g}{C_T} = \pm \left(1 - \frac{\eta^2}{\Omega^2}\right)^{1/2}$$

ある特定のモードに対して、 $d\Omega/d\xi$ が0、すなわち群速度が0となる時、その周波数は遮断周波数(cut-off frequency)になる。図6.5にはいくつかのモードに対する無次元群速度曲線を示す。最低次対称モードの曲線は分散性がなく $C_g/C_T = 1$ の直線である。高次モードでは常に $C_g/C_T < 1$ であり ξ を増加(波長を短かく)すると $C_g/C_T \rightarrow 1$ になる。これらよりこの群速度は位相速度を越えることはないことがわかる。図6.4には波数が虚数となる曲線が示されている。このような虚数波数に対しては伝播する波動は存在しないと考えるべきだろう。式(6.11)に立ち帰って虚数 ℓ を代入すれば一定振幅で伝わる波とならないことがわかる。また、虚数波数の時、応力が要素速度と位相において90°の差があり x_1 軸に直交する面を通るエネルギー束は0である。^[註]従って、このよう

な場合、波動エネルギーがある特定の x_1 の値の近傍に蓄えられたまま振動していることになる。虚数波数モードは層に限らず導波体の強制振動解析で重要な役割をはたす。一般に外から動的力を受ければ虚実を問わずすべてのモードの運動をひきおこす。ある x_1 の面で与えられる境界条件を満足させる時に虚数波数のモードも考慮することによって解析が可能になる。後述する。図6.5. SH波モード時の単層に対する群速度



[註] 式(6.11)で $\ell = i\ell^*$ とおけば $u_3 = f(x_2) e^{-\ell^* x_1} e^{-i\omega t}$ 従って $\dot{u}_3 = f(x_2)(-i\omega) e^{-\ell^* x_1} e^{-i\omega t}$
 $\dot{u}_3 = -\omega f(x_2) e^{-\ell^* x_1} e^{-i(\omega t - \pi/2)}$ 一方、 $\tau_{\beta} = \mu f(x_2)(-\ell^*) e^{-\ell^* x_1} e^{-i\omega t}$ で、位相が90°($\pi/2$)差がある。
 ここで公式(1.87)を用いれば「パワーは

$$\frac{1}{2} \text{Re} \{ i\omega f(x_2) e^{-\ell^* x_1} e^{i\omega t} \} \cdot (-\mu f(x_2) \ell^* e^{-\ell^* x_1} e^{i\omega t}) = \frac{1}{2} \text{Re} [\text{虚数}] = 0$$

6.5 エネルギー伝搬速度と群速度

一般に周期性を有する波によるエネルギーの搬送は、 $d\omega/dk$ によって与えられる。しかし波形に関する運動上は似かよった周波数成分よりなる波群の移動速度となることは非常に興味ある点である。本節では導波体を伝わるエネルギーを説明して、その特性解析のための基礎としよう。

断面積 A が一定の弾性導波体を伝わる調和波は

$$u_i = f_i(x_2, x_3) g(\eta) \quad (6.33)$$

$$\text{ただし } g(\eta) = B_1 \sin(\eta) \quad \text{または} \quad g(\eta) = B_2 \cos(\eta) \quad (6.34a)$$

$$\text{そして} \quad \eta = \eta x_1 - \omega t \quad (6.34b)$$

たとえば導波体として単層を、そして SH 波の対称モード波を選べば

$$u_3 = B_2 \cos(\eta x_2) \cos \eta$$

によって変位が与えられる。この式で g はここで考えている境界条件と伝播モードによって決まる定数である。したがって g の値は、特定の周波数スペクトル分枝に沿う ω と η の変化があっても一定値である。(たとえば式(6.19)を見よ。) SH 波に対するこのような考察と同様に、式(6.33)の $f_i(x_2, x_3)$ は対応する周波数スペクトル分枝が指定されれば(モードが指定されれば)、 η と ω に独立である。

運動を支配する力学系はラグランジ密度 (Lagrangian density) \mathcal{L} によって完全に包含することが出来る。等方均質な線形弾性体では

$$\mathcal{L}(u_i, u_{i,j}) = \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - \left[\frac{1}{2} \lambda (E_{kk})^2 + \mu E_{ij} E_{ij} \right]$$

によって与えられる。ここに総和規約を適用し、また、微小ひずみテンソル E_{ij} は

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

実際に現われる運動は、ハミルトンの原理から得られる基礎方程式群を満たすものでなければならない。第2.9節で述べたように運動が保存系の場合、その原理はラグランジ密度関数を考える領域にわたって積分し、第一変分が 0 とおくことにより与

えられ

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \mathcal{L} dV = 0 \quad (6.35)$$

連続体の場を支配する式は任意の場所で成立するはずだから、積分の任意体積 V の境界でも、また $t=t_1$ と $t=t_2$ でも 0 となるような関数 $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ の領域内部における任意変分 δu_i に対して式(6.35)が成り立たねばならない。一般座標として \dot{u}_i と $u_{i,j}$ をとり、式(6.35)から導き出せる運動方程式は、次式によって導出される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \right) = 0 \quad (6.36)$$

丸棒や多角形断面などを有する柱状導波体を、式(6.33)で与えられる時間調和波が伝播する時の多少特殊な応用になるが、ハミルトンの原理を利用してエネルギーの伝播される速度を論じてみよう。その特殊な形とは

$$\delta I = \delta \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \mathcal{L} dx_2 dx_3 = 0 \quad (6.37)$$

である。これは調和波の周期性を考慮して、一周期間 0 から 2π までの積分をとって与えている。また、すべて任意の δu_i について成立し、 δu_i は u_i と同一の周波数と波数を有し、式(6.33)の形をした調和関数である。 A は積分が (x_2, x_3) 断面にわたっていることを示している。

以下に式(6.37)が成り立つことを示す。まず $\delta \mathcal{L}$ を \dot{u}_i と $\delta u_{i,j}$ の関数として

$$\delta I = \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \delta u_{i,j} \right) dx_2 dx_3 \quad (6.38)$$

ところで

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta u_i \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \right) \delta u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \frac{\partial \delta u_i}{\partial t}$$

よって

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta u_i \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \right) \delta u_i$$

$$\text{また同様に} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \delta u_{i,j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \delta u_i \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \right) \delta u_i$$

したがって式(6.38)は

$$\delta I = - \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \right) \right] \delta u_i dx_2 dx_3 +$$

(続く)

$$(続々) + \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta u_i \right) dx_2 dx_3 + \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{i,j}} \delta u_i \right) dx_2 dx_3$$

右辺第一項は式(6.36)より0となる。第二項は $\partial \eta / \partial t = -\omega$ であるから

$$-\omega \int_A dx_2 dx_3 \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta u_i \right) d\eta$$

と変形できるが、内側の積分は δu_i の周期性より被積分関数の原関数値が $\eta=0$ と $\eta=2\pi$ で等しくなるため0となる。次に第三項は $j=1$ と $j=2, 3$ の二つに分け

$$\int_0^{2\pi} d\eta \int_A \left\{ \sum_{j=2}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{i,j}} \delta u_i \right) + k \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{i,1}} \delta u_i \right) \right\} dx_2 dx_3$$

上式の $\{ \}$ 内の第一項は導波体表面の応力 $\tau_{ij} = -\partial \mathcal{L} / \partial u_{i,j}$ が0となることから消失し、また第二項は η に関して δu_i が周期性を有することから0となる。これより式(6.38)の右辺が0となるから式(6.37)が成り立つ。言い換えれば式(6.37)は次のように解釈できる。

線形弾性体では、運動エネルギーの1周期時間平均はひずみエネルギーの1周期時間平均に等しい。すなわち、ラグランジアン関数の1周期時間平均は0である。

前にも示したように導波体の単位長さ当りの全エネルギーの時間平均 $\langle H \rangle$ に対する単位断面積当りのエネルギー束の時間平均 $\langle P \rangle$ の比によってエネルギーの伝搬速度を定義すれば

$$c_e = \frac{\langle P \rangle}{\langle H \rangle}$$

ただし $\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p dt$, $\langle H \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_A (\mathcal{U} + \mathcal{K}) dx_2 dx_3$
最後の式で \mathcal{U} と \mathcal{K} は、それぞれひずみエネルギー密度と運動エネルギー密度である。さて

$$\langle P \rangle = - \left\langle \int_A \tau_{i1} \dot{u}_i dx_2 dx_3 \right\rangle = \left\langle \int_A \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{i,1}} \dot{u}_i dx_2 dx_3 \right\rangle$$

$$\langle H \rangle = 2 \langle K \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T dt \int_A \mathcal{K} dx_2 dx_3 = \left\langle \int_A \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i dx_2 dx_3 \right\rangle$$

したがって

$$c_e = \left\langle \int_A \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_{i,1}} \dot{u}_i dx_2 dx_3 \right\rangle / \left\langle \int_A \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i dx_2 dx_3 \right\rangle, \quad (6.39)$$

この c_e が $d\omega/dk$ に等しくなることを示すために波数と周波数によって変化する変位場の擾動 (Perturbation) をとって考える。

$$u_i + \delta u_i = f_i(x_2, x_3) g^*(k^* x_1 - \omega^* t)$$

$$\text{すなわち} \quad k^* = k + \delta k, \quad \omega^* = \omega + \delta \omega \quad (6.40a, b)$$

いま式(6.38)を利用すれば

$$\delta I = \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta(-\omega^* f_i g') + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,1}} \delta(k^* f_i g') + \sum_{j=2}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \delta \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} g' \right) \right] dx_2 dx_3$$

$$\text{すなわち} \quad g' = dg/d\eta$$

式(6.40a, b)において k と ω は一定であるとしそのまわりの変分を考える。前式より

$$\delta I = \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \{ (-\delta \omega) f_i g' + (-\omega^*) \delta(f_i g') \} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,1}} \{ (\delta k) f_i g' + k^* \delta(f_i g') \} + \sum_{j=2}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \delta \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} g' \right) \right] dx_2 dx_3$$

高次の微小項を省いて整理すると

$$\delta I = \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta(-\omega f_i g') + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,1}} \delta(k f_i g') + \sum_{j=2}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \delta \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} g' \right) \right] dx_2 dx_3 - \delta \omega \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} f_i g' dx_2 dx_3 + \delta k \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,1}} f_i g' dx_2 dx_3$$

両辺に $-\omega$ を乗じて

$$-\omega \delta I = -\omega \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \delta \dot{u}_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,j}} \delta u_{i,j} \right) dx_2 dx_3 - \delta \omega \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i dx_2 dx_3 + \delta k \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,1}} \dot{u}_i dx_2 dx_3$$

上式の右辺第一項は k も ω も一定とした時の変分である第二、第三項は k と ω の擾動 δk と $\delta \omega$ に対する変分である。右辺第一項の被積分関数は $\delta \mathcal{L}$ にあたるから(6.37)より0、また δI も変分の取り方は異なるが式(6.37)より0である。したがって

$$-\delta \omega \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i dx_2 dx_3 + \delta k \int_0^{2\pi} d\eta \int_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,1}} \dot{u}_i dx_2 dx_3 = 0$$

この関係より、 (k, ω) における ω の k に対する変化率は

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{\delta \omega}{\delta k} = \frac{\int_0^{2\pi} d\eta \int_A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{i,1}} \dot{u}_i dx_2 dx_3}{\int_0^{2\pi} d\eta \int_A \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i dx_2 dx_3} = \frac{\langle P \rangle}{\langle H \rangle} \quad (6.41)$$

式(6.39)と式(6.41)との比較より、あるいは C_e の定義式(1.88)より $C_e = d\omega/dk$ を得ることが出来る。これでもともと波の重ね合せによって形成される波群の群速度が運動学的立場からその概念が導入されたが、その速度がエネルギーの伝搬速度に等しくなる事実が解析力学的立場から説明された。

次に、Stokes によって最初に導入された群速度の考え方、すなわち運動学的取扱いを説明する。それは、同一振幅で同一方向に進む2つの波が、わずかに周波数の異なって重ね合わせられたときに生ずる波動状態を対象とする。すなわち、

$$u = A \{ \sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t) \}$$

$$= 2A \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2}x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2}x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \quad (6.42)$$

を考える。ここで変数 $k_0 = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$, $\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ を導入すれば式(6.42)は

$$u = C \sin(k_0 x - \omega_0 t) \quad (6.43)$$

ただし $C = 2A \cos(\Delta k x - \Delta\omega t) \quad (6.44)$

C によって表わされる振幅の変化が小さな周波数で生じ、それが $\sin(k_0 x - \omega_0 t)$ の搬送波に乗ることが理解できよう。この状態を図6.6に描いてある。振幅のゆっくり変化する因子 $C(x, t)$ の半周期長にわたって、この波形は一つのかたまりを形成している。このかたまりの移動速度が群速度 C_g として定義される。これは搬送波の変調として表われている。群速度 C_g

を求めると変調波の位相から $\Delta k x - \Delta\omega t = \text{一定}$ とおけばこれを微分して、

$$dx/dt = \Delta\omega/\Delta k$$

そして $\Delta k \rightarrow 0$ の極限で $C_g = \frac{d\omega}{dk}$ の群速度を得る。2つの波の

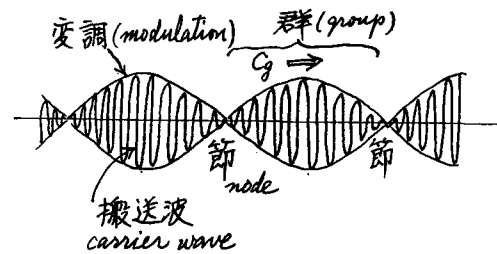


図6-6 わずかに異なる周波数の二つの調和波の重ね合せ。

重ね合せから考えたが $\Delta k \rightarrow 0$ の極限で C_g を定義すれば、実質はモノクロの波(単一周波数よりなる波)がエネルギーを搬送する速度になっている。

前に説明した解析力学的取扱いで、この運動学的取扱いで、波数の微小変化と、それに対する周波数の微小変化を考える点はいずれも出発点として同じである。後者の運動学的説明において、振幅 $C(x, t) = 0$ となる点を節というが、これが図6.6からわかるように速度 C_g で移動することになる。節は常に変位がなくエネルギー密度0であるから、エネルギーは節と節の間に関じ込められている。従って、その関じ込められたエネルギーの移動速度は節の移動速度 C_g に等しいということが直感的に理解できよう。 Δk を0に極限した場合であっても、すなわち同一振幅、同一周波数、同一波数の二つの波を重ね合わせと考えた波、すなわちモノクロ波であってもエネルギーは依然として C_g の速度で伝搬される。従って群速度を与える式は、モノクロマチックな波の ω と k を用いて

$$C_g = \frac{d\omega}{dk} = C_e$$

と表現できる。また位相速度 $C = \omega/k$ や波長 $\lambda = 2\pi/k$ を用いて

$$C_g = C + k \frac{dC}{dk}, \quad C_g = C - \lambda \frac{dC}{d\lambda}, \quad \frac{1}{C_g} = \frac{1}{C} - \frac{\omega}{C^2} \frac{dC}{d\omega}$$

図6.7に $(k-\omega)$ 面における特性曲線で群速度 C_g と位相速度 C を与える関係を示した。その図において、一般に $dC/dk < 0$ ならば $C_g < C$ である。この時、搬送波は後方の節から発生して、前方の節に吸い込まれるように見える。このような $C_g < C$ の時を正常分散という。逆に $C_g > C$ の時は搬送波の見え方も逆になり、異常分散(anomalous dispersion)という。^[註]

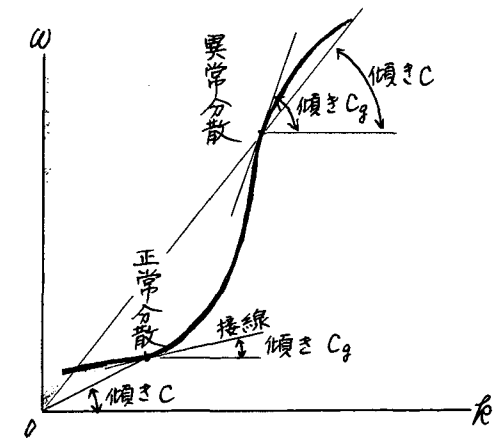


図6.7 $k-\omega$ 面の特性曲線と C, C_g の関係。

[註] 同一モードで C と C_g を比べれば、ほとんどが $C_g < C$ で正常分散を示す。異常分散となる例をあげれば、板(弾性単層)におけるたわみモード(最低次の反対称モード)で生ずる。

6.6 ラブ波

表面波は、表面からの距離(深さ)とともに波動が指数関数的に減衰するということが特徴づけられた。さて第5章で議論したレーレ波は、自由表面を有する半無限体内を表面において物質点が面内の逆行楕円運動しながら伝播するのであった。したがって $x_2 \geq 0$ の半無限体を x_1 方向にその波が伝わるとした時、その波によって x_3 方向の変位 $u_3(x_1, x_2, t)$ は生じない。それでは、面 (x_1, x_2) に直交するような変位成分を有する表面波は、ありえないのだろうか。これを等方均質な線形弾性体で考えてみる。

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{6.45}$$

によって支配される SH 波があった。表面波を与える解形は次のようになるだろう。

$$u_3 = A e^{-\beta x_2} \exp[ik(x_1 - ct)] \tag{6.46}$$

ここに β の実部は $x_2 \rightarrow \infty$ で有界となる条件より正に選ぶ。式(6.46)を式(6.45)に代入して

$$\beta = k [1 - (c/c_T)^2]^{1/2} \tag{6.47}$$

自由表面 ($x_2 = 0$) における境界条件は

$$\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 \tag{6.48}$$

この条件を満足させるためには解形(6.46)において $A = 0$ もしくは $\beta = 0$ でなければならぬ。しかしながらこれは表面波として意味のある解に成りえない。それでも現実には、地震波の観測等でも伝播方向と直交するような水平偏向せん断波が存在することが経験されている。この矛盾を解決する道は、SH 波が複数個の波の重ね合せから成ると考えて自由度を多くし、表面波となるものを探ることである。そのためには当然、境界条件等がそれに見合う分だけ多くしなければならないだろう。この問題を解析し解決したのが Love である。彼は図6.8に示したように半無限体上に異種材料の表層を考えることによって SH 波モードの表面波の存在することを示した。

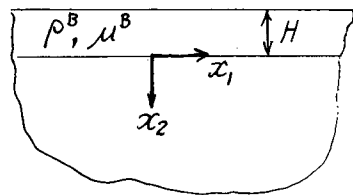


図6.8 表層を有する半無限体

表層内の波動は式(6.11)によって表わせる。 x_2 座標に依存する対称と反対称波を考へ

$$u_3^B = [B_1 \sin(\beta_B x_2) + B_2 \cos(\beta_B x_2)] \exp[ik(x_1 - ct)] \tag{6.49}$$

とおく。波動方程式(6.12)を満たすことから

$$\beta_B = k [(c/c_T^B)^2 - 1]^{1/2} \tag{6.50}$$

一方、半無限体の運動は式(6.46)によって与えられる。 $x_2 = -H$ の表面でせん断応力が0であるから $B_1 \cos(\beta_B H) + B_2 \sin(\beta_B H) = 0$ を得る。また、 $x_2 = 0$ で応力と変位が連続であることより未知係数間に $\mu^B \beta_B B_1 = -\mu^b A$, $B_2 = A$ の関係が成立する。これら3つの結果を組み合わせて位相速度 c を求める特性方程式を導けば

$$\tan\left\{ \left[\left(\frac{c}{c_T^B} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} k H \right\} - \frac{\mu}{\mu^B} \frac{[1 - (c/c_T)^2]^{1/2}}{[(c/c_T^B)^2 - 1]^{1/2}} = 0 \tag{6.51}$$

この式の左辺が $c = c_T$ で正、 $c = c_T^B$ で負となる。従って $c_T^B < c \leq c_T$ の区間で実根を見つけることが出来る。 $c_T < c_T^B$ の場合には実根は存在しない。次に式(6.51)から群速度を求めれば次の結果を得る。

$$\frac{c_g}{c_T^B} = \frac{c}{c_T^B} + \frac{k}{c_T^B} \frac{dc}{dk} = \frac{c}{c_T^B} \left\{ 1 - p^2 \left[1 + \frac{\beta^2 (1 - m^2) \cos^2(kHp)}{k^2 p^3 \sin(kHp)} \right]^{-1} \left(\frac{c_T^B}{c} \right)^2 \right\} \tag{6.51'}$$

ただし $p = [(c/c_T^B)^2 - 1]^{1/2}$, $\beta = \mu/\mu^B$, $m = c_T^B/c_T$

式(6.51)によって特徴づけられる波がラブ波であり、レーレ波とは対照的に波数 k に依存し分散性を示す。 kH を独立変数と考えるならば $kH \rightarrow 0$ の時 $c \rightarrow c_T$ となる。また、波長を短くするにつれ (kH を増加させるにつれ) 位相速度は減少してゆく。あるいは $[(c/c_T^B)^2 - 1]^{1/2} kH$ を $\pi, 2\pi, \dots$ に近づけるにつれ位相速度は c_T に近づく。後者の極限は高次のモードに対応する。一次と二次のモードに対する位相速度と群速度のそれぞれの曲線を図6-9に示す。また参考データとして参考表6-1に数値を示す。図6-9のデータと参考表の値は計算パラメーターが異なることに注意されたい。図6-9で2次モードの $kH = 3.79$ の値で曲線が止まっているのは、そのモードではその値より小さな波数では伝ばしないことを意味する。あるいはその値に対応する周波数より小さな周波数では伝ばしない。
(逸断周波数)

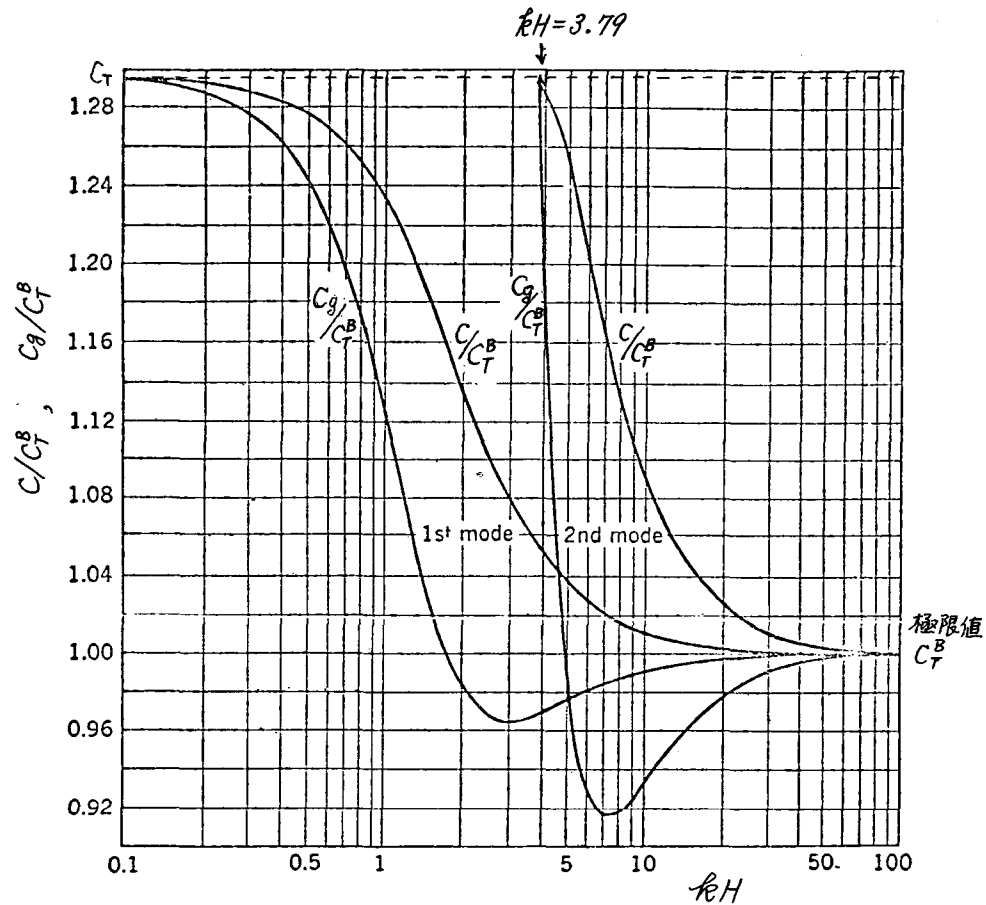


図6.9. ラブ波の位相速度Cと群速度Cg: $\tau = \tau^B$ $C_T/C_T^B = 1.297$, $\mu/\mu^B = 2.159$ のとき. (Ewing et al "Elastic Waves in Layered Media" (1957) より)

参考表: ラブ波の計算例

μ/μ^B	C_T^B km/s	C_T km/s	C km/s	C_g km/s	$2\pi/kH$
1.80	3.60	4.60	3.60	3.60	0.00
			3.80	3.48	1.72
			4.00	3.51	2.84
			4.20	3.71	4.27
			4.40	4.00	6.86
			4.50	4.31	10.02
			4.56	4.50	16.24
1.40	4.00	4.50	4.00	4.00	0.00
			4.10	3.96	1.17
			4.20	3.97	1.97
			4.30	4.10	3.02
			4.40	4.24	5.03
			4.45	4.36	7.19
			4.49	4.47	17.60

[195]

6.7 弾性単層における平面ひずみ状態の波動

第2章で論じたように、変位場をスカラーポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル ψ によって変位を分割して表示する。 x_1-x_2 面内の平面ひずみ運動では

$$u_3 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}(\cdot) = 0 \tag{6.52}$$

であるから式(2.87)は

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \tag{6.53}$$

$$u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \tag{6.54}$$

になる。 ψ の下添字3は省略している。さて、この ϕ と ψ によって応力成分 τ_{21} と τ_{22} を表わせばフックの法則から

$$\tau_{21} = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} \right) \tag{6.55}$$

$$\tau_{22} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) \tag{6.56}$$

ポテンシャル ϕ と ψ は平面ひずみ状態の時、次の波動方程式を満たす。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \tag{6.57}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{6.58}$$

弾性層内の波動を解析するため x_1 方向に伝ばする形を選び式(6.57)と(6.58)の解

$$\phi = \Phi(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)} \tag{6.59}$$

$$\psi = \Psi(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)} \tag{6.60}$$

を考える。式(6.59)(6.60)をそれぞれ波動方程式(6.57)(6.58)に代入し、導びかれる Φ と Ψ の微分方程式の解は

$$\Phi(x_2) = A_1 \sin(px_2) + A_2 \cos(px_2) \tag{6.61}$$

$$\Psi(x_2) = B_1 \sin(\beta x_2) + B_2 \cos(\beta x_2) \tag{6.62}$$

$$\therefore p^2 = \frac{\omega^2}{C_L^2} - k^2, \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2 \tag{6.63a, b}$$

[196]

式(6.53)~(6.56)から得られる変位および応力成分の各表示式すべてに指数関数 $e^{i(kx_1 - \omega t)}$ が乗数因子として現われるが、その因子は周波数方程式を求めるときには何の影響も及ぼさないので、省略して取扱える。したがって、

$$u_1 = ik\Phi + \frac{d\Psi}{dx_2} \quad (6.64)$$

$$u_2 = \frac{d\Phi}{dx_2} - ik\Psi \quad (6.65)$$

$$\tau_{21} = \mu \left(2ik \frac{d\Phi}{dx_2} + k^2\Psi + \frac{d^2\Psi}{dx_2^2} \right) \quad (6.66)$$

$$\tau_{22} = \lambda \left(-k^2\Phi + \frac{d^2\Phi}{dx_2^2} \right) + 2\mu \left(\frac{d^2\Phi}{dx_2^2} - ik \frac{d\Psi}{dx_2} \right) \quad (6.67)$$

式(6.61)と(6.62)の Φ と Ψ を式(6.64)(6.65)に入れば変位成分が初等関数によって表わされる。その式から、 x_1 方向の変位に対する運動が $x_2=0$ において対称(反対称)ならば、 u_1 には $\cos(\cdot)$ ($\sin(\cdot)$) 関数成分、 u_2 には $\sin(\cdot)$ ($\cos(\cdot)$) 関数成分が入ってくる。したがって、弾性層内の波動特性解析は、対称モードと反対称モードの2つの解析に分割して行える。すなわち

対称モード：

$$\Phi = A_2 \cos(px_2) \quad , \quad \Psi = B_1 \sin(\beta x_2)$$

$$u_1 = ikA_2 \cos(px_2) + \beta B_1 \cos(\beta x_2)$$

$$u_2 = -pA_2 \sin(px_2) - ikB_1 \sin(\beta x_2)$$

$$\tau_{21} = \mu \left[-2ikpA_2 \sin(px_2) + (k^2 - \beta^2)B_1 \sin(\beta x_2) \right]$$

$$\tau_{22} = -\lambda(k^2 + p^2)A_2 \cos(px_2) - 2\mu \left[p^2A_2 \cos(px_2) + ik\beta B_1 \cos(\beta x_2) \right]$$

反対称モード：

$$\Phi = A_1 \sin(px_2) \quad , \quad \Psi = B_2 \cos(\beta x_2)$$

$$u_1 = ikA_1 \sin(px_2) - \beta B_2 \sin(\beta x_2)$$

$$u_2 = pA_1 \cos(px_2) - ikB_2 \cos(\beta x_2)$$

$$\tau_{21} = \mu \left[2ikpA_1 \cos(px_2) + (k^2 - \beta^2)B_2 \cos(\beta x_2) \right]$$

$$\tau_{22} = -\lambda(k^2 + p^2)A_1 \sin(px_2) - 2\mu \left[p^2A_1 \sin(px_2) - ik\beta B_2 \sin(\beta x_2) \right]$$

周波数 ω と波数 k との関係を与える特性方程式(周波数方程式)は、境界条件を考慮して導びかれる。もし境界が応力自由であるならば

$$x_2 = \pm h \text{ において } \tau_{21} = \tau_{22} = 0$$

とおく。対称モードに対し(反対称モードに対し)、未定係数の A_2 と B_1 (A_1 と B_2) に関する二つの斉次方程式を得る。この方程式が意味のある解をもつためには係数行列式が0とならなければならない。このことより周波数方程式が得られ対称モードの時、

$$(\lambda k^2 + \lambda p^2 + 2\mu p^2)(k^2 - \beta^2) \cos(\beta h) \sin(\beta h) - 4\mu k^2 p \beta \sin(\beta h) \cos(\beta h) = 0 \quad (6.68)$$

反対称モードの時、

$$(\lambda k^2 + \lambda p^2 + 2\mu p^2)(k^2 - \beta^2) \sin(\beta h) \cos(\beta h) - 4\mu k^2 p \beta \cos(\beta h) \sin(\beta h) = 0 \quad (6.69)$$

あるいは式(6.68)(6.69)を変形して、対称モード、反対称モードのそれぞれは

$$\frac{\tan(\beta h)}{\tan(\beta h)} = -\frac{4k^2 p \beta}{(\beta^2 - k^2)^2} \quad (6.68)'$$

$$\frac{\tan(\beta h)}{\tan(\beta h)} = -\frac{(\beta^2 - k^2)^2}{4k^2 p \beta} \quad (6.69)'$$

式(6.68)~(6.69)'は良く知られた Rayleigh-Lamb の周波数方程式である。これらの超越代数方程式は、比較的複雑な波動の特性を与える割には非常に簡単な形をしている。^[註1] この式は19世紀末に導びかれたが、その周波数スペクトルの詳細は1960年代の Mindlin の報告まで待たなければならなかった。^[註2]

境界面で応力自由という条件より Rayleigh-Lamb の周波数方程式が導びかれたが、それより簡単な周波数方程式となる境界条件も考えることができる。それは次のような混合境界条件である。

[註1] 式(6.68)'(6.69)'は形が簡潔であるが、その中で ω を与えて k を電算機等で数値的に求めると無縁根も出て来るので注意が必要である。

[註2] Mindlin, R.D., "Waves and Vibrations in Isotropic Elastic Plates" IN: Structural Mechanics, Eds. by J.N. Goodier and N.J. Hoff, New York, Pergamon Press, PP199~232 (1960)

$$x_2 = \pm l \text{ で } u_2 = 0, \tau_{21} = 0 \text{ あるいは } u_1 = 0, \tau_{22} = 0$$

これらの条件は多少非現的に思えるかもしれないが、考えられうる近似として前者は、表面が完全潤滑された剛体と接している場合であり、後者は剛境界から剥離した場合にあたる。後述するが、このような境界条件は一般的な条件下における周波数スペクトル曲線を検討する上で理論的に重要な役割を果たす。時間調和波が反射する時に、このような混合境界条件下では第5.6節で示したように、膨張波と等積波との連成が起らない。したがって $u_2 = 0$ と $\tau_{21} = 0$ の境界条件下で対称運動を調べれば $A_2 = 0$ で $\sin(\beta l) = 0$ もしくは $B_1 = 0$ で $\sin(p l) = 0$ であればよい。これら二つの場合はそれぞれ連成しない等積モードと膨張モードにあたる。そこで $\sin \beta l = 0$ の条件より、対称等積モードの場合

$$\beta = \frac{n\pi}{2l} \quad ; \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

β の定義式(6.63b)を用いて、次の周波数方程式を得る。

$$\Omega^2 = n^2 + \xi^2$$

ただし Ω と ξ は無次元周波数と無次元波数で

$$\Omega = \frac{2l\omega}{\pi C_T}, \quad \xi = \frac{2l\kappa}{\pi}$$

このようにして、他の色々なモードについても周波数方程式を誘導できる。

境界条件 $u_2 = 0, \tau_{21} = 0$ ($x_2 = \pm l$) に対しては次のようにまとめられる。

$$\text{対称等積モード: } A_2 = 0 \quad ; \quad \Omega^2 = n^2 + \xi^2, \quad (n = 0, 2, 4, \dots) \quad (6.70)$$

$$\text{反対称等積モード: } A_1 = 0 \quad ; \quad \Omega^2 = n^2 + \xi^2, \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (6.71)$$

$$\text{対称膨張モード: } B_1 = 0 \quad ; \quad \Omega^2 = \kappa^2(m^2 + \xi^2), \quad (m = 0, 2, 4, \dots) \quad (6.72)$$

$$\text{反対称膨張モード: } B_2 = 0 \quad ; \quad \Omega^2 = \kappa^2(m^2 + \xi^2), \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (6.73)$$

ここに $\kappa = C_L/C_T$ である。実波数 ξ の時、 ξ と Ω の関係は n 又は m をパラメータとした $\xi\Omega$ 面上の曲線群として表わされる。それらは式(6.70)(6.71)に対しては $\Omega = \xi$ を、また式(6.72)(6.73)に対しては $\Omega = \kappa\xi$ を漸近直線とする双曲線になる。一方虚波数 $\text{Im}\xi$ の時の曲線群は、式(6.70)(6.71)に対しては半径 n の円弧となり、また

式(6.72)と(6.73)に対しては短軸、長軸がそれぞれ $m, \kappa m$ の楕円となる。このような曲線群、すなわち周波数スペクトル曲線群は、水平偏向のSH波のそれと非常によく似ている。

もう一方の境界条件 $u_1 = 0, \tau_{22} = 0$ ($x_2 = \pm l$) に対する周波数方程式は

$$\text{対称等積モード: } A_2 = 0 \quad ; \quad \Omega^2 = n^2 + \xi^2, \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (6.74)$$

$$\text{反対称等積モード: } A_1 = 0 \quad ; \quad \Omega^2 = n^2 + \xi^2, \quad (n = 2, 4, 6, \dots) \quad (6.75)$$

$$\text{対称膨張モード: } B_1 = 0 \quad ; \quad \Omega^2 = \kappa^2(m^2 + \xi^2), \quad (m = 1, 3, 5, \dots) \quad (6.76)$$

$$\text{反対称膨張モード: } B_2 = 0 \quad ; \quad \Omega^2 = \kappa^2(m^2 + \xi^2), \quad (m = 0, 2, 4, \dots) \quad (6.77)$$

自由表面を有する弾性単層を伝わる、 x_3 に独立な波の解析は、より一般的な取扱も可能で、式(6.9)(6.68)(6.69)を導くことができる。ポテンシャル解として

$$\phi = (A \cos p x_2 + B \sin p x_2) \cdot e^{i(\kappa x_1 - \omega t)}$$

$$\psi_1 = (C \cos \beta x_2 + D \sin \beta x_2) \cdot e^{i(\kappa x_1 - \omega t)}$$

$$\psi_2 = (E \cos \beta x_2 + F \sin \beta x_2) \cdot e^{i(\kappa x_1 - \omega t)}$$

$$\psi_3 = (G \cos \beta x_2 + H \sin \beta x_2) \cdot e^{i(\kappa x_1 - \omega t)}$$

と置く。表面 ($x_2 = \pm l$) で応力 $\tau_{22}, \tau_{21}, \tau_{23}$ が 0 となる 6 つの条件と、 $x_2 = \pm l$ で $\nabla \cdot \Psi = 0$ となる 2 つの条件より、8 つの定数 $A \sim H$ に対する 8 本の斉次式が求まる。解として意味をもつことから係数行列式を 0 とおいて周波数方程式が得られるが、この 8×8 の行列式は 4 つの小行列式の積に帰着できるので、それぞれの小行列式を満たす ω と l の関係を独立に解析することができよう。それぞれの小行列式を 0 と置いた式は、式(6.9)の対称モードと反対称モード、および式(6.68)と(6.69)になる。

6.8 レーレー・ラム周波数スペクトル

レーレー・ラムの周波数方程式によって決定される周波数と波数の関係は周波数-波数面上で無限本の曲線によって表わされる。各々の曲線を分枝(branch)としてこの曲線群によって表現される特性を、その導波体の周波数スペクトル(frequency spectrum)^[註]と呼ぶ。分枝は層内の変形が対称となる場合と反対称となる場に対応して無限にあり、そのうち対称モードは厚さに渡った平均変位が長手方向であるので縦モード(longitudinal mode)と言う。一方、反対称モード変形は、平均の変位が横方向であるので一般にたわみモード(flexural mode)と呼んでいる。さて、無次元周波数 Ω と無次元波数 ξ を、前と同様に

$$\Omega = \frac{2h\omega}{\pi C_T}, \quad \xi = \frac{2h\ell}{\pi}$$

と定義すれば、縦モードのレーレー・ラムの周波数方程式は(6.68)より

$$\frac{\tan\left[\frac{\pi}{2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}\right]}{\tan\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2\right)^{1/2}\right]} = - \frac{4\xi^2\left(\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2\right)^{1/2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}}{(\Omega^2 - 2\xi^2)^2} \quad (6.78)$$

また、たわみモードに対しては、式(6.69)より

$$\frac{\tan\left[\frac{\pi}{2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}\right]}{\tan\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2\right)^{1/2}\right]} = - \frac{(\Omega^2 - 2\xi^2)^2}{4\xi^2\left(\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2\right)^{1/2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}} \quad (6.79)$$

式(6.78)と(6.79)から、 ξ の関数として Ω を表わす曲線群。すなわち周波数スペクトルを計算するためには、物質によって定まる κ が補助変数として入っているので、それを与えることが必要である。その κ は縦波と横波の速度比であり、ポアソン比によって定まる。すなわち

$$\kappa = \left[\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \right]^{1/2}$$

したがって具体的に周波数スペクトルを算出する場合には、ポアソン比の値を指定して行なわれる。レーレー・ラムの方程式は比較的簡潔な形になっているけれども、そ

[註] 波数 ξ を固定して考えれば、ある導波体を伝はしめる波は、その系に固有な値の定まった周波数の波のみに限られ、その周波数は離散的で無限個ある。特定の周波数が離散的に存在するところは、ちょうど分光学における物質固有の周波数のスペクトル輝線が出る状態に似ている。

の分枝を解析的に求めて表わすことはできない。詳細な数値的状态を知るには、式(6.68)と(6.69)の根をデジタル計算機によって算出しなければならない。大方、広く使われている数値解析技法は、周波数 Ω の値を定めて、波数 ξ を変化させ式(6.68)あるいは式(6.69)の左辺の値の符号を変える ξ を探しあてることである。実数 ξ を求める場合、これは最も直接的であり広範囲の ξ 領域にわたって数値結果が求められる。しかしながら ξ は虚数にも複素数にもなり、このような場合、前述の符号反転の手法によって希望の ξ の値を求めることはできない。そこで数値的に各分枝を求める前に周波数スペクトルの状態を、漸近解析などによって話し調べておくことが重要になる。弾性単層の波動特性解析では周波数方程式の Ω に関する対称性から Ω の値を正実数として扱われるが、波数 ξ は実数とは限らない。では、このような場合の波動現象はどのようになるのだろうか。式(6.59)(6.60)の解形の ℓ に実数値、虚数値、複素数値を入れて考えればよい。すなわち、実波数の時、 x_1 方向に減衰しないで伝ばする時間調和波となり、虚波数の時は波動が指数関数的に伝ばとともに増加あるいは減衰するものとなり、複素波数では、波動が指数関数と三角関数の積となるので伝ばとともに振動しながら振幅の増減してゆく波になる。いずれも x_2 方向には定在波の形になっている。

波数の極端に小さい時と大きい時の漸近解析により周波数 Ω の取る値を検討することは、周波数スペクトルの様子を知る上で大変参考になる。まず $\xi \ll 1$ すなわち $\ell \ll \pi/2$ とする。^[註] 実数 ξ に対して式(6.78)(6.79)に現われる平方根のため、 ξ - Ω 面を次の3つの領域に分けて考える。

$$(i) \xi > \Omega, \quad (ii) \Omega > \xi > \frac{\Omega}{\kappa}, \quad (iii) \frac{\Omega}{\kappa} > \xi$$

(i)の場合、式(6.78)(6.79)の三角関数 $\tan(-)$ は二つの平方根がともに純虚数となる。したがって、公式 $\tan(ix) = i \tanh(x)$ によって双曲関数 $\tanh(-)$ になる。いま

[註] $\ell = 2\pi/\Lambda$ であるから $\xi \ll 1$ の場合は板厚 2ℓ に比べ、半波長 $\Lambda/2$ が非常に大きい時にあたり実用上最も注目しなければならない点である

Ω を ξ の関数と見て、 $\xi=0$ まわりでの展開形を仮定してみる。すなわち

$$\Omega = \Omega_1 \xi + \frac{1}{2} \Omega_2 \xi^2 + \dots \quad (6.80)$$

上の展開形に定数項がないのは $1 \gg \xi > \Omega$ の領域内の展開であるためである。反対称(たわみ)モードの周波数方程式に、式(6.80)を代入し、 ξ の係数比較により Ω_1 と Ω_2 を定める。 $\tanh \varepsilon \approx \varepsilon(1 - \frac{1}{3}\varepsilon^2)$; $\varepsilon \ll 1$ だからその周波数方程式は

$$\frac{i \frac{\pi}{2} \sqrt{\xi^2 - \Omega^2} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} (\xi^2 - \Omega^2) \right\}}{i \frac{\pi}{2} \sqrt{\xi^2 - \frac{\Omega^2}{\kappa^2}} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} (\xi^2 - \frac{\Omega^2}{\kappa^2}) \right\}} = \frac{(\Omega^2 - 2\xi^2)^2}{4\xi^2 i \sqrt{\xi^2 - \frac{\Omega^2}{\kappa^2}} \cdot i \sqrt{\xi^2 - \Omega^2}}$$

$$4\xi^2(\xi^2 - \Omega^2) \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} (\xi^2 - \Omega^2) \right\} = (\Omega^2 - 2\xi^2)^2 \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{12} (\xi^2 - \frac{\Omega^2}{\kappa^2}) \right\}$$

$$\text{従って、} \Omega^2 + \frac{\pi^2}{12} \xi^2 (3\Omega^2 - 4\xi^2) + \frac{\pi^2}{12} \frac{1}{\kappa^2} (\Omega^4 - 4\Omega^2 \xi^2 + 4\xi^4) = 0$$

式(6.80)を入れて Ω_1 と Ω_2 を求めれば

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 2\pi \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \right]^{1/2}$$

$$\text{よって、} \Omega = \left[\frac{\kappa^2 - 1}{3\kappa^2} \right]^{1/2} \pi \xi^2 \quad (6.81)$$

式(6.81)は板のたわみ運動に対する周波数を与えている。すなわち板厚に比べて十分に長い波長の波で成り立つ古典板理論の波動に一致する。

式(6.80)を縦モードの周波数方程式に代入しても $\xi > \Omega$ の領域では解は得られない。

次に、 ξ を無限に大きくして行った時の漸近形を $\xi > \Omega$ で考える。式(6.78)(6.79)ともにその左辺は 1 に近づくので $\xi \gg 1$ の時、これらの方程式は

$$(\Omega^2 - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2 \left(\xi^2 - \frac{\Omega^2}{\kappa^2} \right)^{1/2} (\xi^2 - \Omega^2)^{1/2} = 0$$

に帰着される。これは以前に導いた L-L の特性方程式である。波数を増大させた時の波動の漸近的挙動は、非常に短い波が弾性層の表面に沿って、ちょうど半無限空間の表面に沿う波による波動と同様になるはずである。このことから L-L 波の特性を与える式になることが理解できよう。

(ii)、すなわち平方根の 1 つが虚数で残りが実数となる $\Omega > \xi > \frac{\Omega}{\kappa}$ の場合を調

べる。 $\xi \gg 1$ とすれば二つの周波数方程式の解は漸近的に $\xi = \Omega$ の直線に近づくということが検討できる。すなわち $\xi \rightarrow \infty$ の時 $\tanh \left[\frac{\pi}{2} \left(\xi^2 - \frac{\Omega^2}{\kappa^2} \right)^{1/2} \right] \rightarrow 1$ 。そして $\Omega^2 - \xi^2 = a^2$ とおくと縦モードに対し^[註]

$$\frac{\tan \left(\frac{\pi}{2} a \right)}{i} = - \frac{4\xi^2 i \left(\xi^2 - \frac{\xi^2 + a^2}{\kappa^2} \right)^{1/2} a}{(a^2 - \xi^2)^2} \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} -4ia \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right)^{1/2} \frac{1}{\xi} \sim 0$$

従って $a \rightarrow 0$ で、 $\Omega^2 - \xi^2 = 0$ になり $\xi = \Omega$ に漸近する。一方、たわみモードに対し

$$\frac{\tan \left(\frac{\pi}{2} a \right)}{i} = \frac{-(a^2 - \xi^2)^2}{4\xi^2 i \left(\xi^2 - \frac{\xi^2 + a^2}{\kappa^2} \right)^{1/2} a} \underset{\xi \rightarrow \infty}{\sim} - \frac{\xi}{4ia \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right)^{1/2}} \sim \infty$$

従って $a \rightarrow 1$ で $\Omega^2 - \xi^2 = 1$ になり、これは $\xi = \Omega$ に漸近する双曲線である。 $\xi \ll 1$ では、式(6.78)に極限操作をほどこしてみる。 $\tanh \left[\frac{\pi}{2} \left(\xi^2 - \frac{\Omega^2}{\kappa^2} \right)^{1/2} \right] \sim \frac{\pi}{2} \left(\xi^2 - \frac{\Omega^2}{\kappa^2} \right)^{1/2}$ だから

$$\Omega = 2\xi \sqrt{\frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2}} \quad (6.82)$$

を得る。式(6.79)に対しては $\xi \ll 1$ の時の漸近解はない。式(6.82)の関係は板の伸縮運動の周波数と波数の関係を与える。^[註]

(iii)、すなわち $0 < \xi < \Omega/\kappa$ の場合を考える。この領域で $\xi \gg 1$ に対する漸近値はない。 $\xi \ll 1$ の時は、対称モードで

$$\sin(\pi\Omega/2) = 0 \quad \text{又は} \quad \cos(\pi\Omega/2\kappa) = 0 \quad (6.83a, b)$$

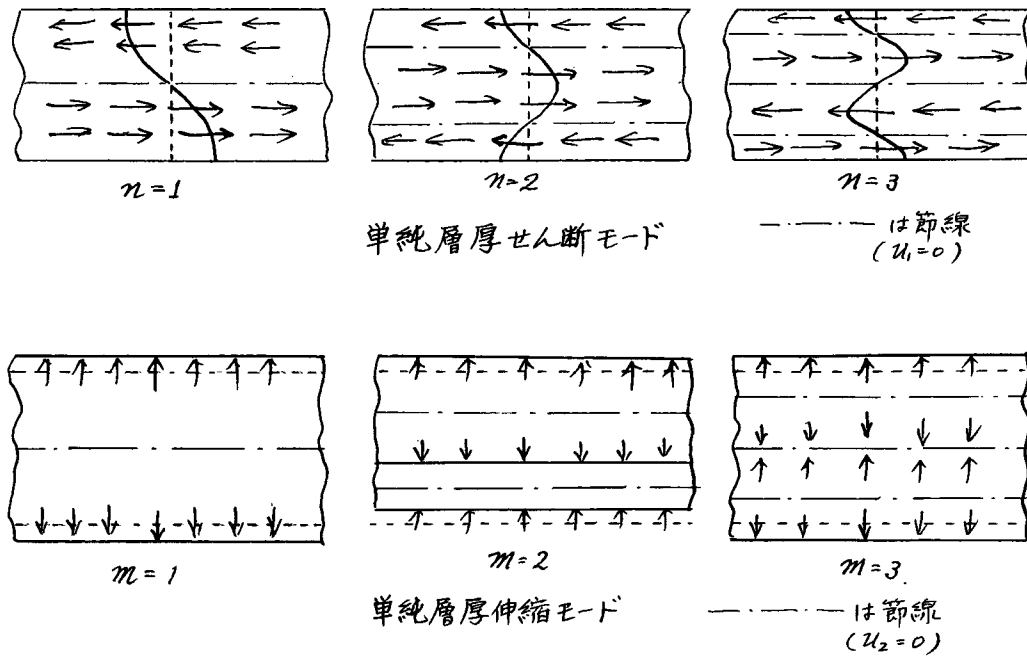
$$\text{反対称モードで} \quad \sin(\pi\Omega/2\kappa) = 0 \quad \text{又は} \quad \cos(\pi\Omega/2) = 0 \quad (6.84a, b)$$

になる。これらは $\xi=0$ の時であるから無限に長い波長の波に対する周波数を与えている。すなわち x, y 座標に無関係な弾性層内運動に対するものである。変形状態を図に示せば次頁のようになり、層厚の単純伸縮 ($u_1=0, u_2=0$) 運動と層厚の単純せん断 ($u_1 \neq 0, u_2=0$) 運動となる。この時の無次元周波数 Ω は、まとめると Simple thickness stretch.

$$\text{対称な単純層厚伸縮モード: } \Omega = \kappa m, \quad m = 1, 3, 5, \dots \quad (6.83)$$

$$\text{反対称な単純層厚伸縮モード: } \Omega = \kappa m, \quad m = 0, 2, 4, \dots \quad (6.84)$$

[註] 最低次縦モードに対するこの分枝は $\Omega = \xi$ と交差して領域 $\frac{\Omega}{\kappa} < \xi < \Omega$ から領域 $\Omega < \xi$ へのびている。そして $\xi \rightarrow \infty$ では L-L 波速度を C_R とすれば $\Omega = (C_R/C_T)\xi$ に漸近する分枝である。式(6.82)は板の面内の伸縮波、すなわち板波の周波数と波数の関係である。



対称な単純層厚せん断モード: $\Omega = n, n = 0, 2, 4, \dots$ (6.85)

反対称な単純層厚せん断モード: $\Omega = n, n = 1, 3, 5, \dots$ (6.86)

これらの $\xi \rightarrow 0$ とした極限の周波数はそれぞれ式(6.76)(6.77)(6.70)(6.71)から得られる膨張モードと等積モードの $\xi \rightarrow 0$ 極限周波数と一致する。したがって単純層厚伸縮モードと単純層厚せん断モードは前に考えた混合境界条件下における解析の $\xi \rightarrow 0$ とした特別の場合ともなる。

いま式(6.68)を次のように2つに分けて考えてみよう。

$$f_1(\Omega, \xi) + f_2(\Omega, \xi) = 0$$

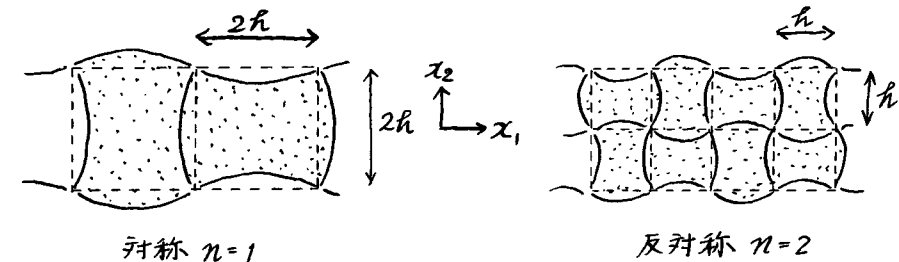
$$\text{ここは } f_1(\Omega, \xi) = (\Omega^2 - 2\xi^2)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\Omega^2 - \xi^2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2}\right)$$

$$f_2(\Omega, \xi) = 4\xi^2 \sqrt{\Omega^2 - \xi^2} \sqrt{\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\Omega^2 - \xi^2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2}\right)$$

そして $f_1 + f_2 = 0$ の (ξ, Ω) を求める代わりに $f_1 = 0, f_2 = 0$ を満たす ξ, Ω 関係を求め両方に共通な (ξ, Ω) を考えてみる。それらの組合せは次のようにまとめられよう。

- $\Omega = \sqrt{2}\xi$, かつ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\Omega^2 - \xi^2}\right)$ が $\pm 1 = 0$: case (a)
- ξ かつ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2}\right)$ が $\pm 1 = 0$: case (b)
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\Omega^2 - \xi^2}\right)$ かつ $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2}\right)$ が $\pm 1 = 0$: case (c)
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\Omega^2 - \xi^2}\right)$ かつ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2}\right)$ が $\pm 1 = 0$: case (d)

case (a): この場合、 $\Omega = \sqrt{2}\xi$ の直線と $\Omega^2 - \xi^2 = n^2$ の双曲線の交点が $f_1 + f_2 = 0$ (n は奇数) を満たす点となる。これを周波数スペクトル図で示すと Ω 軸上の ●印にあたる。式(6.69)を用いれば反対称の場合も同様に考えられ n が偶数の時になり Ω 軸上の □印に



なる。対応する最低次の2つの変形モードを上を描いた。このような変形モードを Lamé のモード (Lamé's modes) という。この現象モードの特徴は $x_2 = \pm h$ で応力 τ_{22}, τ_{21} がともに 0 になるばかりでなく $x_1 = \pm h$ などの節となる面でも τ_{11} と τ_{12} が 0 になることである。また、膨張 ($\partial u_1 / \partial x_1 + \partial u_2 / \partial x_2$) も恒等的に 0 であって、いわゆる等積モードの変形波でもある。これは Lamé のモードは界面に SV 波のみが 45° で入射と反射をして構成されるためである。

case (b): この場合、単純層厚伸縮モード(前頁図参照)となる。周波数スペクトル図で示すと Ω 軸上の ●印にあたる。式(6.69)より反対称の場合を同様に $f_1 = 0, f_2 = 0$ から求めれば単純層厚せん断モードとなり Ω 軸上の □印で示される。

case (c): この場合、式(6.74)と(6.76)を満足する Ω, ξ 上の曲線の交点になる。これに対応する交点を周波数スペクトル図に n, m とともに奇数となる細線の交点(●印)で示す。

case (d): この場合、式(6.70)と(6.72)を満足する曲線の交点(●印)で示される。この時、 m, n はともに偶数で与えられる。

さて, case(a)~case(d)は対称モードに対するレーラム周波数方程式を満たす特別な点である。したがって自由面を有する弾性層の各分枝はその点を通らなければな

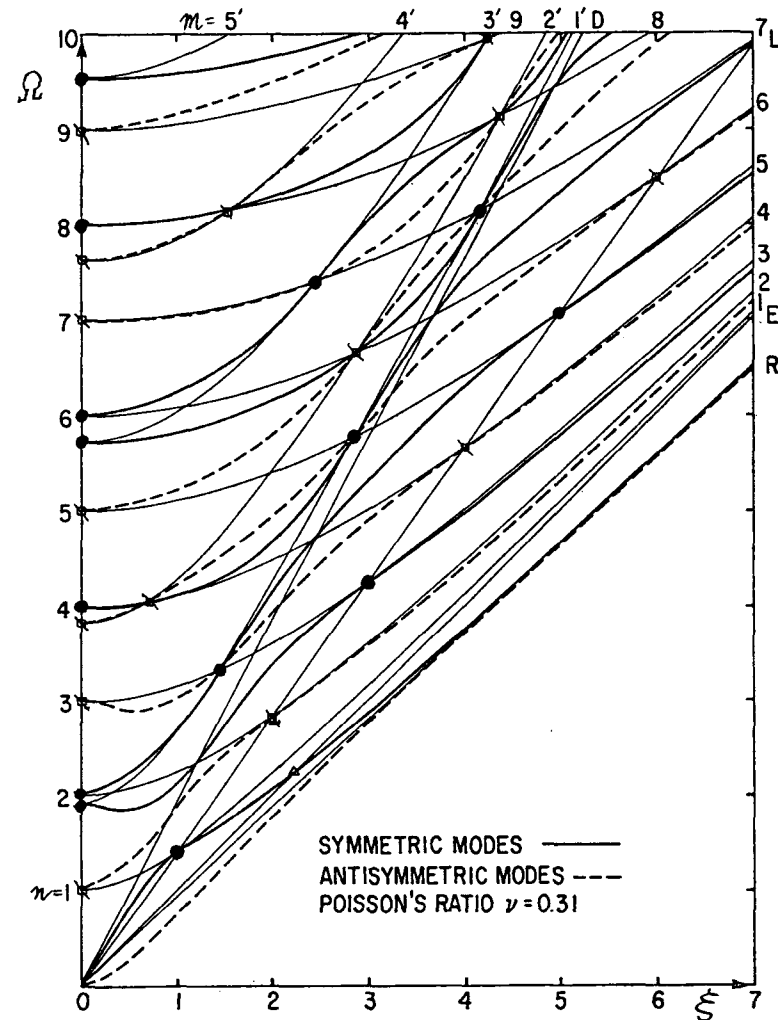


図 6.10: 周波数スペクトル: 自由表面の無限弾性平板(単層)の波動特性
 細い実線は混合境界条件 $u_2=0, \tau_{21}=0$ あるいは $u_1=0, \tau_{22}=0$ によって得られるもの。欄外の数字はその時の式(6.70)~(6.77)に対応する n と m の値。OL線上の●と□では Lamé のモードとなる。Ω軸上の●と□では単純層厚モードとなる。OR線はレー波への漸近線。

(Heermann, G ed. "R.D.Mindlin and Applied Mechanics" 1973, Pergamon より再構成)

らない。ところで混合境界条件下で得られる分枝(周波数スペクトル図の細線)上ではそれらの交点を除けばレーラム周波数方程式を満たす(念Ω)は存在しない^[註]から、その細線で描いた分枝を横切ることはない。したがってレーラム周波数スペクトル曲線は常に細線で区切られた領域内を通っている。しかも $m+n$ が偶数となる交点を通る。また、交点上のスペクトル曲線の傾きが計算できるから細線で区切られた網目によって周波数スペクトルを描くことが容易になるだろう。

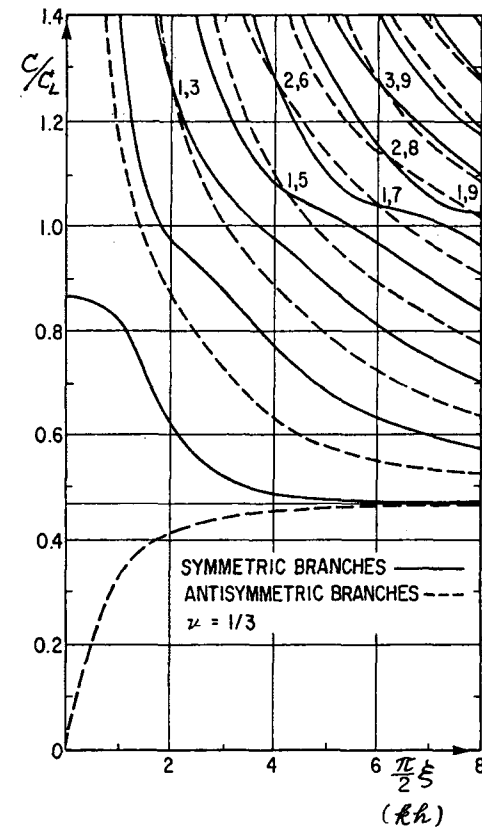


図 6.11 位相速度スペクトル(分散曲線):無限弾性平板(単層)
 図中の — と --- の交点の数値は m, n に対する値。

(Heermann, G ed. "R.D.Mindlin and Applied Mechanics" 1973 Pergamon より再構成)

[註] 細線上では f_1, f_2 の一方が 0 で他方が 0 でないから常に $f_1 + f_2 \neq 0$

図6.10からわかるようにある Ω の値に対応する実波数は有限個しかないが、レーラムの周波数方程式は三角関数を含む形で与えられ周期性をもっているから無限個の波数が考えられる。そこで無限個の複素波数となる分枝がなくてはならないだろう。これらの複素分枝の存在する状態は $\Omega \ll 1$ で容易に検討することができる。縦モードを例にして、式(6.78)を

$$F(\Omega, \xi) = 0 \quad (6.87)$$

と書きかえて見る。ただし

$$F(\Omega, \xi) = \frac{\tan\left[\frac{\pi}{2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}\right]}{\tan\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2\right)^{1/2}\right]} + \frac{4\xi^2\left(\frac{\Omega^2}{\kappa^2} - \xi^2\right)^{1/2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}}{(\Omega^2 - 2\xi^2)^2} \quad (6.88)$$

$\Omega \ll 1$ を考えるから上式は

$$F(\Omega, \xi) = F_0(\xi) + F_1(\xi)\Omega + F_2(\xi)\Omega^2 + \dots \quad (6.89)$$

と表わせる。式(6.87)は $\Omega=0$ でも成り立たなければならないから $F_0(\xi) \equiv 0$ を得る。また $F(\Omega, \xi)$ は Ω^2 の関数であるから $F_1(\xi) \equiv 0$ であり、式(6.87)の解は $\Omega=0$ 面に直交している。これより $\Omega \ll 1$ では $F(\Omega, \xi) = F_2(\xi)\Omega^2$ のごとく Ω の二次式で表現でき、式(6.87)を満足する曲線は $0 < \Omega \ll 1$ において $F_2(\xi)\Omega^2 = 0$ だから

$$F_2(\xi) = 0 \quad (6.90)$$

したがって式(6.88)の $F(\Omega, \xi)$ を用いれば、関数 $F_2(\xi)$ は $F_2(\xi) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{F(\Omega, \xi)}{\Omega^2}$

と表わせるから、ロピタルの定理によって $F_2(\xi)$ を求めることができる。すなわち

$$\sinh(\pi\xi) + \pi\xi = 0$$

この式を満足する ξ は、式(6.87)によって定義される曲線の平面 $\Omega=0$ との交点である。同様な手順で、たわみモードに対しても

$$\sinh(\pi\xi) - \pi\xi = 0$$

を得る。ここで $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ ($\xi_1, \xi_2 \in \text{Re}$) と書けば ξ_1 と ξ_2 に対する連立方程式

$$\cos(\pi\xi_2) = \mp \pi\xi_1 / \sin(\pi\xi_1)$$

$$\cosh(\pi\xi_1) = \mp \pi\xi_2 / \sinh(\pi\xi_2)$$

に書ける。符号の $-$ と $+$ はそれぞれ縦モードとたわみモードに適用する。この連立方程式から、満足する (ξ_1, ξ_2) が無限に得られるので、レーラムの周波数スペクトルは無数の複素波数となるモード(複素分枝)を持っていることが明らかである。以上 $\Omega \ll 1$ の時を調べ、複素分枝が無限に存在することを述べたが、より詳しくスペクトルを調べるため、平面 $\xi_1=0$ と平面 $\xi_2=0$ とのそれぞれに交わる点を求めることを考える。周波数方程式が ξ^2 の形で依存しているから、実数 ξ なら符号の反転したもの、また複素 ξ ならその共役も周波数方程式を満たす解になる。従って、各分枝は平面 $\xi_1=0$ と $\xi_2=0$ のそれぞれの交点で直交している。すなわち $F(\Omega, \xi)$ の ξ 偏導関数は $\xi_1=0$ で $\partial F / \partial \xi_2 = 0$ 、 $\xi_2=0$ で $\partial F / \partial \xi_1 = 0$ である。また

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0$$

であるから F を ξ の解析関数と考えれば、両方の場合とも $(\xi_1=0$ の面とも $\xi_2=0$ の面とも)交点で $\partial \Omega / \partial \xi = 0$ となる。ただし $\partial F / \partial \Omega = 0$ の場合を除く。各分枝が $F(\Omega, \xi) = 0$ を満たすから、これを条件として、結局、分枝(複素分枝)は $\xi_1=0$ あるいは $\xi_2=0$ の平面と

$$F(\Omega, \xi) = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = 0 \quad (6.91) \quad [\text{註}]$$

を満足する点で交わる。式(6.91)は周波数 Ω の ξ に対する極値を与える式になっている。実数 ξ の場合、 Ω の極小値は遮断周波数と呼ぶ。

図6.12に、対称モード時の低次分枝を複素 ξ 空間で描いて示す。分枝上の Ω と ξ の時の現象などを理解するために、特定の分枝を $\Omega=0$ の交点からたどって説明しよう。 $\Omega \ll 1$ の時、最低次モードの式(6.82)を除けば(反対称の場合は式(6.81))複素 ξ から出発する ξ になる。 $\xi_1 > 0$ 、 $\xi_2 > 0$ を考えれば、波動 $\Phi(x_2) e^{i(\xi_1 x_1 - \Omega t)}$ は x_1 の増加とともに振幅が減衰する。 Ω が増加するにつれてその振幅の x_1 とともに減衰する割合が小さくなる。 Ω がB点の周波数(遮断周波数)になるまでこの状態は続く。さらに Ω が大きければ \overline{BC} に沿う実数 ξ の波数で減衰しないで伝ばする波となる。

[註] $\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = \frac{\partial F}{\partial \xi_2}$ を用いれば $\xi_2 \ll 1$ での展開は $F(\Omega, \xi) = F(\Omega, \xi_1) + i\xi_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \dots = 0$ だから $F(\Omega, \xi_1) = \xi_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} = 0$ 。もし $0 < \xi_2 \ll 1$ ならば $F(\Omega, \xi_1) = \frac{\partial F}{\partial \xi_1} = 0$ 。そこで $\frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1} = 0$ を考えれば $\frac{\partial F}{\partial \Omega} \neq 0$ の時 $\frac{\partial \Omega}{\partial \xi_1} = 0$ を得る。 $\xi_1 \ll 1$ の場合も同様に行えば $F(\Omega, \xi_2) = \frac{\partial F}{\partial \xi_2} = 0$ となり、一般形で式(6.91)となる。

群速度は複素波数のときは常に0であり、波動エネルギーが x_1 の正方向にはこぼれる現象に対しては、図6.12の実線分枝が対応している。すなわち曲線の傾き $\partial\Omega/\partial\xi_1$ が正のものである。点線は群速度が負となる分枝を示す。 \widehat{BF} は位相速度は正であるも群速度の負となりエネルギーの伝搬方向と反対方向に波の山(又は谷)が進行するいわゆる後退波(backward wave)である。レ-レ-ラムの周波数方程式を満足する曲線は必ずしも全体がなめらかな

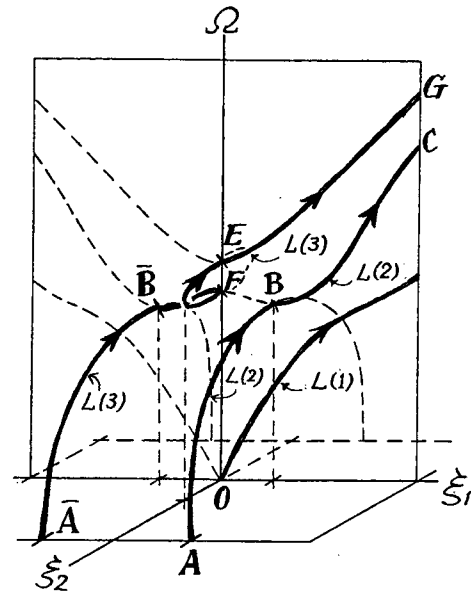


図6.12 対称モードのレ-レ-ラム周波数スペクトル

曲線からなるものではなく、遮断周波数をもつところで直角に曲った曲線からなっている。たとえば $L(2)$ のモードでは \widehat{AB} と \widehat{BC} から、また $L(3)$ のモードでは \widehat{AB} と \widehat{BF} と \widehat{FE} と \widehat{EG} の線分の組合せて構成される。境界値問題の解析において、エネルギーが座標 x_1 の正方向に伝搬する波より解を考えるならば一貫して図6.12の実線分枝のみ採用することになる。反対称モードの周波数スペクトルについても同様に考えることができる。反対称モードの場合、たわみ変形特性を示しているので最低次モードから順に $F(1), F(2), \dots$ とモード名を付けることができる。ただ単に、たわみモード(the flexural mode), 縦モード(the longitudinal mode)と言った場合は、 $F(1)$ モードと $L(1)$ モードを指すことが多い。

これまで、 x_3 方向に平面ひずみとして取扱って来たが、 x_3 方向に無限に広がる層のある層で波面が $\gamma x_1 + \xi x_3 - \omega t$ の形で与えられる時は ξ^2 を $\gamma^2 + \xi^2$ におきかえて同様な解析が可能である。また $x_1 = \pm L$ である有限長層の場合、その境界で $\tau_1 = \tau_2 = 0$ の混合条件を与えた時に $\xi L = \pi n/2$ ($n=0, 1, 2, \dots$)を満足する反対称モードも、翻べられている[註]

[註] Herrmann, G., ed., "R.D. Mindlin and Applied Mechanics" (1973), p. 171~p.174

6.9 弾性円柱内の波動

均質等方な弾性体を支配する運動方程式の円柱座標表示は式(2.132)~(2.139)

より、変位表示で

$$\nabla^2 u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial r} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6.92)$$

$$\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta}{\partial \theta} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (6.93)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (6.94)$$

ここに ∇^2 はラプラス演算子で

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (6.95)$$

また Δ は膨張で

$$\Delta \equiv \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} (\frac{\partial v}{\partial \theta} + v) + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6.96)$$

ここで取扱う、応力ひずみ関係は

$$\tau_r = \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} \quad (6.97)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \right\} \quad (6.98)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (6.99)$$

である。第2章で述べたように、変位 u, v, w はポテンシャル ϕ と ψ によって表わせる。特に円柱座標ではその式は式(2.132)~(2.134)のようになる。ポテンシャル ϕ と ψ は非連成の波動方程式

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{1}{c_L} \right)^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \psi = \left(\frac{1}{c_T} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (6.100), (6.101)$$

を満足し、残りのポテンシャル ψ_r と ψ_θ は連成し

$$\nabla^2 \psi_r - \frac{\psi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_\theta}{\partial \theta} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial t^2} \quad (6.102)$$

$$\nabla^2 \psi_\theta - \frac{\psi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2} \quad (6.103)$$

である。またベクトルポテンシャルは制約条件として $\nabla \cdot \Psi = 0$ を満足するように選ぶ。

さて、半径 a の無限長中実円柱を考えよう。表面($r=a$)で応力が作用しないとすると

$$\tau_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \tau_{rz} = 0 \quad (6.104a, b, c)$$

まずスカラーポテンシャル $\phi(r, \theta, z, t)$ を考える。 z の正方向に伝ばする波の形として

$$\phi = \Phi(r) \Theta(\theta) e^{i(kz - \omega t)}$$

と置く。これは円柱の解を r と θ に関する変数分離形に仮定したものである。

式(6.100)は $\Phi(r)$ と $\Theta(\theta)$ に対する次の二本の式に帰着される。

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\Phi - \frac{\pi^2}{r^2}\Phi = 0 \quad (6.105)$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \pi^2\Theta = 0 \quad (6.106)$$

関数 $\Theta(\theta)$ は式(6.106)より $\pi\theta$ を変数とする sine 関数と cosine 関数である。解は微係数も含めて θ の連続関数であるから π は 0 もしくは整数でなければならない。

$\Phi(r)$ に対する式(6.105)の解は通常のベッセル関数になる。中実円柱の時は、円柱中心($r=0$)の解が有界でなければならないから第一種ベッセル関数 $J_n(\cdot)$ のみによって解を作る。以上から、スカラーポテンシャル ϕ の解形は

$$\phi = \{A_1 \cos(\pi\theta) + A_2 \sin(\pi\theta)\} J_n(pr) e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.107)$$

ここに p は、式(6.63a)と同様に $p^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ で定義される。 ψ_z を支配する波動方程式も同様な方法で取扱えば、その解は、 θ を $\beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2$ とおけば

$$\psi_z = \{B_1 \cos(\pi\theta) + B_2 \sin(\pi\theta)\} J_n(\beta r) e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.108)$$

次に ψ_r と ψ_θ を支配する方程式(6.102)(6.103)にもどって ψ_r と ψ_θ を考えよう。その両式は連成しているので幾分手間どるが、円周方向に周期性があるから θ に関して三角関数形を因数として入ることがわかる。さらに代数すればわかるように、 ψ_r が θ の sine 関数 (cosine 関数) 形とした時、 ψ_θ は cosine 関数 (sine 関数) 形に依存することから次のような対として与えることができよう。

$$\psi_r = \Psi_r(r) \sin(\pi\theta) e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.109)$$

$$\psi_\theta = \Psi_\theta(r) \cos(\pi\theta) e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.110)$$

式(6.109)(6.110)を式(6.102)(6.103)に代入して

$$\frac{d^2\Psi_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_r}{dr} + \frac{1}{r^2}(-\pi^2\Psi_r + 2\pi\Psi_\theta - \Psi_r) - k^2\Psi_r + \frac{\omega^2}{c^2}\Psi_r = 0$$

$$\frac{d^2\Psi_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi_\theta}{dr} + \frac{1}{r^2}(-\pi^2\Psi_\theta + 2\pi\Psi_r - \Psi_\theta) - k^2\Psi_\theta + \frac{\omega^2}{c^2}\Psi_\theta = 0$$

となる。この二式の和と差を考えれば複雑に見える式も首尾よく解ける。まず引算して ($\Psi_r - \Psi_\theta$) の式に対する方程式と見なして、とけば

$$\Psi_r - \Psi_\theta = 2C_2 J_{n+1}(\beta r) \quad (6.111)$$

和を考えて解けば

$$\Psi_r + \Psi_\theta = 2C_1 J_{n-1}(\beta r) \quad (6.112)$$

式(6.111)と(6.112)を連立させて Ψ_r と Ψ_θ を求めれば

$$\Psi_r = C_1 J_{n-1}(\beta r) + C_2 J_{n+1}(\beta r) \quad (6.113)$$

$$\Psi_\theta = C_1 J_{n-1}(\beta r) - C_2 J_{n+1}(\beta r) \quad (6.114)$$

以上でポテンシャル ϕ , ψ_r , ψ_θ , ψ_z は 4 つの未定数 A_1, B_1, C_1, C_2 あるいは A_2, B_2, C_1, C_2 によって表現された。境界条件は式(6.104a, b, c)の 3 条件しかないから、さらにもう 1 つの条件がなければならない。よく用いられるものは $\nabla \cdot \Psi = 0$ であるがこの条件には任意性があり、本問では次の簡単な条件で置きかえることができる。

$$\Psi_r = -\Psi_\theta \quad (6.115)$$

これは式(6.112)から、 $C_1 = 0$ を意味している。したがって未定数を A_1, B_1, C_2 とする場合と A_2, B_2, C_2 とする場合の 2 組の解が考えられる。その 1 組は

$$\phi = A_1 J_n(\beta r) \cos(\pi\theta) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.116)$$

$$\psi_z = B_1 J_n(\beta r) \sin(\pi\theta) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.117)$$

$$\psi_r = C_2 J_{n+1}(\beta r) \sin(\pi\theta) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.118)$$

$$\psi_\theta = -C_2 J_{n+1}(\beta r) \cos(\pi\theta) \cdot e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.119)$$

ここで式(2.144)(2.147)(2.149)に上式を代入し境界における応力条件式(6.104a, b, c)を考慮すれば未定数 A_1, B_1, C_2 に関する三本の斉次方程式を得る。そして係数行列

式を0とすることによって周波数方程式を得ることができる。ωとℓの関係はその式によってℓを補助変数として与えられる。^[註1] もう一組の解は

$$\phi = A_2 J_n(\beta r) \sin(n\theta) e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.120)$$

$$\psi_z = B_2 J_n(\beta r) \cos(n\theta) e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.121)$$

$$\psi_r = C_2 J_{n+1}(\beta r) \cos(n\theta) e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.122)$$

$$\psi_\theta = -C_2 J_{n+1}(\beta r) \sin(n\theta) e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.123)$$

である。この形のポテンシャルをもとに、式(6.104)の条件下で周波数方程式が導びける。^[註1]

中空円柱の波動解析も同様な手法でできるが、この場合は第2種ベッセル関数も解形に残さなければならない。したがってたとえば式(6.116)に対しては

$$\phi = \{A_1 J_n(\beta r) + A_2 Y_n(\beta r)\} \cos(n\theta) e^{i(kz - \omega t)}$$

の形にする。他のポテンシャル ψ_r , ψ_θ , ψ_z の解形にも同様に補正する。結局6つの未定数に対する連立方程式の係数行列式から、円柱内の波動伝は特性を与える周波数方程式が導びかれる。^[註2] その行列は6×6である。

6.10 中空円柱の周波数

周波数ω, 波数ℓ, 周方向次数ℓに関する周波数方程式が超越方程式であるため、周波数スペクトルの構造の詳細を明らかにするには多大の数值計算を要する。整数ℓと実波数ℓを指定しても周波数方程式を満たすωは無限に存在する。そのωは無限にあるモードの1つ1つに対応する周波数となっている。さらに周波数スペクトルを完全に解明するためには虚数あるいは複素数となる波数の場合も考え、その状態を計算によって調べなければならない。

周波数スペクトルの構造を調べる1つの方法として、波数の0極限を考えることができる。波数が小さくなれば波長が大きくなり ℓ→0の極限では無限大の波長となって運動が子座標に独立である。この時、式(6.92)~(6.99)から変位 $u(x, \theta, t)$ と $v(x, \theta, t)$ は連成するが、軸変位 $w(x, \theta, t)$ は他の変位 u, v と連成せず独立である。すなわち、無限長波のとき、平面ひずみ運動と軸せん断運動とは個別に解析することができる。さらに、変形が子座標のみならずθ座標にも無関係であるならば変位 $u(x, t)$ と $v(x, t)$ とは連成せずそれぞれ独立な半径膨張運動と周方向せん断運動を表わす。

波数を0に極限した解析の結果は、波数の0でないその近辺の領域の解析に拡張できる。^[註] ℓ=0の時のすべての分枝に対する高次導関数 $d\omega_n/d\ell$ を求めて漸近的解法が考えられる。

θに独立で子に依存する運動は、 $v(x, z, t)$ のみのねじり運動と、 $u(x, z, t)$ と $w(x, z, t)$ のみの縦運動に分割できる。θと子の双方に依存する運動では $n=1$ に対応するたわみ波の場合を考え、多少詳しく調べてみる。

6.10.1 ねじり波

θに依存しないで周方向変位のみ生ずるねじり波 (torsional waves) を考える。式(6.93)から、支配方程式は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (6.124)$$

[註] Achenbach, J. D. & Fang, S. J., *Jour. Acoust. Soc. Am.* 47 (1970) 1282

[註1] Eringen, A. C., & Suhubi, E. S., "Elastodynamics" Vol. II, P. 777~P. 792 (1975), Academic Press

[註2] 同上, P. 792~P. 802,

式(6.124)の中実円柱のための変位解は、次のようになる。

$$v(r, z, t) = \frac{1}{r} B_2 J_1(\beta r) e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.125)$$

境界条件式(6.104a, b, c)より $r=a$ で考慮すべきものは τ_{rz} のみになる。これより周

$$\text{波数方程式は} \quad (\beta a) J_0(\beta a) - 2 J_1(\beta a) = 0 \quad (6.126)$$

前式は超越代数方程式で数値計算により根を求めれば^[註]

$$\beta a = 0.0000, 5.1356, 8.4172, 11.6198, 14.7960$$

式(6.125)で $\beta \rightarrow 0$ の漸近を考えると $J_1(\beta) \sim \frac{\beta}{2} \left(1 - \frac{\beta^2}{2^2} + \frac{\beta^4}{2^2 \cdot 3!} - \dots\right)$ だから

$$v = \frac{1}{2} B_2 r e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.127)$$

この変位は、よく知られた最低次のねじりモードを与え、変位が半径に比例しているから、全体として軸まわりの各々の断面の回転運動となっている。また、 β の定義より $\beta=0$ は位相速度が C_T に等しいことを意味するから、このモードは分散性を有しない。高次のねじりモードは、次式を満たす β であることから分散的である。

$$\left(\frac{\omega a}{C_T}\right)^2 = (\beta_2 a)^2 + (ka)^2 \quad (6.128)$$

ただし $\beta_2 a$ は、式(6.126)を満たす解である。実数値の周波数 ω を指定すれば、波数は実数もしくは虚数になる。そして弾性単層における SH 波の場合のように、実波数に対して双曲線、虚数波数に対して円弧で与えられる周波数スペクトル分枝になる。

円柱の最低次ねじりモードは計測機器等の遅延回路(デレーライン)に応用できる。それは、パルスが伝ばる時に変形しないことや、二次モードの遮断周波数以下で円柱導波体が応じるように周波数や半径を調整することによって、加振方法が幾分特殊であっても最低次モードの波だけとり出せるためである。

6.10.2 縦波

この場合の縦波は、半径方向と軸方向の変位成分のみの軸対称波である。

[註] Abramowitz, M. & Stegun, J. A., ed. "Handbook of mathematical functions" P.414, Dover Pub. (1970)

支配方程式は(6.92)~(6.94)より誘導され、また、変位ポテンシャルは式(6.116)(6.119)から、次の形を用いると便利である。

$$\phi = A J_0(pr) e^{i(kz - \omega t)}, \quad \psi_0 = C J_1(\beta r) e^{i(kz - \omega t)}$$

この時、対応する半径変位と軸変位は式(2.132)(2.134)より

$$u = \{-pA J_1(pr) - i k C J_1(\beta r)\} e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.129)$$

$$w = \{i k A J_0(pr) + \beta C J_0(\beta r)\} e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.130)$$

式(6.129)(6.130)を τ_r の式に代入し、円柱側面($r=a$)で応力が作用しないから、 $\tau_r=0$ とおけば

$$\left\{-\frac{1}{2}(\beta^2 - k^2) J_0(pa) + \frac{p}{a} J_1(pa)\right\} A + \left\{-i k \beta J_0(\beta a) + \frac{i k}{a} J_1(\beta a)\right\} C = 0$$

また、 τ_{rz} についても $r=a$ で 0 とすれば

$$\left\{-2 i k p J_1(pa)\right\} A - \left\{(\beta^2 - k^2) J_1(\beta a)\right\} C = 0$$

係数行列式が 0 となることより縦波に対する周波数方程式を求めれば

$$\frac{2p}{a} (\beta^2 + k^2) J_1(pa) J_1(\beta a) - (\beta^2 - k^2)^2 J_0(pa) J_1(\beta a) - 4 k^2 p \beta J_1(pa) J_0(\beta a) = 0 \quad (6.131)$$

これは Pochhammer 周波数方程式として知られている。この式は ω, k, a, C_L, C_T の 5 つの量に依存しているように見えるが、単層に対するレーラム周波数方程式と同様に無次元量を適当に 3 つ導入して議論することができる。その 3 つの無次元量とは、ポアソン比 ν (または k) と無次元周波数 ω/aC_T (または、無次元位相速度 C/C_T) と無次元波数 ka である。今までに計算によって出されている結果の例を図 6.13 ~ 図 3.15 に示す。図 6.13 は実、虚、複素の分枝をもつ縦モードの周波数スペクトルで Onoe らによる結果を示す。^[註1] 図 6.14 は無次元位相速度 C/C_0 を示す。 C_0 は後述するように最低次モードの長波極限位相速度すなわち構波速度である。図 6.15 は無次元群速度を与える結果を示している。図 6.14 と図 6.15 は Davies の報告に基づいている。^[註2]

[註1] Onoe, M., McNiven, H.D., & Mindlin, R.D., Jour. Appl. Mech. 28 (1962) P.729

[註2] Davies, R.M., Philosophical Transactions of the Royal Society A240 (1948) P.375

実用上、重要な役割をはたす最低次縦モードを、 $ka \ll 1$ の時と $ka \gg 1$ の時の様子を、式(6.131)の漸近形をとって調べてみる。ベッセル関数の0近傍展開の数項を考えれば $ka \ll 1$ の時、 $J_0(\delta) \sim 1 - \frac{1}{4}\delta^2 + \frac{1}{64}\delta^4 - \dots$, $J_1(\delta) \sim \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{16}\delta^3 + \dots$ となる。また

$$\bar{k} = ka, \quad \bar{\omega} = \omega a / c_T$$

とおけば $\bar{\omega} = \omega_1 \bar{k} + \omega_3 \bar{k}^3 + O(\bar{k}^5)$ (6.132)

ここに ω_1, ω_3 , は E を縦弾性係数とすれば

$$\omega_1 = (E/\rho)^{1/2} (\rho/\mu)^{1/2} \quad (6.133)$$

$$\omega_3 = -\frac{1}{4} (E/\rho)^{1/2} \nu^2 (\rho/\mu)^{1/2} \quad (6.134)$$

従って、式(6.132)に対応する位相速度は

$$C = (E/\rho)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \nu^2 \bar{k}^2 \right\} + O(\bar{k}^4) \quad (6.135)$$

$\bar{k} \rightarrow 0$ の極限で位相速度は $(E/\rho)^{1/2}$ に等しくなり、この速度を棒波速度 (bar velocity) と

呼び、棒の最も簡単な初等理論によつて見い出せる速度になっている。

一方、 $ka \rightarrow \infty$ とすれば位相速度は L-L 波速度の下側から漸近する。中間の ka では C_R よりわずかに小さい極小値を有している。また図6.15より、群速度も ka の中間値で明白な極小値をもっている。

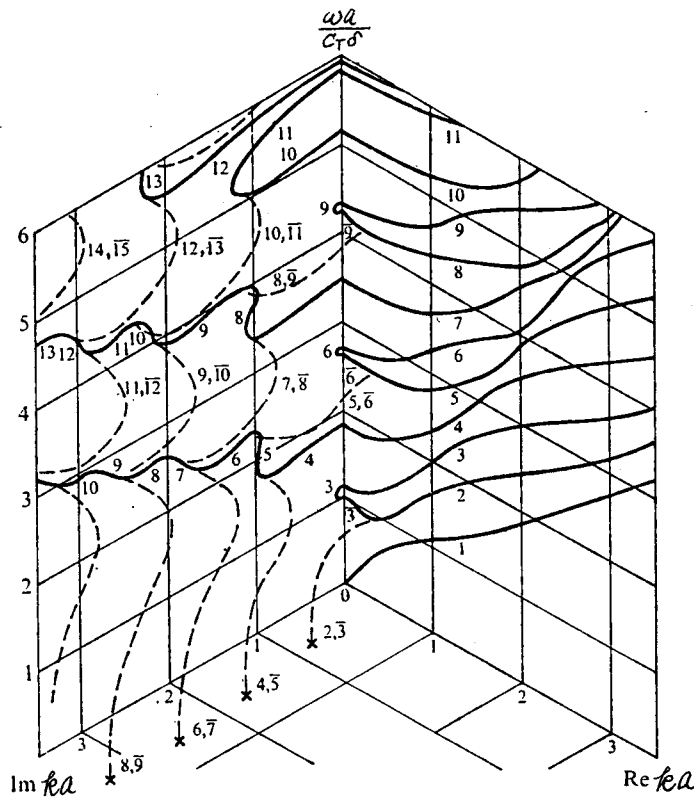


図6.13 円柱の縦モードに対する周波数スペクトル
縦座標の δ は $J_1(\delta) = 0$ のネー根、(ポアソン比 $\nu = 0.31$)

[219]

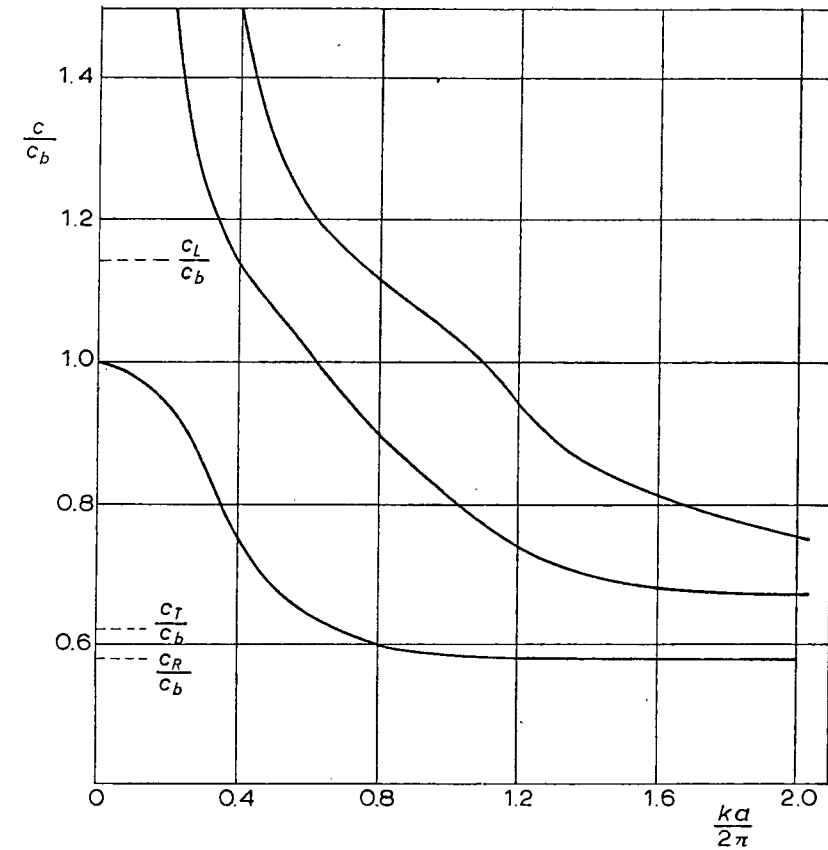


図6.14 円柱の縦モードに対する位相速度 ($\nu = 0.29$)

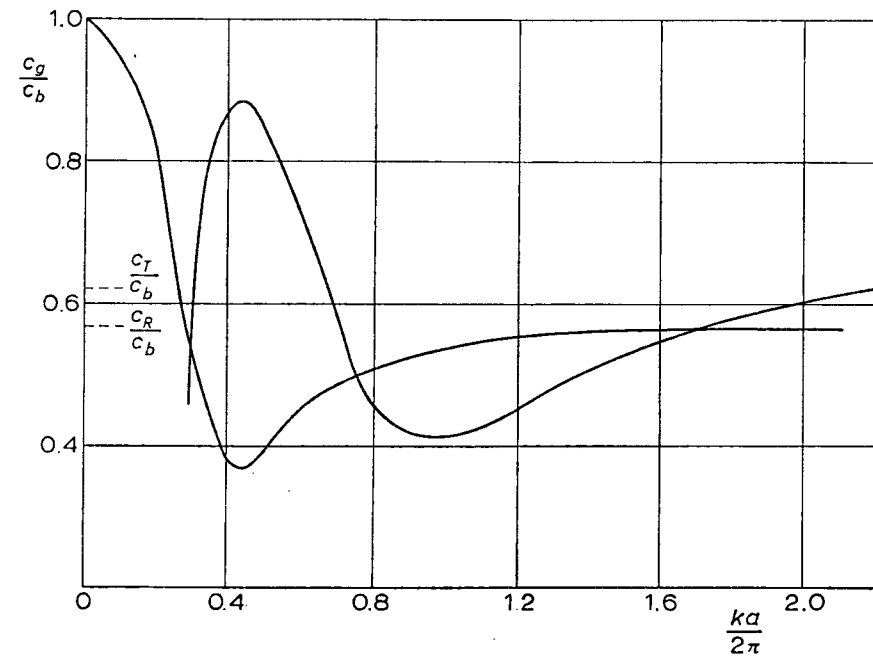


図6.15 円柱の縦モードに対する群速度 ($\nu = 0.29$)

[220]

6.10.3 たわみ波

一般に波動は式(6.116)~(6.123)に現われる三角関数によって周方向角 θ に依存している。そのうち最も重要な $n=1$ によって定まる場合のモード群を調べてみよう。

この時のポテンシャルは

$$\begin{aligned} \phi &= A J_1(\rho r) \cos\theta e^{i(kz - \omega t)} \\ \psi_z &= B J_1(\rho r) \sin\theta e^{i(kz - \omega t)} \\ \psi_x &= C J_2(\rho r) \sin\theta e^{i(kz - \omega t)} \\ \psi_y &= -C J_2(\rho r) \cos\theta e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned}$$

そして、式(2.132)-(2.134)を用いて変位を求めれば

$$u = U(r) \cos\theta e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.136)$$

$$v = V(r) \sin\theta e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.137)$$

$$w = W(r) \cos\theta e^{i(kz - \omega t)} \quad (6.138)$$

ここに

$$U(r) = A \frac{\partial}{\partial r} J_1(\rho r) + \frac{B}{r} J_1(\rho r) + C i k J_2(\rho r)$$

$$V(r) = -\frac{A}{r} J_1(\rho r) + C i k J_2(\rho r) - B \frac{\partial}{\partial r} J_1(\rho r)$$

$$W(r) = A i k J_1(\rho r) - \frac{C}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{ r J_2(\rho r) \} - \frac{C}{r} J_2(\rho r)$$

このような変位によって表わされる運動を図6.16に示す座標で説明する。 xz

面を水平面と呼べば、式(6.137)より

垂直な yz 面($\theta=0$)の変位成分 v は

常に0となる。すなわち、垂直面内の点

は常に変形してもその面内にある。水平

面($\theta=\pm\pi/2$)内では u と w が常に0で

ある。従って、 xz 面内の v は y 方向

あるから水平面内の各点は純粋な垂直運

動をする。これらより、式(6.136)-(6.138)

によって定まる運動はたわみ波(flexural waves)を表わしている。さらに w が y に

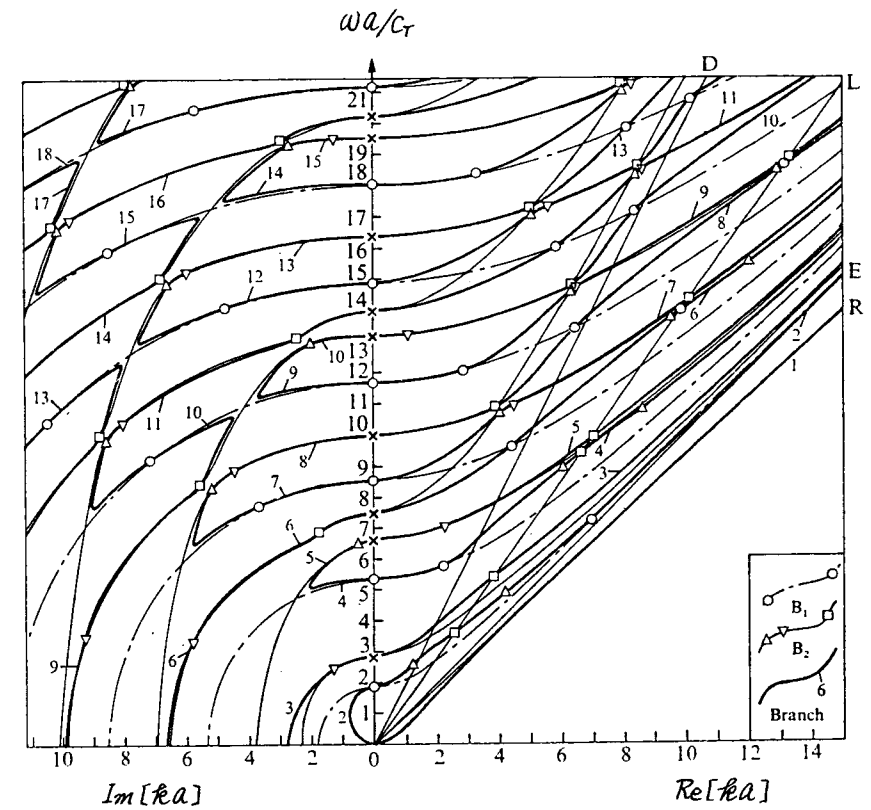
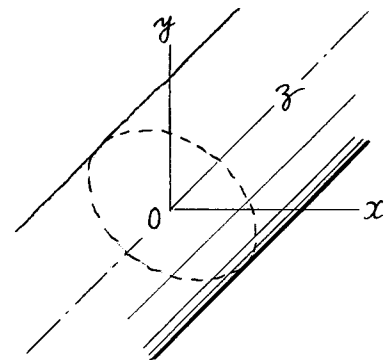


図6.17 円柱のたわみモード($n=1$)における周波数スペクトル($\nu=1/3$)

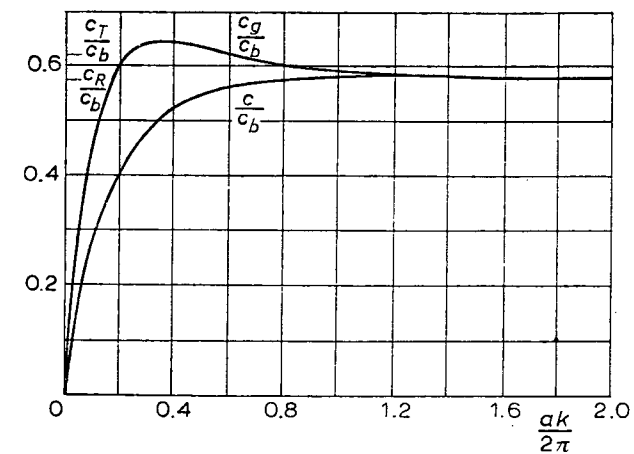


図6.18 円柱のたわみモード($n=1$)における位相速度 c と群速度 c_g ; c_r は棒波速度($\nu=0.29$)

関して奇で、 y 方向変位成分が y について偶になることから確かめられる。周波数方程式を求めたため、式(6.136)~(6.138)を応力表示式に入れ表面 $x=a$ で $\tau_x, \tau_{xz}, \tau_{xy}$ が 0 となることより A, B, C に対する 3 つの斉次方程式系を得る。係数行列式が 0 となる条件より周波数方程式が得られる。この周波数方程式に基づくスペクトルは Pao と Mindlin によって詳細に調べられている。^[註] それによれば $n=1$ のたわみモードに対する周波数方程式は次の形に整理される

$$J_1(\alpha) J_1^2(\beta) \{ f_1 G^2(\beta) + f_2 G(\alpha) G(\beta) + f_3 G(\beta) + f_4 G(\alpha) + f_5 \} = 0 \quad (6.139)$$

$$\text{ここに } \alpha^2 = \left(\frac{\Omega}{\kappa}\right)^2 - \zeta^2, \quad \beta^2 = \Omega^2 - \zeta^2, \quad G(x) = x J_0(x) / J_1(x)$$

$$\Omega = \omega a / c_T, \quad \zeta = \kappa a$$

$$\text{そして } f_1 = 2(\beta^2 - \zeta^2)^2, \quad f_2 = 2\beta^2(5\zeta^2 + \beta^2)$$

$$f_3 = \beta^6 - 10\beta^4 - 2\beta^4\zeta^2 + 2\beta^2\zeta^2 + \beta^2\zeta^4 - 4\zeta^4$$

$$f_4 = 2\beta^2(2\beta^2\zeta^2 - \beta^2 - 9\zeta^2)$$

$$f_5 = \beta^2(-\beta^4 + 8\beta^2 - 2\beta^2\zeta^2 + 8\zeta^2 - \zeta^4)$$

数値計算により得られる周波数スペクトルを図 6.17 に示す。^[註] $\zeta \ll 1$ の場合のその最低次分枝の漸近的解析をすれば $\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right)^{1/2} \zeta^2 + O(\zeta^4)$ となる。_(6.139) また $\zeta \rightarrow \infty$ としてゆけば“レ-レ波速度に近づいて行く。この様子を図 6.18 に位相速度と群速度を描いて示す。図 6.18 は Davies によるものである。^[註2]

[註] Pao, Y. H. and Mindlin, R. D. *Jour. Appl. Mech.*, 27 (1960) 513-520

[註2] Davies, R. M., *Philosophical Transactions of the Royal Society A240* (1948) P.375

6.11 棒に対する近似理論

弾性長柱内の調和波の伝ば特性を解析的に厳密に扱うことは非常に複雑で難しい。円柱もしくは楕円断面柱以外では厳密に解析解を得ることはできないようである。側面が自由な矩形断面の角柱に対してさえ無限級数形となり簡便な解は得られない。そこで多少任意性のある断面の棒内を伝わる波動を近似的に表わすいくつかのモデルが提案されている。本節では広く用いられている基本的なモデルについて紹介する。これらのモデルを構築するための仮定は棒断面の幾何学的変形に対してなされ、軸方向に伝わる波動が一次元近似理論によって記述できるように簡易化している。このようにして導びかれる近似式によって得られる波動特性は、制限はうけるものの、かなりの範囲にわたって最低次の伸縮モードとたわみモードの特性に一致しており、波動分散性を考慮した簡易解析を可能にする。過渡的な弾性波の解析への適用は第 8 章で述べる。

支配方程式の誘導は、変分法を用いるか、又は棒要素についての運動量を直接考えて行なわれる。後者の手法は物理的な概念が明白で初心者には理解しやすいが、複雑な理論となる時は、棒要素の運動エネルギーとひずみエネルギーを求め、仮想変位分布を考慮してハミルトンの原理に基づいて支配方程式を求めの方が容易になる。

6.11.1 伸縮運動 この場合の変形の支配的成分は縦方向である。棒の任意断面が平面を常に保っているという仮定のもとに要素に働く力のつりあいから

$$\partial^2 u / \partial x^2 = C_0^{-1} \partial^2 u / \partial t^2 \quad ; \quad C_0^2 = E / \rho \quad (6.140)$$

が得られることを第 1.5 節に述べた。この式(6.140)は、時間調和波に対して調べれば明らかになるように分散性を示さない。円形断面棒について Mindlin と McNiven は縦軸せん断モードと半径方向モード間の連成の説明できる一次元方程式系を導いた。そして虚、実、複素波数に対する分枝と対応する厳密な分枝との比較をしている。^[註]

[註] Mindlin, R. D. & McNiven, H. D. *Jour. Appl. Mech.* 27 (1960) 145 ; 又は McNiven, et. al "Vibrations and Wave Propagation in Rods", In "R. D. Mindlin and Applied Mechanics", G. Herrmann ed.; (1973) P. 149, Pergamon press,

6.11.2 ねじり運動

断面が常に平面を保ち、運動が軸まわりの回転のみからなるという仮定のもとに成り立っているとすれば、伝ば速度が

$$C = \left(\frac{G}{\rho A}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{K}\right) \quad (6.142)$$

によって与えられる回転角に対する波動方程式が導びかれる。ここに K は軸まわりの棒断面の回転二次モーメント (radius of gyration) であり、 A は断面積であり、そして G はねじり剛性である。丸棒の場合 C は $(\mu/\rho)^{1/2}$ に等しくなり、第6.10節に示したように円柱を伝ばするねじり波の最低次モードに対する厳密な結果に一致する。断面が平面でなくなるゆがみ (warping) と面内運動の双方を含む非円形断面棒のねじりに対する近似理論は *Bleustein* と *Stanley*^[註] によって研究された。その近似手法は変位を展開し、ねじり運動、反対称せん断 (contour-shear) 運動、ゆがみ運動の成分のみを残して級数を打切るものである。

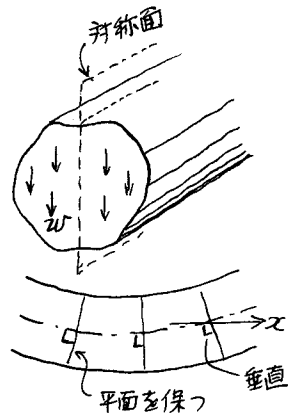
6.11.3 たわみ運動: Bernoulli-Euler model

任意形状ではあるが対称面を有する様な断面形状棒のたわみを考える。その最も簡単な理論は、たわみの主な変位成分がその対称面に常に平行であるという仮定にもとづいている。また、その横変位は小さく断面が中立軸に垂直を保ちかつ平面であるという仮定もなされている。横荷重のない時、この梁に対する運動方程式は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (6.143)$$

ここに w は横変位であり I は中立軸まわりの断面二次モーメントである。 A は断面積である。調和波を代入すると、位相速度は

[註] *Bleustein, J.L., and Stanley, R.M. Int. Jour. Solids and Structures* 6 (1970) 569.



$$C = (E/\rho)^{1/2} (I/A)^{1/2} k \quad (6.144)$$

を得る。従って、この位相速度は波数 k に比例するので $k \gg 1$ では正しくないことがわかる。丸棒の場合、式(6.144)は

$$C = \frac{1}{2} (E/\rho)^{1/2} k a \quad (6.144)'$$

となる。式(6.144)'より周波数は

$$\omega = \frac{1}{2} (E/\rho)^{1/2} k^2 a \quad (6.144)''$$

式(6.144)''は厳密な周波数方程式にもとづく $k \ll 1$ における式(6.139)'

$$\Omega = \frac{1}{2} \left(\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}\right)^{1/2} \zeta^2 + o(\zeta^4)$$

の $\zeta \rightarrow 0$ の漸近形に一致していることが検証できる。

6.11.4 たわみ運動: Timoshenko model

棒のたわみ運動の近似理論を、より短い波長域にも適用できるように、せん断変形の効果を考慮したモデルである。近似理論を作る上で前提とされる仮定は、平面は変形後も平面を保つとしている。しかし中立軸に対して垂直である仮定はしない。図6.19のように変形後、中立軸が微小回転 $\partial w/\partial x$ をし、また断面が角 φ だけ回転する時、せん断角 γ は

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \varphi \quad (6.145)$$

となる。断面に働く曲げモーメント M はよく知られた関係

$$M = -EI(\partial\varphi/\partial x) \quad (6.146)$$

によって φ と関連づけられている。断面に働くせん断力 Q とひずみ角 γ との関係を

$$Q = \kappa \mu A \gamma \quad (6.147)$$

と置く。梁のせん断変形は断面にわたって一定ではなく、その平均値として γ を考えているのでせん断力 Q を補正係数 κ を用いて与えている。^[註] κ の値は、そう違いない

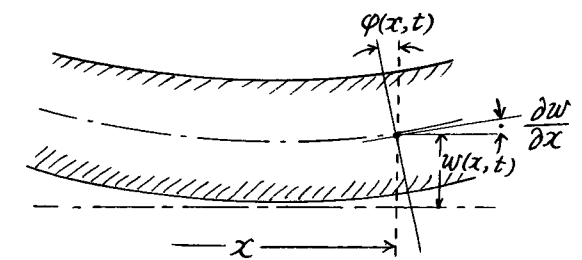


図6.19 ティモシェンコ梁。

[註] κ はその使い方からして真の値からのズレを修正するための係数であるが numerical factor と呼んでいる。

ものであるが断面形状にかなり依存している。この係数の表は Mindlin と Deresiewicz によって報告されている。^[註]

式(6.146)(6.147)を用いて Timoshenko 梁の各要素に対するひずみエネルギーと運動エネルギーを求めれば

$$U = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{1}{2} EI \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \kappa \mu A \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right)^2 \right\} dx \quad (6.148)$$

$$K = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{1}{2} \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho I \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 \right\} dx \quad (6.149)$$

そこでハミルトンの原理とオイラー方程式(2.74)を用いると、次のように、一様な梁に対する支配方程式を得る。

$$\kappa \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (6.150)$$

$$EI \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \kappa \mu A \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) = \rho I \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (6.151)$$

w と ϕ の二自由度を有しているからこれらの式から得られる運動に2つのモードがある。式(6.150)(6.151)の系に対する周波数方程式を、 $w = B_1 e^{i(kx - \omega t)}$, $\phi = B_2 e^{i(kx - \omega t)}$ として求めれば、次のようになる。

$$\frac{EI}{\rho A} k^4 - \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{\kappa \mu} \right) k^2 \omega^2 - \omega^2 + \frac{\rho I}{\kappa \mu A} k^4 \omega^4 = 0$$

上式から k - ω 曲線が k を補助変数として描くことができるが、厳密な k - ω 曲線と良く合うように k を定めることができる。

丸棒の場合、波動分散性の位相速度による比較によって近似理論の成り立つ波数範囲が Kolsky によって検討されている。^[註2] 最低次モードに関する限り Timoshenko 梁の理論は厳密な分散曲線とかなり良い一致を示している。

[註] Mindlin, R.D. & Deresiewicz, H., *Proceedings Second National Congress of Applied Mechanics*, ASME (1954)

[註2] Kolsky, H. "Stress waves in Solids" Dover Pub. (1963) Fig. 16, P71

6.12 板に対する近似理論

無限に広がった弾性単層の自由運動は、第6.7節と第6.8節で示したようにレーラム周波数方程式に支配される無限個のモードを取りうる。強制的に外から動的負荷を受けて層内に生ずる弾性応答はそれらの重ね合せになっている。その運動が調和的であればさほど困難な解析にはならないが、有限長の板でたとえば固定端や自由端のある時には、それぞれのモード間に連成が生じ非常に複雑な周波数スペクトル構造となる。そこで板の動的応答を解析するため合理的な近似理論を考える根拠となっている。

板に対する近似理論は、三次元動弾性力学に基づく場の方程式を、単層の中央面で定義される量で代表して、二次元の基礎方程式に帰着して得られる。この二次元から二次元への誘導は、Kirchhoff の仮定として変形に際して平面断面は常に平面を保ち、またその平面は常に中央面に垂直であるという前提のもとに行なわれている。

Mindlin による厚板の近似理論は変位成分を厚さ方向座標の中級数に展開して作られている。^[註] これを弾性理論による基礎運動方程式に代入し、得られる式を層厚に渡って積分する。さらに外力を考慮する境界条件を導入すれば、三次元の弾性理論は板中央面における二次元方程式の無限級数形になる。そこで級数を有限項で打ち切って近似方程式とする。この有限項での打ち切りは有限数のモードのみを採用することを意味するが、この近似理論は波数の比較的広範囲にわたり、かなり有効な周波数と位相速度を与えている。これは低周波数領域では高次モードがスペクトル曲線にあまり影響を及ぼさないという事実による。

6.12.1 たわみ運動；古典理論

板の曲げの古典理論は Kirchhoff の仮定に基づいている。板の中央面に (x, y) 座標を、板厚方向に z 座標を対応させる直角座標を用いれば、一定厚さ $2h$ の板の曲げを支配する基礎方程式は

[註] Mindlin, R.D. *Quant. Appl. Math.* 19 (1961) P.51 又は Graff, K.F., "Wave Motion in Elastic Solids" pp.480-510

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6.152)$$

ここに $w(x, y, t)$ は横変位で D はたわみ剛性

$$D = \frac{(2h)^3 E}{12(1-\nu^2)} \quad (6.153)$$

である。さて、 x 座標方向に伝播する調和波として

$$w = A e^{i(kx - \omega t)} \quad (6.154)$$

を式(6.152)に代入すれば

$$\omega = k^2 h \left[\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)} \right]^{1/2} \quad (6.155)$$

を得る。これは長波(小さな k)の領域に対してレ-レ-ラム周波数方程式から導びいた式(6.81)に一致する。^[註] 従って古典的理論は長波に対して有効である。

6.12.2 横せん断と回転慣性の効果

これらの効果を組み込む手法は梁のための Bernoulli-Euler モデルを Timoshenko モデルに拡張した考え方に非常によく似ている。これは Mindlin によって古典板理論の拡張理論として示されている。^[註2] たわみ運動に及ぼす横せん断(transverse shear)と回転慣性(rotary inertia)の影響は、各変位成分を次の形に仮定して考える。

$$u = -z \psi_x(x, y, t) \quad (6.156)$$

$$v = -z \psi_y(x, y, t) \quad (6.157)$$

$$w = w(x, y, t) \quad (6.158)$$

ここに ψ_x と ψ_y はそれぞれ中央面法線の x 方向(y 軸まわり)と y 方向(x 軸まわり)の局所回転である。これらの回転は図6.19の ϕ と似ている。このようにして得られる支配方程式は厚さ $2h$ の板に対し次のようになる。

$$\frac{1}{2} D \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \psi_x + (1+\nu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right\} - 2\kappa \mu h \left(\psi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 8 \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}, \quad (6.159)$$

$$\text{[註]} \quad \Omega = \frac{2h\omega}{\pi C_T}, \quad \xi = \frac{2h\kappa}{\pi}, \quad \kappa^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-\nu^2} \text{ を式(6.81)に入れると } \omega = \left\{ \frac{1}{6(1-\nu)} \right\}^{1/2} 2C_T \kappa^2$$

になる。ここで $C_T^2 = \mu/\rho$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ を考慮すれば $\omega = \left\{ \frac{E}{3(1-\nu^2)\rho} \right\}^{1/2} k^2 h$ を得る。

[註2] Mindlin, R. D., "Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions" of Isotropic Elastic Plates". Jour. Appl. Mech. [229], 18, pp 31-38 (1951).

$$\frac{D}{2} \left\{ (1-\nu) \nabla^2 \psi_y + (1+\nu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \right\} - 2\kappa \mu h \left(\psi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 8 \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}, \quad (6.160)$$

$$2\kappa \mu h \left(\nabla^2 w - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + f(x, y) = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (6.161)$$

ただし $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, であって κ と $f(x, y)$ はそれぞれ補正係数と単位面積当りの横荷重の大きさを示す。せん断応力が厚さにわたって一定でないため κ によって補正するが、この κ の値を、式(6.159)~(6.161)によって算出される最低次の厚さ方向せん断モードの周波数が、厳密理論に基づいた式(6.86)によって算出される値と等しくなるように定められる。いま、

$$\psi_y = w = 0, \quad \psi_x = e^{i\omega t} \quad (6.162)$$

とおけば、式(6.159)より

$$\omega = \left(\frac{12\kappa}{4h^2} \right)^{1/2} C_T \quad (6.163)$$

を得る。式(6.86)によれば厳密な値は^[註]

$$\omega = \frac{\pi}{2h} C_T \quad (6.164)$$

であるから式(6.163)と(6.164)を一致させるには κ の値を次のように選べばよい。

$$\kappa = \pi^2/12 \quad (6.165)$$

本節のように、横せん断と回転慣性を考慮することにより、式(6.164)の漸近式よりも、

約20%高い周波数まで適合するよい最低次モードの位相速度を与える。

6.12.3 伸縮運動(extensional motions)

一様な厚さの板の伸縮に対する初等ポアソン理論では一般化平面応力状態として扱われている。式(2.60)と(2.53)から、板厚にわたった積分操作により、支配方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{(1-\nu^2)\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6.166)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(1-\nu^2)\rho}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (6.167)$$

$$\text{ここで調和波 } u = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad v = 0 \quad (6.168)$$

[註] $\nu=1$ の時の単純層厚せん断モード。すなわちレ-レ-ラムの周波数スペクトルで2次の反対称モード分枝の $\xi \rightarrow 0$ 極限に対するものとなる。1次の反対称モード分枝の $\xi \rightarrow \infty$ 極限でレ-レ-波速度となるように κ を定めることのできるが、応答依存性を考えれば2次分枝の $\xi \rightarrow 0$ で定めた方がよいだろう。 [230]

を考れば、次の関係を得る。

$$\omega^2 = \frac{E}{\rho} \frac{\xi^2}{(1-\nu^2)} \quad (6.169)$$

従ってこの理論に基づく位相速度は一定値 $C = \left\{ \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right\}^{1/2}$ となり、波動の分散性を表現することはできない。しかし、レ-レ-ラムの周波数方程式から長波近似で得られる式(6.82)に一致する。

次に Mindlin と Medick による板の伸縮運動に対する厚板理論にふれば、彼らは変位成分を次の様にルジャンドル関数 $P_n(\cdot)$ による展開形で論じている。^[註]

$$u_j = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\eta) u_j^{(n)}(x_1, x_3, t) \quad (j = 1, 2, 3) \quad (6.170)$$

ただし x_2 を板厚方向に定める。また $\eta = x_2/h$ において、 η の中級数展開形にせず、 $P_n(\cdot)$ 関数展開を用いた理由を考れば、中級数の場合、その各項間に直交性がないため数学的に扱いにくいためである。この展開に基づいた近似関係式として応力ひずみ関係式、ひずみ変位関係式、運動方程式等が導びかれる。また $u_1^{(0)}$ 、 $u_2^{(0)}$ 、 $u_3^{(0)}$ のみ残り、周波数方程式を導けば

$$|a_{ij}| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (6.171)$$

ただし

$$a_{11} = \kappa^2 \xi^2 - \Omega^2$$

$$a_{22} = \kappa_2^2 \xi^3 / 3 + 4 \kappa^2 \kappa^2 / \pi^2 - \kappa_3^2 \Omega^2 / 3$$

$$a_{33} = E' \xi^2 / 5\mu + 12 \kappa_2^2 / \pi^2 - \kappa_4^2 \Omega^2 / 5 \quad ; \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2}$$

$$a_{12} = 2 \kappa_1 (\kappa^2 - 2) \xi / \pi = a_{21}$$

$$a_{23} = -2 \kappa_2^2 \xi / \pi = a_{32}$$

$$a_{13} = a_{31} = 0$$

ここに $\kappa = C_L / C_T$ として $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ は補正係数である。式(6.171)

から得られるスペクトルとレ-レ-ラムの周波数方程式によるスペクトルの比較により、これら

[註] Mindlin, R.D., and Medick, M.A., "Extensional Vibrations of Elastic Plates" *Jour. Appl. Mech.*, 26 pp.561-569 (1959)

$\kappa_1 \sim \kappa_4$ が決定される。

6.13 長波極限の位相速度のまとめ

まず縦波と横波の速度は縦弾性係数 E とポアソン比により

$$C_L = \left\{ \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho} \right\}^{1/2} \quad (6.172)$$

$$C_T = \left\{ \frac{E}{2(1+\nu)\rho} \right\}^{1/2} \quad (6.173)$$

$$\text{したがって } \kappa = C_L / C_T = \left\{ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \right\}^{1/2} \quad (6.174)$$

次に板波速度は(6.82)より

$$C_{pl} = \left\{ \frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{2}{1-\nu} \right\}^{1/2} C_T \quad (6.175)$$

また棒波速度は(6.135)より

$$C_b = \left\{ \frac{E}{\rho} \right\}^{1/2} = \left\{ 2(1+\nu) \right\}^{1/2} C_T \quad (6.176)$$

問題

[21] 内径と外径が $2a$ と $2b$ の中空球が、内壁で剛拘束され、球外表面で $t=0$ の時刻に大きさ p_0 の一様なステップ衝撃圧力が作用するとき

(a) 時刻 $0 \leq t < \frac{b-a}{c_L}$ における過渡的波動を求めよ。

(b) $\frac{b-a}{c_L} \leq t < \frac{2(b-a)}{c_L}$ における波動を求めよ。

(c) $a \rightarrow 0$ の極限での状態を論ぜよ。

[22] 無限弾性体中に半径 a の剛球が介在している。球自身の内部励振により、その球は、中心を通る軸のまわりに強制振動している。第2.14節で述べた球座標系により、 $r=a$ 上の点の運動が ω を角周波数として

$$u=0, \quad v=0, \quad w = w_0 \sin\theta \sin\omega t$$

で与えられる時、周囲の弾性媒体に生ずる運動が角座標 χ に無関係となることを示せ。そして球と周囲媒体が完全接合されているとしてその媒体に生ずる定常状態変位を求めよ。

ヒント $\partial/\partial\chi=0$ より、変位成分 $w(r, \theta, t)$ は ψ_r と ψ_θ のみに依存している。また ψ_r と ψ_θ の方程式には ϕ と ψ_χ を含まない。解は

$$\psi_r = \underline{\psi}_r(r) \cos\theta \sin\omega t \quad \text{と} \quad \psi_\theta = \underline{\psi}_\theta(r) \sin\theta \sin\omega t$$

の形を選べば $\underline{\psi}_r(r)$ と $\underline{\psi}_\theta(r)$ に対する常微分方程式が $\underline{\psi}_r(r) = \underline{\psi}_\theta(r) = -\underline{\psi}_\theta(r)$ によって満足できることを示して $\underline{\psi}_r(r)$ について解け。別法として、球座標の変位運動方程式から求める手法もできる。

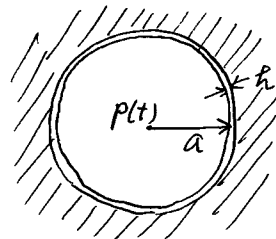
[23] 無限媒体中の半径 a の円孔内壁が、厚さ h の弾性殻によって内張りされている。殻の厚さは半径に比べて十分小さく、内張りは完全接合である。円孔内に時間調和圧力

$$p(t) = p_0(1 + \sin\omega t)$$

が作用する。薄い殻の軸対称運動方程式は

$$\tau_r(a, t) + p(t) - \frac{h}{a^2} E' u(t) = \rho_s h \ddot{u}$$

で与えられる。ただし $\tau_r(a, t)$ は $r=a$ にお



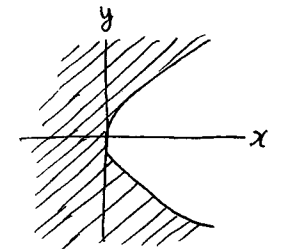
る周囲媒体の応力、 $p(t)$ はシェル内側の圧力、 ρ_s はシェルの質量密度、そして E' はシェルの縦弾性係数 E_s とポアソン比 ν_s によって $E' = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}$ で与えられる。定常状態として、(a) $r=a$ と媒体内の点における半径変位を求めよ。

(b) シェルによって内張りしない時の結果と(a)の結果を比較せよ。

[24] 図のように $x=ay^2$ によって定まる放物面によって境界づけられた弾性体がある。その面に $t=0$ の時刻に大きさ τ_0 の面外せん断力が急に作用する時、初期静止を考慮して、

(a) 時刻 t における波頭位置を与える式を求めよ。

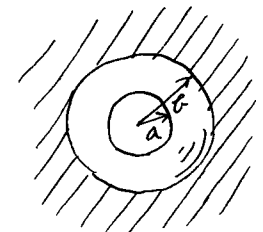
(b) τ_0 を波頭法線として、不連続量 $[\tau_{rz}]$ を求めよ。



[25] 特性曲線法は、球空洞内の衝撃圧によって生ずる周囲の点対称過渡的波動を調べるために応用できる。特性曲線を与える式を導き、その曲線に沿う微分方程式を求めよ。

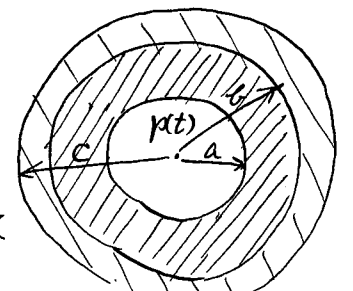
[26] 式(4.145)~(4.147)を用いて応力と物体点速度の不連続量伝播を調べよ。

[27] 無限弾性体中に、内径と外径が $2a$ と $2b$ の中空弾性球が介在している。球内壁に $p_0 H(t)$ のステップ内圧が作用するとき周囲媒体への波の伝達を調べよ。ただし、無限体と球の材料定数をそれぞれ λ, μ, ρ と λ^B, μ^B, ρ^B とせよ。



[28] 二重中空円柱を考える。内外半径 a, b と c, C の中空円柱が $r=b$ で完全接合されている。内壁 $r=a$ に圧力 $p(t)$ が作用し、外壁 $r=C$ が応力自由として、特性曲線法によってこれらの円柱内の軸対称波動を数値的に解析せよ。

ヒント 特性曲線を定める方程式と、その曲線に沿う微分方程式を書け。図4.6に示した格子模様をまねて、本問の特性曲線を描け。境界 $r=a$ と $r=c$ 上の点、界面 $r=b$ の点そして内部の各点に対して実行しなければならない数値計算方法ははっきりさせよ。



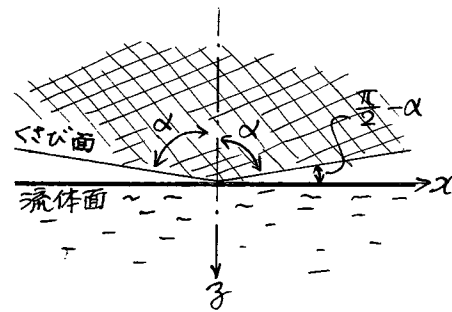
[29] 式(4.169)を用いて、 β と θ の関数として剪断応力 $\tau_{\theta z}$ に対する式を求めよ。式(4.150)

と式(4.152)は $\beta = \ln \left\{ \frac{C_T t}{Y} + \left[\left(\frac{C_T t}{Y} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}$ を意味している。この結果を用いて、 $Y \rightarrow 0$ とした時の τ_{0z} の特異性が

$$\tau_{0z} \sim \frac{2C_T \tau}{\pi Y} (2C_T t)^{-1/2} \sin\left(\frac{\pi}{2Y}\right) \sin\left(\frac{\theta}{Y}\right) Y^{1/2} t^{-1}$$

になることを示せ。

[30] 図のように半頂角 α の剛体くさびが一定速度 V で x 方向に動いている。 $t=0$ で理想弾性流体面にそのくさびが衝突する。流体の運動は式(2.175)~(2.178)に支配されている。初期条件 $t=0$ で $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ とし、くさびの流体内部への入り込みは小さいと仮定する。従って境界条件は $z=0$ で次のように書ける。



$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, 0, t) = V \quad (|x| < Vt \cdot \tan \alpha \text{ の時})$$

$$\varphi(x, 0, t) = 0 \quad (|x| > Vt \cdot \tan \alpha \text{ の時})$$

流体中の音速 C_F よりも、その領域が超音速的に動く場合 ($M = \frac{V}{C_F} \tan \alpha > 1$) を考える。第4.9節の方法を用いて流体の運動が解析できるが $z=0$ のくさび面上で圧力が次式によって与えられることを示せ。

$$\frac{p(x, 0, t)}{\rho V C_F} = \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (C_F t < |x| < Vt \tan \alpha \text{ の時})$$

$$\frac{p(x, 0, t)}{\rho V C_F} = \frac{2}{\pi} \frac{M}{\sqrt{M^2 - 1}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{(M^2 - 1)(Vt \tan \alpha)^2}{(Vt \tan \alpha)^2 - (xM)^2}} \quad (|x| < C_F t \text{ の時})$$

(訂正) 125頁、式(4.86)の次に、下の文を入れる。

前式の記号 d/dt は、伝ばする面 σ とともに移動する座標上から観測される片側極限量の時間変化率を表している。それで f_i が不連続であるとすれば式(4.86)における f_i の代わりに $(f_i)_2$ と $(f_i)_1$ とおき、その時の差を考えれば、次式を得る。

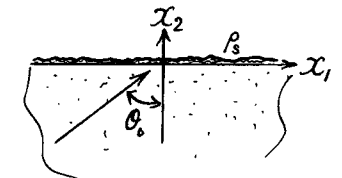
$$\frac{d[f_i]}{dt} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial t} \right] + c \left[\frac{\partial f_i}{\partial p} \right] \quad (4.87)$$

[31] 非常に小さな弾性係数で 0 と見なせる物質の薄い層が、弾性半無限体表面に着いている。その質量密度を ρ_3 とする。平面調和縦波がこの表面層に入射するとき

(a) 反射波の振幅に及ぼす質量層の影響を調べよ。

(b) 入射波と反射波の波線束(ビーム)を考えて、その

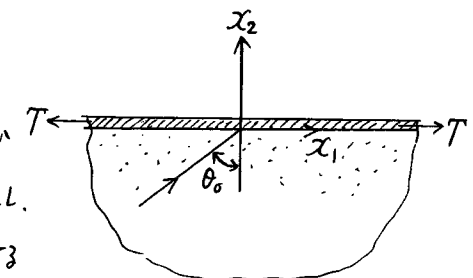
波線束断面にわたる平均エネルギー伝達を調べよ。



[32] 弾性半空間の表面に、薄膜が張られている。単位面積当り $f(x_1, x_2, t)$ の負荷を受ける時、膜の運動を支配する方程式は

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{f}{T} = \frac{\rho_0}{T} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

である。膜は完全に半無限体に接合されている。膜面内変形に対しては無等大剛性と仮定し、図のように平面調和縦波が境界に入射するときの反射波の振幅を求めよ。



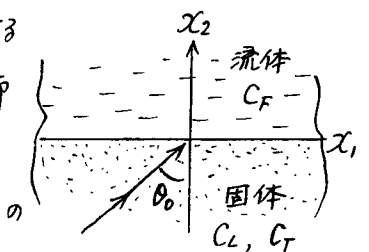
[33] 異種材の界面における SH 波の反射と透過を第5.9節の議論に順じて考えよ。そして、161頁の(1)~(3)の結論をスローネス線図より説明せよ。

[34] SH波の反射波、透過波の波線束を第5.9節から考え、 $(C_T^B/C_T) \sin \theta_0 > 1$ の場合に対する平均のエネルギー伝達を調べよ。

[35] 調和縦波が理想弾性流体と弾性固体の界面に入射するとき次を考えよ。ただし理想流体に関する方程式は第2.15節を見よ。また入射波は固体側から入射するものとする。

(a) $C_F < C_T < C_L$, $C_T < C_F < C_L$, $C_T < C_L < C_F$ のそれぞれの場合のスローネス線図を描き、臨界角を求めよ。

(b) 反射波と透過波の振幅を求めよ。



[36] 円柱座標原点を、半無限弾性体表面にとる。 z 軸は、半無限体に垂直で、半無限体内部を $z > 0$ とする。軸対称表面波の伝ば解析のため変位ポテンシャルを利用する。関

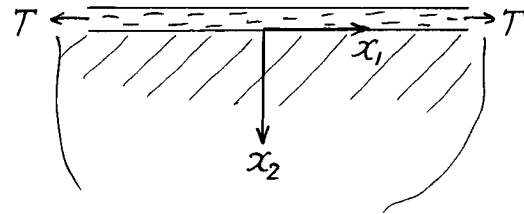
連する式は第2.13節に述べられている。そこで $\varphi(x, z, t)$ と $\psi_0(x, z, t)$ を

$$\varphi = \Phi(x) e^{-b_1 z} e^{i k c t}, \quad \psi_0 = \Psi_0 e^{-b_2 z} e^{i k c t}$$

といて $\Phi(x)$ と $\Psi_0(x)$ を求めよ。ただし b_1 と b_2 は第5.11節を見よ。次に、位相速度 c が、式(5.95)を満足しなければならないことを示せ。

[37] 図のように、半無限弾性体表面が薄い流体表層で覆われ、表面張力が働いているとする。その流体の粘性が無視されて半無限体とのせん断干渉がないと見なせる時、半空間を伝わる表面波について次の問に答えよ。^[註]

- (a) 位相速度を求める式を求めよ。
- (b) その波は分散的か否か。
- (c) 極限移行により従来のレ-レ方程式となることを検討せよ。
- (d) この表面張力効果のある時の方程式の根を求めよ。



[38] 弾性固体と理想弾性流体との界面における表面波の伝ばを調べよ。
 [39] 異種半無限弾性体が界面でせん断応力 τ で垂直変位が連続(平滑接触)の場合、界面に沿うストーンレー波の伝ばについて考える。

(a) 位相速度の方程式は、次の形で与えられることを示せ。

$$S(\gamma) = \alpha^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha \gamma}{\kappa^B} \right)^2 \right\}^{1/2} R_1 + \left\{ 1 - \left(\frac{\gamma}{\kappa} \right)^2 \right\}^{1/2} \frac{\mu^B}{\mu} R_2 = 0$$

ただし $\alpha = \frac{c_T}{c_T^B}$, $\kappa = \frac{c_L}{c_T}$, $\gamma = c/c_T$.

$$R_1 = (2 - \gamma^2)^2 - 4 \left\{ 1 - \left(\frac{\gamma}{\kappa} \right)^2 \right\}^{1/2} (1 - \gamma^2)^{1/2}$$

$$R_2 = (2 - \alpha^2 \gamma^2)^2 - 4 \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha \gamma}{\kappa^B} \right)^2 \right\}^{1/2} (1 - \alpha^2 \gamma^2)^{1/2}$$

(b) $S(\gamma) = 0$ は常に実根をもつだろうか? もしもたまたまならば、実根に対する条件は何か。

[註] 問題[32]を参考にせよ。

[40] 異種半無限弾性体が完全接合しているとき

$$c_T^B < c_L^B < c_T < c_L$$

の場合のスローネス線図を描き、入射縦波に対する臨界角を決めよ。また、材質を変えて考えられる他の位相速度の大小関係についても行ってみよ。

[41] 厚さ $2h$ の弾性単層に、その中央面と $x_1 x_3$ 面が一致するような直角座標をとった時、

$$\varphi = \psi_1 = \psi_3 = 0$$

$$\psi_2 = A \cos \beta x_2 \cdot \sin l x_3 \cdot e^{i k(x_1 - ct)}$$

で定まる波動を調べよ。表面 $x_2 = \pm h$ で応力が作用しないという条件より、 β を求めよ。位相速度 c と波数 k と l との関係はどうなるか。最低次の3つのモードに対する変位分布を描け。

[42] 自由面と 45° で入射するSV波はSV波のみで反射することを第5.7節で述べた。従って第6.2節で述べた増幅的干渉の成立する波長の場合、その幾何学的波線の考察によって、弾性層の単純モード運動を形成する離散的スペクトルの解析が可能である。

- (a) これらのモードの位相速度はどうなるか。求めよ。
- (b) エネルギーの伝搬される速度はどうか。
- (c) 周波数が $\omega h/c_L = \sqrt{2}(n\pi/2)$; $n = 1, 2, 3, \dots$ によって与えられることを示せ。
- (d) これらの低次モードのいくつかに対する変位分布をスケッチせよ。

これらのモードを Laméモードと呼ぶ。Laméモードを自由表面を有する帯領域弾性体

$$-a \leq x_3 \leq a, \quad -h \leq x_2 \leq h, \quad -\infty < x_1 < \infty$$

に適用できるだろうか?

[43] 弾性単層内の運動解析は、平面ひずみの場合に限らず、拡張することが出来る。たとえば

$$\phi = B \cos \beta x_2 \cos l x_3 \cdot \sin k(x_1 - ct)$$

$$\psi_1 = C l \sin \beta x_2 \sin l x_3 \sin k(x_1 - ct)$$

$$\psi_3 = C k \sin \beta x_2 \cos l x_3 \cos k(x_1 - ct)$$

によって与えられる波動を考えよ。これらの運動の対称面はどれか？ 応力 τ_{22} , τ_{21} , τ_{23} を求めて $x_2 = \pm h$ における応力自由条件を考え、この単層に対する周波数方程式が次式となることを示せ。

$$\frac{\tan(ph)}{\tan(qh)} = - \frac{(k^2 + l^2 - \beta^2)^2}{4p\beta(k^2 + l^2)}$$

ただし $p^2 + l^2 + k^2 = (\omega/c_L)^2$, $\beta^2 + l^2 + k^2 = (\omega/c_T)^2$

[44] $x_2 = \pm h$ で応力自由な有限長弾性層内の定在波を考えるため

$$\varphi = -A \xi \cos \xi x_1 \cos \alpha x_2 \cos \xi x_3 \sin \omega t$$

$$\psi_1 = B \xi \cos \xi x_1 \sin \beta x_2 \sin \xi x_3 \sin \omega t$$

$$\psi_3 = -B \xi \sin \xi x_1 \cos \beta x_2 \cos \xi x_3 \sin \omega t$$

とすれば 3つの座標軸平面について対称となるモードを与える。 $x_2 = \pm h$ で応力のない条件から、次式が得られることを示せ。

$$\frac{B}{A} = \frac{\xi(\xi^2 + \zeta^2 - \beta^2) \cos \alpha h}{2\beta(\xi^2 + \zeta^2) \cos \beta h} = \frac{2\alpha \xi \sin \alpha h}{(\beta^2 - \xi^2 - \zeta^2) \sin \beta h}$$

そして α, β を $\alpha = m\pi/2h$ と $\beta = n\pi/2h$ として、対応する周波数を求めよ。

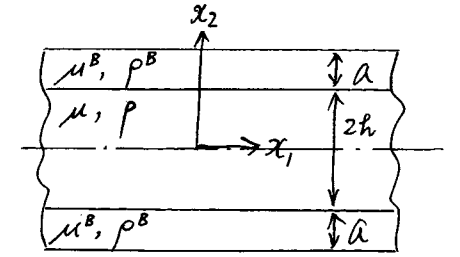
$$\text{次に } \psi_2 = (C_1 \xi \sin \gamma x_1 \cos \alpha x_2 \sin \xi x_3 + C_2 \xi \sin \xi x_1 \cos \beta x_2 \sin \xi x_3) \sin \omega t$$

によって定まる水平偏向せん断波を考えよ。上述の α, β に対して $x_2 = \pm h$ の面で応力が生じていないことを検討せよ。

$x_1 = \pm a$ 上の応力を計算せよ。層端が自由面となる場合を考えるため、 $x_1 = \pm a$ でせん断応力が 0 となる ξ と γ の値を求め、 $x_1 = \pm a$ で垂直応力が 0 となる q/h の比を求めよ。

本問の結果は、特定の幅と高さを有する無限長帯状導波体を伝わるモード群の弾性理論に基づく厳密解を与えている。

[45] 図のようにサンドイッチ構造の3層(1つの心材層と2つの表層)導波体がある。これに伝播するSH波、すなわち $u_3 = f(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}$ の解を考えよ。周波数方程式を導き、さらに $kh \ll 1$ と $kh \gg 1$ に対する極限周波数を求めよ。



[46] 内外径 $2a, 2b$ の中空円柱を伝わるねじり波の周波数方程式を求めよ。

[47] 円柱の軸せん断運動は、変位

$$w = W(r) e^{i\alpha z} e^{i\omega t}$$

によって与えられる。半径 a の中実円柱に対する周波数方程式を求めよ。

[48] 円柱棒の縦モード波に対する Pochhammer 周波数方程式は式(6.131)で与えられる。その最低次モードの位相速度は ka を増加するにつれ、レール波速度に下側から漸近することを示せ。

[49] 梁の微小要素の並進運動量と角運動量の平衡に基づく考えから一様断面の Timoshenko 梁に対する運動方程式(6.150)(6.151)を導け。

[50] 板に対する波動特性を考える近似理論を評価するため、 $\xi\Omega$ 面は Mindlin の理論による分枝、^[註] 回転慣性のみを省略した時の分枝、古典板理論による分枝をプロットして比較せよ。ただしポアソン比を 0.25 とせよ。たわみ運動の最低次分枝に対し、厳密な周波数と約 5% ずれる近似周波数に対する波長を求めよ。

[註] Mindlin の厚板の方程式(6.159)~(6.161)を利用せよ。

第 7 章

半無限体の強制振動

7.1 積分変換法

変動外荷重に対する弾性体の動的応答は、積分変換法により効果的に解析できる。いま関数 $f(x)$ の積分変換形 $f^T(\xi)$ を次式のように区間 (x_1, ∞) の積分で定義する。

$$f^T(\xi) = \int_{x_1}^{\infty} f(x) K(x, \xi) dx \quad \xi_1 \leq \xi < \infty \quad (7.1)$$

ここに x_1 と ξ_1 は実数で、また $K(x, \xi)$ は変換の積分核と呼ばれるものである。これに対応して、積分が存在するために必要なある条件のもとに、一般形が

$$f(x) = \int_{\xi_1}^{\infty} f^T(\xi) M(x, \xi) d\xi \quad (7.2)$$

となるように $f(x)$ を積分表示することができる。これはとりもなおさず像関数 $f^T(\xi)$ からもとの関数 $f(x)$ へ逆変換する積分である。そして $M(x, \xi)$ は $x_1 < x < \infty$, $\xi_1 < \xi < \infty$ の領域で定義されたある選ばれた関数で、これを逆変換の積分核という。積分変換の定義は、(実数 ξ の代わりに) ある複素面の領域 D を変域とする複素変数 ζ の関数となる積分核 K によって一般化できる。従って式(7.1)は

$$f^T(\zeta) = \int_{x_1}^{\infty} f(x) K(x, \zeta) dx \quad \zeta \in D \quad (7.3)$$

によって置き換えられる。この場合、逆変換式は次の形をとる。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f^T(\zeta) M(x, \zeta) d\zeta \quad (7.4)$$

ここに $M(x, \zeta)$ は区間 (x_1, ∞) のすべての x に対して定義された積分逆変換のための核である。変数 ζ は領域 D 内にあり、また Γ は領域 D 内の適切な積分路である。

積分変換法は、偏微分方程式を解くにあたって非常に有効な手法の一つであり、

その基本となる思想は、積分核 K を適切に選定することにより、 f の偏微分式を変換し、独立変数の数が一つ少ない f^T に対する式にすることにある。独立変数の少なくされた f^T の式で解けるならば、解 f はその逆変換積分によって表わすことができる。さて、積分変換を巧みに取扱うためには、複素変数解析の知識が必要なので、後ほどの解析のために定義や定理などを整理してみよう。

ギリシヤ文字で複素変数を示すことにする。すなわち $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ などである。ある領域 R における各々の点 ζ に対し、一つあるいは二つ以上の複素数値(それを χ で示す)の対応があるならば

$$\chi = f(\zeta)$$

と書き、 χ は複素変数 ζ の関数であるという。関数 $\chi = f(\zeta)$ が ζ の点において一つの値に定まり(一価であるという)、さらに微分可能ならば、その点で解析的と呼ぶ。領域 D に含まれるすべての点で関数 $f(\zeta)$ が解析的であるならば、その関数は領域 D で正則であるという。もし $f(\zeta)$ が有限個の除去可能な点を除いた領域のあらゆる点で解析的であるならば、 $f(\zeta)$ は領域 D で解析関数であるという。互面のどの有限領域でも正則な解析関数は、整関数(entire function)となる。第1.9節で議論した留数定理の応用に、その根拠を与えたコーシーの定理やジョルダンの補助定理も非常に重要である。

式(7.3)によって定義される変換は、本質的には次のような積分形になっている。

$$f^T(\zeta) = \int_a^b g(x, \zeta) dx \quad (7.5)$$

ここに $g(x, \zeta)$ は複素変数 ζ と実変数 x の関数である。変数 ζ は D 内もしくはその境界にあるとする。^[註] 式(7.5)によって定義される $f^T(\zeta)$ が正則な時に成り立つ定理を以下に述べる、これは Noble^[註2] によって議論された定理を実変数に

[註2] B. Noble *Methods based on the Wiener-Hopf technique*, New York, Pergamon Press (1958) p. 11

[註] 境界も含めた領域を閉包(closure)という

わたった積分に簡単化してある。

定理 7.1 $g(x, \xi) = f(x)K(x, \xi)$ は次の条件を満足するものとする。

(1) $K(x, \xi)$ は複素変数 ξ と実変数 x の連続関数とする。ただし ξ は領域 D 内にあり、 x は閉区間 $[a, b]$ 内にある。

(2) $K(x, \xi)$ は $[a, b]$ 内のすべての x に対して D 内の ξ の正則関数である。

(3) $f(x)$ は $[a, b]$ 内で有限個の不連続しか持たず、さらに $[a, b]$ 内のそれぞれの有限副区間内で最大値と最小値(いずれも有限値)をとる。

(4) $f(x)$ の値は有限個の点を除いて有界である。もし $x \rightarrow x_0$ とした時 $g(x, \xi) \rightarrow \infty$ となる様な点 x_0 があるならば

$$\int_a^b g(x, \xi) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{[a, b-\delta]} g(x, \xi) dx$$

が存在する。ここに $[a, b-\delta]$ の記号は区間 $[a, b]$ より x_0 の両側を微小長さ δ を取り除いた区間を示し、 $\lim_{\delta \rightarrow 0}$ は取り除いた長さを 0 に極限することを示す。その極限は、 ξ が D 内の任意の閉じた領域 D' 内にある時、一様にある値に近づかなければならない。

以上の場合に、式(7.5)によって定義される $f^*(\xi)$ は D 内で ξ の正則関数となる。

7.2 指数関数変換

積分変換は、フーリエ積分定理にもとづいている。実変数 x の範囲 $(-\infty, \infty)$ で定義される実関数 $f(x)$ を考えれば、フーリエ積分定理は

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\xi(u-x)} du \quad (7.6)$$

のように表わされる。もし、 $x = x_1$ の点で $f(x)$ が不連続ならば、左辺は

$$\frac{1}{2} \{ f(x_1+0) + f(x_1-0) \}$$

によって置き換える。式(7.6)の発見的な導き方は、1.8節に述べた。このフーリエ積分定理は、関数 $f(x)$ がある条件を満足するという条件のもとで成り立つ。 $f(x)$ が区

分的に定めらるが $|f(x)|$ が $-\infty$ から $+\infty$ まで積分可能であるならば、この定理の証明は容易であるが、より少ない制限条件での一般的な証明は Titchmarsh によってなされている。^[註]

7.2.1 指数型のフーリエ変換 フーリエ積分定理より

$$f^*(\xi) = \mathcal{F}_E[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx \quad (7.7)$$

のごとく $f(x)$ の指数型フーリエ変換 \mathcal{F}_E を定義すれば、逆変換定理として

$$f(x) = \mathcal{F}_E^{-1}[f^*(\xi)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f^*(\xi) d\xi \quad (7.8)$$

と書ける。式(7.8)は変換作用素として負の指数をもつ指数関数と、 $\frac{1}{2\pi}$ の係数が付いている。式(7.7)と式(7.8)とを交換すれば、次のフーリエ変換も定義できる。

$$f^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx \quad (7.9)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f^*(\xi) d\xi \quad (7.10)$$

式(7.7)と(7.8)の一方、または式(7.9)と(7.10)の変換対は、いろいろな弾性波伝播の問題を解くために非常に役に立つものとなる。

導関数の変換は、その原関数の変換の定義から容易に導びける。 $|x| \rightarrow \infty$ とした時、関数 $f(x)$ が 0 に指数関数的に漸近するものと条件づければ、式(7.7)の定義から df/dx のフーリエ変換は以下のようになる。

$$\mathcal{F}_E\left[\frac{df}{dx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \frac{df}{dx} dx$$

$$\text{部分積分して } \mathcal{F}_E\left[\frac{df}{dx}\right] = [e^{i\xi x} f(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} - i\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} f(x) dx$$

$$\text{したがって } \mathcal{F}_E\left[\frac{df}{dx}\right] = -i\xi f^*(\xi)$$

さらに $\pm\infty$ で $f(x)$ の $(n-1)$ 回の導関数がすべて 0 とすれば、部分積分を繰返すと

[註] E.C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier transforms*; 2nd ed. London, Oxford Univ. Press (1948), p. 16

$$\mathcal{F}_E\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (-i\xi)^n f^*(\xi) \quad (7.11)$$

を得る。

例として正規分布関数(Gaussian function)

$$f(x) = f_0 \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right)$$

のフーリエ変換を考えよう。この関数は図7.1に示したような分布を示す。その形は中央の高さ f_0 と幅のパラメータ σ によって特徴づけられる。その関数の変換は

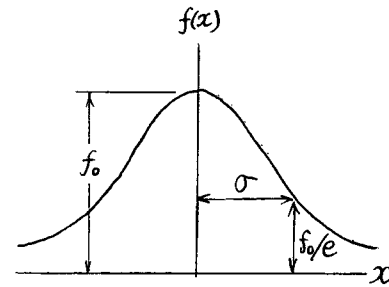


図7.1 正規分布関数

$$f^*(\xi) = f_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-x^2/\sigma^2} dx = f_0 \exp\left(-\frac{\xi^2 \sigma^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\left(\frac{x}{\sigma} - \frac{1}{2}i\xi\sigma\right)^2\right] dx$$

この積分は標準的な積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-s^2) ds = \sqrt{\pi} \quad ; \quad s = \frac{x}{\sigma} - \frac{1}{2}i\xi\sigma \quad (7.12)$$

を用いることによって求められ

$$f^*(\xi) = f_0 \sigma \sqrt{\pi} \exp(-\xi^2 \sigma^2 / 4) \quad (7.13)$$

を得る。この場合、変換形もまた正規分布関数であるが、ここでは幅パラメータが $\frac{2}{\sigma}$ であり、元の関数の幅パラメータと逆数の形で関係している。すなわち、図7.1で高く幅狭い関数曲線は、変換された世界では、変数 ξ に対して低く幅広な曲線になる。

ディラックのデルタ関数は3.3節でも導入したが、この正規分布関数を利用すればその関数を非常にうまくあいだに説明することができる。式(7.12)から正規分布関数曲線の下側の面積は $f_0 \sigma \sqrt{\pi}$ であるのでもし $f_0 = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}}$ とおけばその面積は1となる。そこで n の増加とともに σ_n の値が減少するとすれば

$$f_n(x) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_n^2}\right)$$

なる関数よりなる数列 $\{f_n\}$ は $x=0$ の時どんどん大きくなり $x \neq 0$ では0に近づく。

この $\sigma_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)とした極限をディラックのデルタ関数と定義する。この極限で、 $x=0$ を含む区間にわたった積分の値は1になる。従って $f_0 = \frac{1}{\sigma \sqrt{\pi}}$ とすれば式(7.13)からわかるように $\sigma \rightarrow 0$ の場合にあたるデルタ関数のフーリエ変換は1である。

7.2.2 両側ラプラス変換 指数型フーリエ変換を少し変形した両側ラプラス変換がよく利用される。フーリエ積分定理(7.6)にもどり関数

$$g(x) = f(x) e^{-\xi x}$$

の形について定理が成り立つものとしよう。 $g(x)$ を式(7.6)に入れば積分定理は次のようになる。

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta_1 - i\infty}^{\zeta_1 + i\infty} e^{\xi x} d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta u} f(u) du \quad (7.14)$$

ここに $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ である。式(7.14)は

$$f^*(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta x} f(x) dx \quad (7.15)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta_1 - i\infty}^{\zeta_1 + i\infty} e^{\xi x} f^*(\zeta) d\zeta \quad (7.16)$$

と書けるから、これを $f(x)$ の両側ラプラス変換の定義とする。 $x=x_1$ の点で $f(x)$ が不連続ならば式(7.16)の左辺を次式でおきかえる。

$$\frac{1}{2} [f(x_1+0) + f(x_1-0)]$$

$f^*(\zeta)$ が正則となる領域を定めるため定理7.1の条件(3)と(4)を満足する関数 $f(x)$ を考える。両側ラプラス変換の積分核 $e^{-\zeta x}$ は明らかに条件(1)と(2)を満足している。さて、 $x \rightarrow +\infty$ の時 $|f(x)| < A \exp(\zeta_1 x)$ で、かつ $x \rightarrow -\infty$ の時 $|f(x)| < B \exp(\zeta_2 x)$ ならば、式(7.15)によって与えられる $f^*(\zeta)$ は $\zeta_1 < \text{Re}(\zeta) < \zeta_2$ のとき一様収束する^[註]。これは条件(5)を満たすことを意味している。このような考察から、定理より $f^*(\zeta)$ は $\zeta_1 < \text{Re}(\zeta) < \zeta_2$ の帯状領域内で正則関数である。

両側ラプラス変換で非常に役立つ定理はたたみ込みの定理(convolution theorem)である。これは変換された世界で複雑な関数を逆変換する時、すでに逆変換のわかって

[註] $\text{Re}(\cdot)$ は実部を取る記号

いる関数の操作から求めるのに利用される。すなわち

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-u)f(u)du \quad (7.17)$$

$$\text{もしくは } h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)f(x-u)du \quad (7.18)$$

の積分を $h(x)$ と $f(x)$ の たにみ込み (convolution) と呼び、 $h(x)$ と $f(x)$ の両側ラプラス変換がそれぞれ $h^*(s)$, $f^*(s)$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} h(x) dx = h^*(s)f^*(s) \quad (7.19)$$

と表わせる定理である。従って h^*f^* の両側ラプラス逆変換は式(7.17)または式(7.18)で与えられる関数 $h(x)$ になる。

7.2.3 片側ラプラス変換 最もよく利用される積分変換で 時間 t を独立変数とする初期値問題に多い。この変換の定義は次式による。

$$\bar{f}(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (7.20)$$

ここに p は変換パラメータである。もし式(7.20)の積分が $p = p_1$ に対して収束するならば $\text{Re}(p) > \text{Re}(p_1)$ を満たすすべての p に対しても収束する。一般に関数 $\bar{f}(p)$ は $\text{Re}(p) > \text{Re}(p_1)$ となる複素変数 p の正則関数である。逆変換は式(7.16)より $\text{Re}(p) > \text{Re}(p_1)$ の時、

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[\bar{f}(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{f}(p)e^{pt} dp \quad (7.21)$$

となるから、式(7.21)の積分路は $\bar{f}(p)$ のすべての特異点の右側の任意の垂直線とすることができる。フーリエ変換の時と同様、 $f(t)$ の不連続点では式(7.21)の左辺を

$$\frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)]$$

に置き換える。ラプラス変換を演算子法的に行う場合には、暗黙のうちに逆変換式(7.21)が成立する条件下で考え、 p があたかも実数であるとして取扱える。

関数の微分形のラプラス変換は部分積分によって得られる。すなわち

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = p\bar{f}(p) - f(0_+) \quad (7.22)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = p^2\bar{f}(p) - pf(0_+) + f'(0_+) \quad (7.23)$$

などである。ここに $f'(0_+)$ と $f(0_+)$ はそれぞれ t の正側から $t \rightarrow 0$ にした時の $\frac{df}{dt}$ と $f(t)$ の極限值を意味する。

次に、アベルの定理として知られている漸近関係^[註]についてふれてみよう。それは $\bar{f}(p)$ が $f(t)$ と式(7.20)によって関係づけられているとき $-1 < \alpha < 0$ に対し

$$t \rightarrow 0_+ \text{ で } f(t) \sim A t^\alpha \quad (7.24)$$

$$\text{ならば } p \rightarrow \infty \text{ で } \bar{f}(p) \sim A \Gamma(\alpha+1) p^{-\alpha-1} \quad (7.25)$$

である。ただし p の実部は正とする。従って p の大きい正の値に対する $\bar{f}(p)$ の性質から t の小さな正の値に対する関数 $f(t)$ の性質が推論できる。逆に p の小さな値に対する $\bar{f}(p)$ から t の大きな正値に対する $f(t)$ の様子も推論でき、それは次式による。

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\bar{f}(p) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$$

これは過渡現象の解析で十分時間の経過した時の様子を簡単に調べる時に利用できる。式(7.24)(7.25)で $\alpha=0$ において A を消去すれば次のようにも書ける。

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p\bar{f}(p) = \lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = f(0_+)$$

これらの像関数と現関数との漸近関係は数値解析結果の吟味にも便利である。

[註] これらの漸近関係の証明は、たとえば、富久幸明(訳)「工業数学(上)」R.C.ワイリ-原著などに見られる。
フレイン図書出版

7.3 そのほかの積分変換

この節では、指数関数以外の積分核による変換をいくつかまとめておこう。

7.3.1 フーリエ・サイン変換(—正弦変換) $f(x)$ に対して フーリエ変換定理

が成り立つとすれば フーリエサイン変換とその逆変換は

$$f^s(\xi) = \mathcal{F}_s[f(x)] = \int_0^\infty f(x) \sin \xi x \, dx \quad (7.26)$$

$$f(x) = \mathcal{F}_s^{-1}[f^s(\xi)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f^s(\xi) \sin \xi x \, d\xi \quad (7.27)$$

7.3.2 フーリエ・コサイン変換(—余弦変換) 式(7.26)(7.27)に類似して

$$f^c(\xi) = \mathcal{F}_c[f(x)] = \int_0^\infty f(x) \cos \xi x \, dx \quad (7.28)$$

$$f(x) = \mathcal{F}_c^{-1}[f^c(\xi)] = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f^c(\xi) \cos \xi x \, d\xi \quad (7.29)$$

7.3.3 ハンケル変換 実関数 $f(r)$ が区間 $(0, \infty)$ で定義されている

とき、 $f(r)$ の変動に関して比較的ゆるい制限条件のもとで、フーリエ積分定理のように次式が成り立たせることができる。

$$f(r) = \int_0^\infty J_\nu(\xi r) \xi \, d\xi \int_0^\infty f(r) J_\nu(\xi r) r \, dr \quad (7.30)$$

ここに $J_\nu(\xi r)$ は $\nu > -1/2$ 次の第一種ベッセル関数である。もし $r=c$ で $f(r)$ が不連続であるならば左辺は

$$\frac{1}{2} [f(c+0) + f(c-0)]$$

によって置き換える。関数 $f(r)$ のハンケル変換は

$$f^{H\nu}(\xi) = \mathcal{H}_\nu[f(r)] = \int_0^\infty f(r) J_\nu(\xi r) r \, dr \quad (7.31)$$

によって定義される。式(7.30)より逆変換は次式になる。

$$f(r) = \mathcal{H}_\nu^{-1}[f^{H\nu}(\xi)] = \int_0^\infty f^{H\nu}(\xi) J_\nu(\xi r) \xi \, d\xi \quad (7.32)$$

7.3.4 メリン変換(メラン—) $f(r)$ は、ある実数 σ_1 と σ_2 に対して

$$\int_0^1 r^{\sigma_1-1} |f(r)| \, dr \quad \text{と} \quad \int_1^\infty r^{\sigma_2-1} |f(r)| \, dr$$

の積分が有界となるような r の区間 $(0, \infty)$ で定義された実関数とする。この時 $f(r)$ のメリン変換として

$$f^M(p) = \int_0^\infty f(r) r^{p-1} \, dr \quad (7.33a)$$

を定義することができる。ここに $p = \sigma + i\tau$ は $\sigma_1 < \operatorname{Re} p < \sigma_2$ の帯状領域内の任意の複素数である。これに対する逆変換は次式によって与えられる。

$$f(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^M(p) r^{-p} \, dp \quad (7.33b)$$

ここに γ は $\sigma_1 < \gamma < \sigma_2$ である。

メリン変換をラプラスの式に適用する場合を例に考える。

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (7.33c)$$

ただし $r \geq 0$, $|\theta| \leq \alpha$ のクサビ形領域とする。条件として $r \rightarrow \infty$ の時 $u(r, \theta) \rightarrow 0$ とすれば式(7.33c)は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + p^2 \right) u^M(p, \theta) = 0 \quad (7.33d)$$

$$u^M(p, \theta) = \int_0^\infty u(r, \theta) r^{p-1} \, dr \quad (7.33e)$$

式(7.33d)が成立するための複素数 p の領域をより精確に調べれば、 $r \rightarrow 0$ の時

$$u(r, \theta) \rightarrow r^{-\lambda} \quad \text{また、} \quad r \rightarrow \infty \quad \text{の時} \quad u(r, \theta) \rightarrow r^{-\mu}$$

に漸近するならば、 $\lambda < \operatorname{Re} p < \mu$ になる。

この他メリン変換を利用して級数和や積分方程式の解を得る手法が議論されている。^[註]

[註] I. N. Sneddon, "The Use of Integral Transforms" McGraw-Hill (1972) p.262

7.4 積分の漸近展開

7.4.1 一般的考察 波動伝ば問題を積分変換法で解析し、場の量に対する形式解を一般形で表わせば、次の形になることが多い。

$$I(\lambda) = \int_{\Gamma} F(\zeta) e^{-\lambda f(\zeta)} d\zeta \tag{7.34}$$

ただし Γ は複素平面内の積分路で補助変数 λ は正実数とする。いま関数 $f(\zeta)$ を後の説明のために実部と虚部に分け

$$f(\zeta) = g(\zeta, \eta) + i h(\zeta, \eta) \tag{7.35}$$

と書く。ただし $\zeta = \xi + i\eta$ (7.36)

式(7.34)の積分を複素積分などの解析的手法によって閉じた形で求めることが困難な場合がよくある。そこで式(7.34)の形の積分を漸近展開で評価する方法を考えてみる。漸近展開する条件として補助変数 λ が非常に大きい時とする。

関数 $I(\lambda)$ が

$$I(\lambda) \sim S_N(\lambda) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{\lambda^n}, \quad \lambda \rightarrow \infty \tag{7.37}$$

の漸近展開形に書ければよい。^[註] ただし漸近形であるとは定数 N に対して

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^N [I(\lambda) - S_N(\lambda)] = 0 \tag{7.38}$$

が成り立たねばならない。記号 \sim は漸近表現を示す。別の表現法で式(7.37)を書けば

$$I(\lambda) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{\lambda^n} + O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty \tag{7.39}$$

^[註2] λ を一定にして N をふやしてゆくと総和 $S_N(\lambda)$ が、もしかして発散してゆくかもしれないが式(7.38)の関係が成り立つならば、 $I(\lambda)$ と $S_N(\lambda)$ との差は、 λ を十分大きくとることによって任意に小さくできる。よって $S_N(\lambda)$ を $I(\lambda)$ の近似関数として用いることができる。

[註]. 式(7.34)で $f(\zeta) = \zeta$ の時、部分積分を繰り返せば λ^{-N} が出て来て式(7.37)の形に表現出来ることがある。

[註2] 次頁.

[註2] 前頁の式(7.37)あるいは(7.39)で、 λ がある大きな定数として N を多くとればとるほど精度(近似)が上がるかという問題は検討しなければならない。例を以下に示して議論し、最適の N が存在することを注意する。

積分指数関数 $E_i(\cdot)$ は次のように定義される。

$$-E_i(-x) = \int_x^{\infty} [e^{-t}/t] dt \tag{a}$$

部分積分を繰返してゆくと

$$\begin{aligned} -E_i(-x) &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{\infty} \left[\frac{e^{-t}}{t^2} \right] dt \\ &= \frac{e^{-x}}{x} \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{x^n} \right] + (-1)^{n+1} (n+1)! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt \end{aligned} \tag{b}$$

この級数はコーシーの収束判定により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}/x^{n+1}}{a_n/x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{x} \right) \rightarrow \infty \tag{c}$$

で発散する。ただ $n < x$ の時、それらしい値に近づいて行く。そこで $x=4$ の場合の $-4e^4 E_i(-4)$ を n 項級数和として評価すれば表のように近似値が得られる。厳密値は 0.82533 であり最も近づくのは $n=3$ の時で 4% 程度の誤差となる。もっと精度よく近似できないものだろうか。真の値は $n=3$ と $n=4$ に対する値にはさまれているから

$$T_{n+1} = \frac{1}{2}(S_n + S_{n+1}) = S_n + \frac{1}{2}U_{n+1} \tag{d}$$

と考えればさらによくなり $n=2$ と 3 に対して上式を用いれば 0.82813 を得る。

表. 級数和による近似

n	n 項の値 (U_n)	n 項までの和 (S_n)
0	1.00000	1.00000
1	-0.25000	0.75000
2	0.12500	0.87500
3	-0.09375	0.78125
4	0.09375	0.87500
5	-0.11719	0.75781
6	0.17579	0.93360
7	-0.31013	0.62347
8	0.62026	1.24373
9	-1.39559	-0.15186

7.4.2 ワトソンの補助定理 よく使われる補助定理にワトソンのレマ (Watson's lemma)がある。これは積分

$$I_1(\lambda) = \int_0^a e^{-\lambda \xi} \xi^\mu g(\xi) d\xi \tag{7.40}$$

を近似評価する時に用いられる。Nが負の整数でないときg(ξ)が

$$g(\xi) = g_0 + g_1 \xi + g_2 \xi^2 + \dots + g_N \xi^N + R_{N+1}(\xi)$$

に書けたとする。ただしξのある区間(0, ξ₁)で

$$|R_{N+1}(\xi)| < C \xi^{N+1}$$

とするようなCが存在するとしている。この時、式(7.40)はλ→∞で

$$I_1(\lambda) = \sum_{n=0}^N g_n \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{\lambda^{\mu+n+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{\mu+n+2}}\right) \tag{7.41}$$

ただしμ>-1で関数g(ξ)は|g(ξ)|<K exp(βξ)なる有界関数とする。

別に、g(ξ)を解析関数としてg(ξ)~Σ_{n=1}^N g_n ξ^{(n/δ)-1}; δ>0と展開すれば

$$I_2(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda \xi} g(\xi) d\xi \tag{7.40}'$$

に対する近似として次のように表わせる。

$$I_2(\lambda) \sim \sum_{n=1}^N g_n \Gamma\left(\frac{n}{\delta}\right) \lambda^{-(n/\delta)} \tag{7.41}'$$

ただし|arg(λ)|<π/2-Δ; Δ>0

7.4.3 フーリエ型積分の漸近展開 次の積分

$$I(x) = \int_a^b e^{ix\xi} g(\xi) d\xi \tag{7.42}$$

で、任意の実数xに対してI(x)の存在するような可積分関数g(ξ)を考える。特によく問題にされる形はg(ξ)=(ξ-a)^{μ-1}g*(ξ)のように積分区間で特異性を有する場合である。そこで次を例に検討してみよう。

$$I(x) = \int_a^b e^{ix\xi} (\xi-a)^{\mu-1} g^*(\xi) d\xi \tag{7.43}$$

g*(ξ)が区間a≤ξ≤bでN回連続して微分可能でn次導関数について、それぞれg^{(n)}(b)=0であり、0<μ<1ならばx→∞に対する近似として

$$I(x) = -A_N(x) + O(x^{-N}) \tag{7.44}$$

になる。ここに

$$A_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+\mu)}{n!} e^{i(n/2)(n+\mu-2)} g^{(n)}(a) x^{-n-\mu} e^{ixa} \tag{7.45}$$

7.4.4 鞍点法 (The saddle point method) この手法の具体的な応用は次節に述べることにして概要を説明し近似評価の一つとして紹介する。一般に正の実数λを含む複素積分

$$\int_C e^{\lambda f(\xi)} g(\xi) d\xi$$

のλが大きい所での近似評価を考える。f(ξ)は解析関数でその実部は積分路Cの両端で-∞に近づき、途中のC上で極大値を一回だけとるものとする。g(ξ)は指数関数部に比べてゆるやかに変化する関数ならばλが大きいときCの両端上の積分による値は非常に小さくなる。積分値に寄与する部分はRe f(ξ)の極大となる点付近によるもののみになる。そこで積分路Cを変形して寄与部分を最も狭まくなるようにする。すなわちRe[f(ξ)]が極大になる点から最も急な傾斜で降下する積分路を選ぶことになる。図式的に考えれば曲面からの高さとしてRe f(ξ)を描くとき出来る曲面は鞍形になりその峠点を最も急傾斜で越える路となる。そうすればλの大きいとき峠点(鞍点)の極めて近くの限られた積分で近似評価できる。この時g(ξ)は鞍点でテーラ展開し最初の数項をとって置きかえ積分値を評価することができる。さて、鞍点を通る最急降下積分路はRe[f(ξ)]=(一定)の曲線と直交するはずだからIm[f(ξ)]=(一定)になる。また、鞍点はIm f(ξ)=一定の曲線上でかつ傾斜が0(すなわち関数f(ξ)の実部の微係数が0)であるから、次式を満たすξの点として与えられる。

$$f'(\xi) = 0$$

[註] 鞍点法は鞍点の近くに特異性を有する場合には近似が悪くなることがあるので注意しなければならないが、広く利用されており有効である。

7.5 停留位相と最急降下の方法

この二つの方法は、波動解析によく使われる手法で、いずれも式(7.34)の形に見られる指数部の停留点近辺の解析で積分を評価する。

7.5.1 停留位相法(Method of stationary phase) 一般に $x=0$ の波源は

フーリエ積分の意味で周波数の連続した調和波の重ね合せと考えることができ

$$u(0, t) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (7.46)$$

ここに $f^*(\omega)$ は $f(t)$ のフーリエ変換である。それぞれの成分の調和波が位相速度 c で伝わるから 距離 x の所では位相おくれ(時間おくれ)があるから

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \exp[i\omega(t - \frac{x}{c})] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \exp[-i(kx - \omega t)] d\omega \quad (7.47)$$

式(7.47)の C (又は k) は ω の関数である。今、上式の位相を

$$\phi(\omega) = -(kx - \omega t) \quad (7.48)$$

とおくと 震源から遠くはなれた所(遠方場)では x も t も大きいので $\exp[i\phi(\omega)]$ は、一般に高振動形の関数である。従って、式(7.47)の積分は、下図のような曲線にかこまれた影をつけた面積和となる。 $f^*(\omega)$ の変動は $\exp[i\phi(\omega)]$ の変動に比べてゆるやかであるから 相隣る面積和は符号が反対のため打消し合う。ただ $\phi(\omega)$ の変化が $f^*(\omega)$ と同等であるか、またはそれ以下の所では打消し合わない。このようなゆるやかな変動となる $\phi(\omega)$ は、 ω が次式を満たす所の近辺である。

$$\phi'(\omega) = 0 \quad (7.49)$$

これを満足する ω を ω_0 とする。結局、式(7.47)の積分は ω_0 近辺のみ行えばよいことになる。そこで

$$\begin{aligned} & f^*(\omega) \exp[i\phi(\omega)] \\ & |f^*(\omega)| \end{aligned}$$

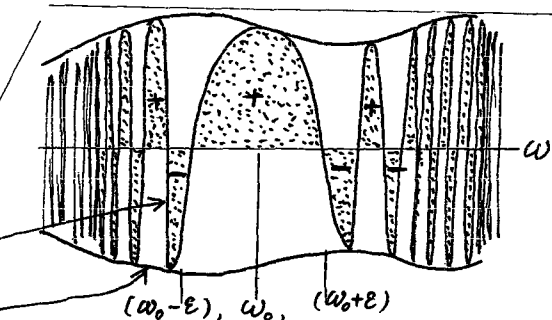


図7.2(a): 停留位相近辺の積分評価

式(7.47)を ω_0 近傍で次のように展開する。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \exp\left\{i\left[\phi(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\phi'(\omega_0) + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\phi''(\omega_0) + \dots\right]\right\} d\omega \quad (7.50)$$

ω_0 近傍以外の積分が 0 となるから 式(7.50)は近似的に

$$u(x, t) \approx f^*(\omega_0) \exp[i\phi(\omega_0)] \int_{\omega_0 - \varepsilon}^{\omega_0 + \varepsilon} \exp\left[\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\phi''(\omega_0) + \dots\right] d\omega$$

積分範囲を拡張しても(0を加えても)積分値に変わりはないから、 $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$ とし

$$u(x, t) \approx f^*(\omega_0) \exp[i\phi(\omega_0)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{1}{2}\tilde{\omega}^2\phi''(\omega_0)\right] d\tilde{\omega} \quad (7.51)$$

ところで Fresnel 積分公式の

$$\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2}ax^2\right) dx = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2}ax^2\right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

を $a = |\phi''(\omega_0)|$ とし 式(7.51)に用いると

$$u(x, t) \approx f^*(\omega_0) \exp[i\phi(\omega_0)] \sqrt{\frac{\pi}{|\phi''(\omega_0)|}} \cdot (1 \pm i) \quad (\text{複号は } \phi'' \text{ の符号をとる})$$

$$u(x, t) \approx f^*(\omega_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|\phi''(\omega_0)|}} \exp\left[i\phi(\omega_0) \pm i\frac{\pi}{4}\right] \quad (7.52)$$

と近似評価できる。 $\omega = \omega_0$ の停留点においては

$$0 = \phi'(\omega_0) = -\left[\frac{d}{d\omega}(kx - \omega t)\right]_{\omega = \omega_0} = -x\left[\frac{dk}{d\omega}\right]_{\omega = \omega_0} + t = -\frac{x}{[C_g]_{\omega = \omega_0}} + t$$

$$\text{従って} \quad t = \frac{x}{C_g} \quad (\omega = \omega_0) \quad (7.53)$$

つまり点 x では、群速度 $[C_g]_{\omega = \omega_0}$ で伝わるに要する時間を経過した後に周波数 ω_0 の波が出現する。その近似応答が式(7.52)で与えられる。 $\phi''(\omega_0)$ は

$$\phi''(\omega_0) = \left\{\frac{d}{d\omega}[\phi'(\omega)]\right\}_{\omega = \omega_0} = -x\left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{C_g}\right)\right]_{\omega = \omega_0}$$

であるから 式(7.52)は 次のようにも書きかえてできる。

$$u(x, t) = f^*(\omega_0) \left\{2\pi / \left|x \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{C_g}\right)\right|\right\}^{1/2} \exp\left[i\left(\omega_0 t - kx \pm \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (7.54)$$

これより群速度の変化が小さい時、大きな応答になることがわかる。この停留位相の

考え方を、丸棒の^縦衝撃応答に應用し、分散曲線、群速度曲線により変動状態を理論的に求めてみよう。観測点を x 、観測時刻を t とする。この時、応答を支配する周波数 ω_0 で、式(7.53)が成立するから $t/x = 1/[C_g]_{\omega=\omega_0}$ の関係がある。従って t/x の値(又は $[C_g]_{\omega=\omega_0}$ の値)より群速度曲線を用いて波数を求められる。この ω_0 に対する位相速度を分散曲線を用いて求めれば $\omega_0 = [\bar{c} C]$ を定めることができる。 (x, t) における変動周期 $T (= \frac{2\pi}{\omega_0})$ が決定される。結局、 (x, t) における T を横軸に t/x 、縦軸に T をとって調べ、整理することができる。この t/x を発生時間 (time of occurrence)、 T を卓越周期 (predominant period) という。便宜のため次の様に標準化してみる。ただし $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ 、 a は丸棒半径とする。

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_g &= C_g/C_0, & \bar{c} &= c/C_0, & \bar{\gamma} &= a\omega/2\pi \\ \bar{x} &= x/a, & \bar{t} &= t/T, & \bar{T} &= TC_0/a \end{aligned} \right\}$$

そうすると、次の関係が成立つ

$$\bar{C}_g = \bar{x} / \bar{t}, \quad \bar{T} = \frac{1}{\bar{c} \bar{\gamma}}$$

下図より、第1モードについて $0.38 < \bar{C}_g < 1.0$ すなわち $1 < \bar{t} / \bar{x} < 2.64$ である。点 A で $\bar{C}_g = 1, \bar{\gamma} = 0$ であるから $\bar{t} / \bar{x} = 1, \bar{T} = \infty$ 。矢印に従い、右に向うにつれ \bar{C}_g は減少し

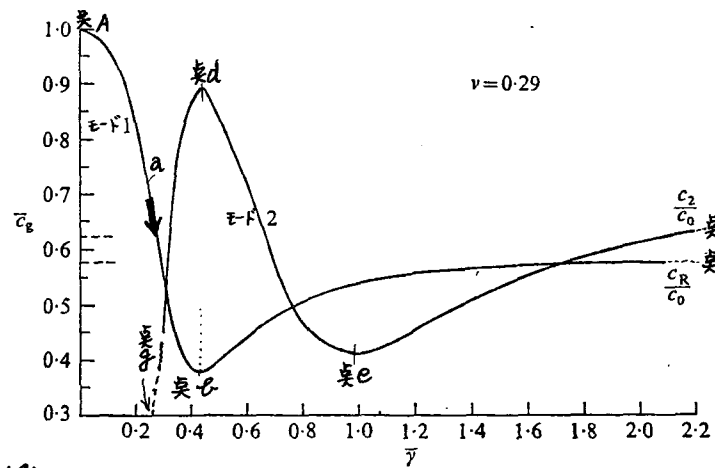


図 7.2(b) Group velocity versus wavenumber for the first two longitudinal modes of a circular rod. (After Davies [11, Fig. 13].)

$\bar{\gamma}$ は増加する。この時位相速度 C は右図のように減少するが $\bar{\gamma}$ の影響が大きく \bar{t} は急減する。(図(d)の \bar{x} を参照)

図(b)の点 a 前後では \bar{T} の変化はゆるやかで、図(d)の対応する点 a の上下は水平な曲線と等しい点 a の \bar{t} / \bar{x} は図(b)の極小群速度 0.38 より、最大値 2.64

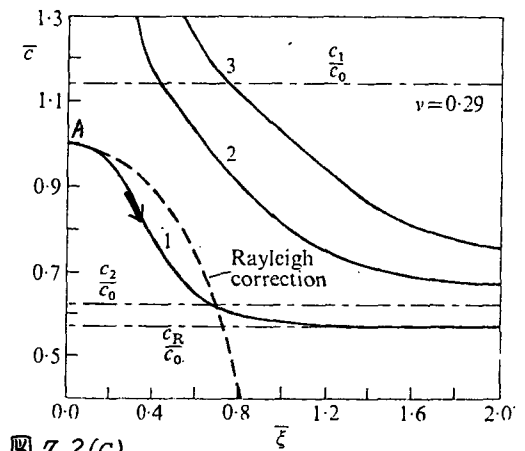


図 7.2(c) Dispersion curves for the first three longitudinal modes in a rod.

を得る。この時 $\bar{\gamma} = 0.43$ であるから $\bar{T} = 3.2$ となる。点 a をすぎると $\bar{\gamma} \rightarrow \infty$ にするにつれ群速度は c_R 波速度 C_R に漸近し \bar{t} / \bar{x} の値は 2.64 から C の値の 1.73 になる。この時、図(d)の様に \bar{T} は 0 に近づいてゆく。この曲線より $1.73 < \bar{t} / \bar{x} < 2.64$ では \bar{T} が 2 つの

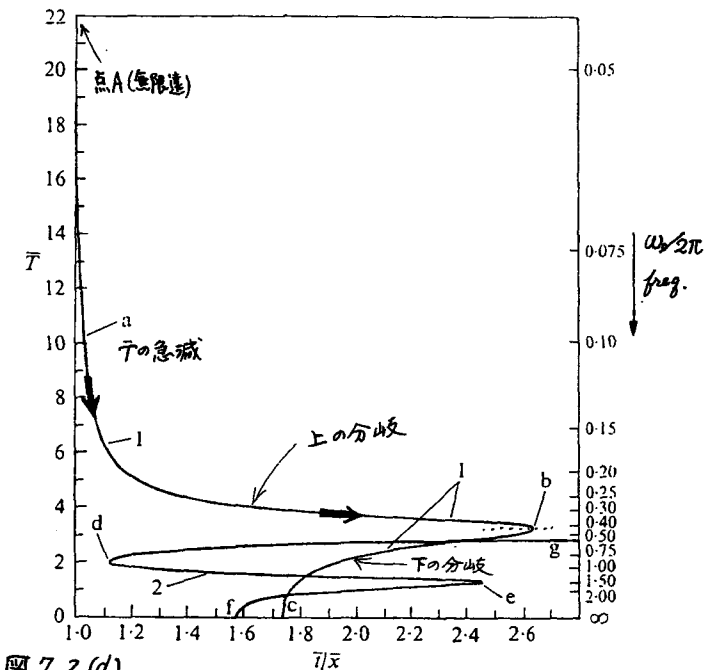


図 7.2(d) Period \bar{T} of the dominant group in a bar at a distance \bar{x} and time \bar{t} . (After Davies [11, Fig. 15].)

値をとることに注意されたい。そこで図のように点 a を境にして上の分岐と下の分岐に分ける。第 2 モードに対しては図(b)より $(\bar{\gamma}, \bar{C}_g)$ の値は $(0.44, 0.89)_d$ $(1.00, 0.42)_e$ $(\infty, C_R/C_0)_f$ $(0, 0.2)_g$

である。これに対する

$(\bar{t}/\bar{x}, \bar{T})$ は図(d)の様になり $C_0/C_T < \bar{t}/\bar{x} < 2.44$ では \bar{T} が3つの値をもつ。

さて図(d)の結果を用いて 具体的に ある測定点における時間応答の様子を描いてみよう。簡単のため 1モードの波のみを考える。 $\bar{t}/\bar{x} = 1$ で応答ははじめ、横波速度 C_0 で非常に長い周期の波が到着する。 $\bar{t}/\bar{x} = 1.2$ のあたりまで急激に \bar{T} が減少し、しばらくほぼ一定周期(4前後)で変動する。上の分岐に対しては 点cの $\bar{t}/\bar{x} = 2.64$ まで応答が持続する。図(e)参照。下の分岐に対しては $\bar{t}/\bar{x} = 1.73$ (点c)で応答ははじめ、この時、 $\bar{T} < 0.5$ の高周波成分がほとんど同時に到着する。そして $\bar{t}/\bar{x} = 2.64$ になるまで、じょじょに周期がながくて 点cの $\bar{T} = 3.2$ に近づいて行き、 $\bar{t}/\bar{x} > 2.64$ では応答を示さない。この1モードに対し、上の分岐と下の分岐との和として与えられるから、その合成結果は図(e)の一番下の曲線のようになる。点cの近辺に対しては \bar{T} の変化があまりなく、上の分岐と下の分岐による波の重ね合せなので 4.4節で述べたようなうなり型 (beat type) の応答となる。いわゆる波群を構成する。1モードでは前述のように $0.38 < C_T < 1$ であるので 有限時間 1.64 しか応答は持続しない。物理量にも

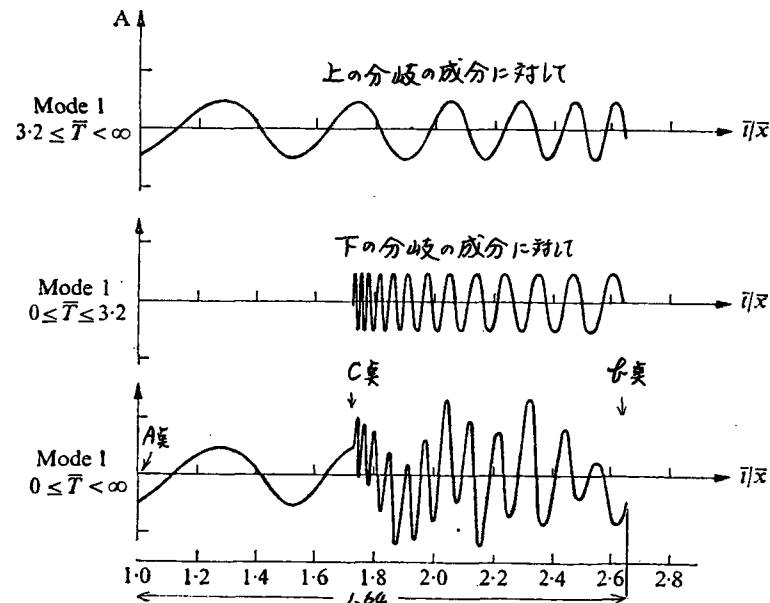


図 7.2(e) Nature of the first mode signal arriving at a given location x for changing time.

どせば

$$t = \bar{t}x/c_0$$

であるから x が大きいほど応答持続時間は比例して長くなる。しかし有限であることには変わりない。現実には、振幅はともかく、一度擾乱をうければいつまでも小さな応答を伴うものであることは経験的に知られている。これは高次モードによるもので、たとえば 2次モードについて、図(b)の点cでは群速度が0となり、対応する図(d)の点cは $\bar{t}/\bar{x} \rightarrow \infty$ のところにあたる。従って、無限時間応答が続くことになり、その時の周期 \bar{T} は、 $\bar{T} > 2.8$ で一定周期数の変動を示す。

図(d), 図(e)は波動の特性を応答の卓越周波数によって説明するものであって、応答の振幅の大きさ等に関するものではない。応答の大きさを求める場合は式(7.54)に従って求めることができるが、常に正しい近似値が得られるとは限らない。たとえば $f^*(\omega_0)$ の挙動に特異性があったり、 $(dc_g/d\omega)_{\omega_0} = 0$ となったりする時は別の手法によって検討しなければならない。しかし積分評価や級数評価をしないで済み、便利である。

停留位相法の補遺 前節で群速度の周波数(もしくは波数)に対する変化が

0となる場合には別の手法が必要であると述べた。すなわち

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \exp[i\phi(\omega)] d\omega, \quad \phi(\omega) = \omega t - kx \quad (7.55)$$

の近似評価として $\phi'(\omega) = 0$ を満たす $\omega = \omega_0$ 近傍の展開により式(7.54)を得たが、その分母からわかるように $\partial C_g / \partial \omega = 0$ の時、無限大となる。これは正しい値なのだろうか。そこで初めの展開式から もとめて吟味してみる必要がある。 k と ω は周波数スペクトル曲線によって関係づけられているから ω の代りに k を積分変数として (7.55) の代りに次式を考えても同じである。

$$u(x,t) = \int_{\Gamma} F(k) e^{itk(k)} dk \quad (7.56)$$

積分路 Γ が実軸に沿い、 t は大きな補助変数と考える。 $k(k)$ は $\{\omega(k) - \frac{kx}{t}\}$ の形をとる。 $k(k)$ を群速度の停留点 k_0 まわりで展開する。 k_0 は

$$\frac{dC_g}{dk} = \frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{dk}{dk^2} = 0 \quad (7.57)$$

の条件を満たす点として与えられ、 $k(k)$ の展開形は

$$tk(k) = tk(k_0) + (k-k_0)t + \frac{1}{2}(k-k_0)^2 a \quad (7.58)$$

$$\text{ただし } t = t \left. \frac{dk}{dk} \right|_{k=k_0}, \quad a = \frac{1}{2} t \left. \frac{d^2k}{dk^2} \right|_{k=k_0} \quad (7.59)$$

したがって式(7.56)は

$$u(x,t) = e^{ik(k_0)t} F(k_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\frac{1}{2}ak^2 + bk)} dk \quad (7.60)$$

式(7.60)積分は Airy関数の積分表示になっている。その定義は

$$(3a)^{-1/3} \pi \text{Ai}[\pm(3a)^{-1/3} b] = \int_0^{\infty} \cos[a\xi^3 \pm b\xi] d\xi \quad (7.61)$$

である。これを用いると

$$u(x,t) = e^{ik(k_0)t} F(k_0) \frac{2\pi}{(3|a|)^{1/3}} \text{Ai}[\pm 3^{-1/3} |a|^{-1/3} |b|] \quad (7.62)$$

ここに複号は $ab > 0$ の時 +, $ab < 0$ の時 - と取る。この Airy関数 $\text{Ai}(\cdot)$ は図7.2(f)

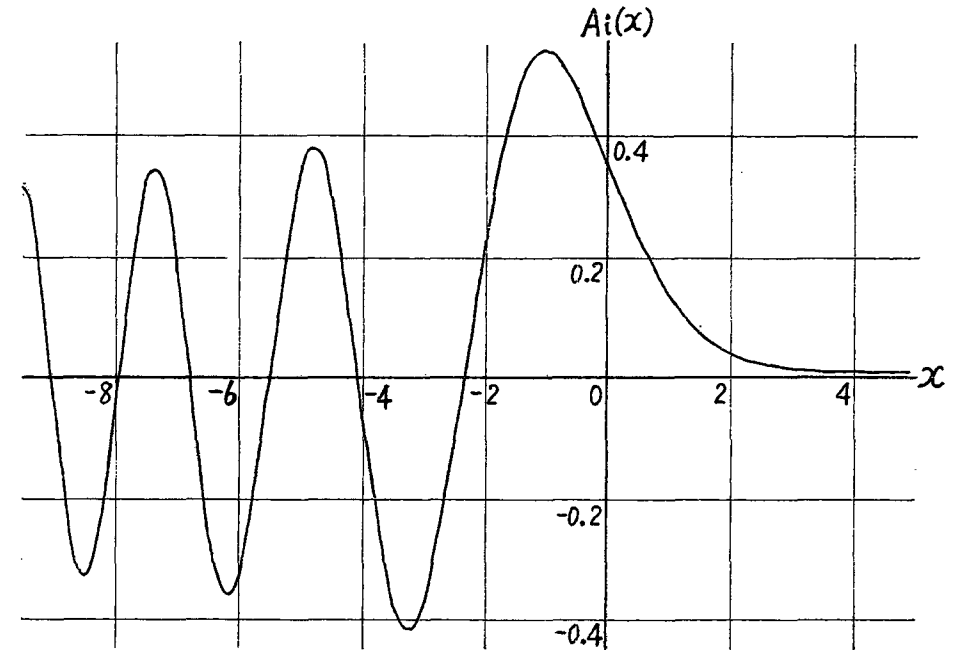


図7.2(f) Airy関数の変動様相*

の様に変動する関数でベッセル関数とは1/3次ベッセル関数と関係している。 $\text{Ai}(\cdot)$ は $x = -1$ で最大値 0.53556 をとり x の増加とともに単調に急減する。又、 x を減少させると振幅の少しづつ減少する振動を示す。これらより式(7.54)は $-3^{1/3} |a|^{-1/3} |b| = -1$ となる所で大きな変動を示す波となる。 Airy関数は1のオーダーの関数であるから、その大きな波は $|a|^{-1/3}$ に比例する。 $x \sim t C_g(k_0)$ だから、このことは $x^{-1/3}$ に比例する。式(7.54)では $x^{-1/2}$ に比例していたから x の十分離れた測定点での応答は群速度の停留する成分による応答が支配的となることになる。しかしその差は $x^{1/6}$ のオーダーになることから、この程度の違いを考慮すべきかどうかはその問題に応じて検討しなければならないだろう。

被積分関数の極と停留点が一致する特別な場合を第8.5節で再び考えよう。

* Abramowitz, M., Stegun, I. A., "Handbook of Mathematical Functions" Dover版の表より作成。(1979, 大塚)

7.5.2 最急降下法 (Method of steepest descents) 複素積分に拡張する前に実軸に沿う積分

$$I(\lambda) = \int_a^b F(\xi) e^{-\lambda g(\xi)} d\xi \quad (7.63)$$

を考へてみる。関数 $g(\xi)$ が正実数値を与えるならば、図 7.3(a) のように大きな λ の値に対して指数関数 $e^{-\lambda g(\xi)}$ は $g(\xi)$ を極小にする点 $\xi = \xi_0$ の近傍を除いて急減する。したがって ξ_0 近傍の積分により $I(\lambda)$ を近似評価できることが理解されよう。このような近似方法は解析関数の性質を利用し、適切な積分経路を複素面上に選定することによって最適化できる。

式(7.34)で、 $f(\xi)$ と $F(\xi)$ は積分路を含む領域で ξ の解析関数とし、 λ はある大きな正定数とする。いま、式(7.35)を(7.34)に入れれば被積分関数は

$$e^{-\lambda g(\xi, \eta)} \cdot e^{-i\lambda h(\xi, \eta)} \cdot F(\xi + i\eta) \quad (7.64)$$

となり、 $\xi (= \xi + i\eta)$ の微小変化に対しても λ が十分大きければ $e^{-i\lambda h(\xi, \eta)}$ による速い変動を示すだろう。そこで、 ξ の変化に対して関数 $h(\xi, \eta)$ が不変となるように積分路を変換すれば、そのような変動はなくなり、図 7.3(a) で説明した実数積分と同様に局所的積分によって評価できるようになる。さらに $e^{-\lambda g(\xi, \eta)}$ が最も急変するような条件を付加すると積分路の長さ(積分範囲)を最も短くできるだろう。従って最急降下法による近似解析のもとなる考へは、数学的には、 ξ 面上の積分路 Γ を $h(\xi, \eta)$ が一定で $g(\xi, \eta)$ が停留する点 $\xi = \xi_0$ を通る積分路 Γ_0 に変形することである。その ξ_0 を求めるには停留条件より

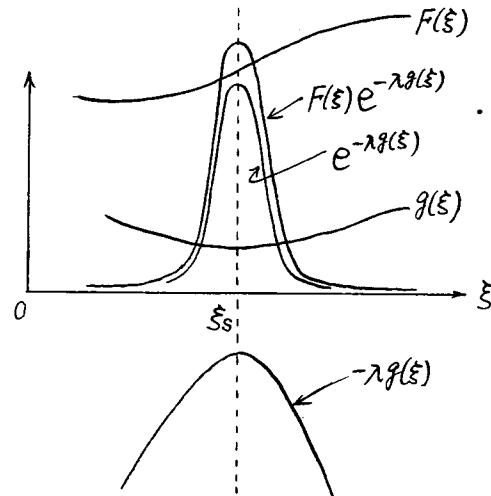


図 7.3(a) 被積分関数の変動状態

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0 \quad (7.65)$$

これは面 $g(\xi, \eta)$ の $\xi = \xi_0$ における接平面が水平であることを示している。もしこの接点 ξ_0 が $g(\xi, \eta)$ の絶対極小(極大)を与えるならば $\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} > 0 (< 0)$ と $\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} > 0 (< 0)$ が同時に成立しなければならないが、最初に述べたように $g(\xi, \eta)$ は解析関数(調和関数)としているから

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 0 \quad (7.66)$$

であり絶対極小(極大)にはなり得ない。従って式(7.65)を満足する ξ は図 7.3(b) に示すような鞍点となる。そのため本手法を鞍点法(saddle point method)と呼んでいる。 f が解析的だからコーシー-リーマンの関係が成り立ち

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial h}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial g}{\partial \eta} = -\frac{\partial h}{\partial \xi} \quad (7.67)$$

従って式(7.65)を考慮すれば、 ξ_0 は次式を満足するものとして定まる。

$$\frac{df}{d\xi} = 0 \quad (7.68)$$

$h = \text{一定}$ (図 7.3(b) で点線) が面 $g(\xi, \eta)$ の傾斜の最大となる方向となる。任意点の ξ において ξ 軸と角 θ をなす方向に局所座標 s をとると

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial \xi} \cos \theta + \frac{\partial g}{\partial \eta} \sin \theta$$

もし変数 θ に対して $\partial g / \partial s$ が最大ならば θ で微分して 0 だから

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial s} \right) = -\frac{\partial g}{\partial \xi} \sin \theta + \frac{\partial g}{\partial \eta} \cos \theta = 0$$

式(7.67)を用いると、上式は

$$-\frac{\partial h}{\partial \eta} \sin \theta - \frac{\partial h}{\partial \xi} \cos \theta = -\frac{\partial h}{\partial s} = 0$$

すなわち s の変化に対して h の変化はない ($h = \text{一定}$)。 ξ_0 は任意であった

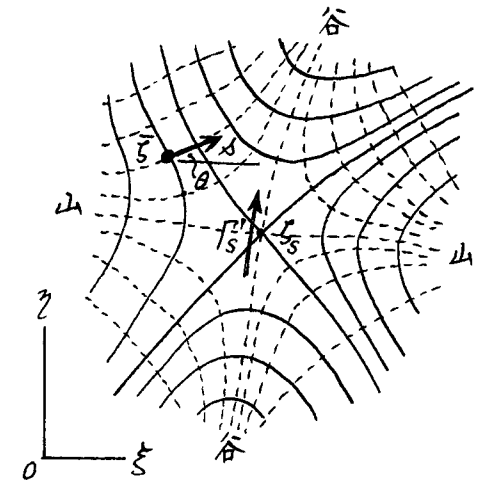


図 7.3(b) $-\lambda g(\xi, \eta)$ の等高線(実線) 点線は $h(\xi, \eta) = \text{一定}$ の線で、実線に直交する。複素 ξ 面上の $-\lambda g(\xi, \eta)$ のレリーフという。

から、常に ν は最急降下の線上で一定である。積分評価にはこのうち ζ_s を通るものを用いる。図 7.3 (c) で、谷から谷へ峠越えし ζ_s を通る $\nu = \text{一定}$ の径路 Γ_s' を採用する。この際、近くに極があると $g(\zeta, \nu)$ の空間的滑らかさが乱されるので被積分関数値が急減しないのであらかじめ考えねばならない。いま、近くに極がないとして Γ_s' に沿う ζ の関数 $f(\zeta)$ を鞍点 ζ_s まわりでテーラー級数に展開する。

$$-\lambda f(\zeta) = (-\lambda) \left\{ f_0 + (\zeta - \zeta_s) f_1 + \frac{1}{2} (\zeta - \zeta_s)^2 f_2 + \dots \right\} \quad (7.69)$$

ただし $f_n = \left[\frac{d^n f}{d\zeta^n} \right]_{\zeta = \zeta_s}$

ζ_s は停留点だから $f_1 = 0$ である。2 次の項までとって

$$-\lambda \{ f(\zeta) - f_0 \} = -\frac{\lambda}{2} (\zeta - \zeta_s)^2 f_2$$

Γ_s' に沿っては、鞍点における $-\lambda g$ が最大であること、 $\nu = \text{一定}$ であることから右辺は、実数でしかも負になる。そこで実変数 t を

$$\frac{\lambda}{2} (\zeta - \zeta_s)^2 f_2 = -t^2 \quad (7.70)$$

によって導入すれば、式(7.34)は

$$I = e^{-\lambda f_0} \int_{\Gamma_s} F(\zeta) e^{-\lambda t^2} \frac{d\zeta}{dt} dt$$

$t = 0$ (すなわち $\zeta = \zeta_s$) の前後では指数関数的に急減するから

$$I = e^{-\lambda f_0} F(\zeta_s) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\lambda t^2} \frac{d\zeta}{dt} dt \quad (7.71)$$

ただし $F(\zeta)$ は $\zeta = \zeta_s$ の近くに特異性があるわけではない。ある場合には特異性を取りのぞく必要がある。いま、

$$\zeta - \zeta_s = r e^{i\theta_s} \quad (7.72)$$

と書けば式(7.70)より実数なので

$$\arg \left[\frac{1}{2} f_2 \cdot \exp(2i\theta_s) \right] = 0 \quad (7.73)$$

これより θ_s が定まる。また I は

$$I = t \left| \frac{1}{2} f_2 \right|^{-1/2} \quad (7.74)$$

と求まり、式(7.72)(7.74)より $d\zeta/dt$ の計算ができるので式(7.71)は

$$I \sim e^{-\lambda f_0} F(\zeta_s) \frac{e^{i\theta_s}}{\left| \frac{1}{2} f_2 \right|^{1/2}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\lambda t^2} dt$$

積分範囲を $\pm\infty$ に拡大すれば第一近似として

$$I \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{F(\zeta_s)}{\left| f_2 \right|^{1/2}} \exp[-\lambda f_0 + i\theta_s] \quad (7.75)$$

が求まる。

最急降下法で $\nu = \text{一定}$ の条件で鞍点 ζ_s を通る積分路を定めたが、そのかわりに $g = \text{一定}$ の条件を用いれば停留位相法になる。

鞍点法の応用例 — 虚数次の第2種変形ベッセル関数の値 (1982, 太田) 虚数次の第2種変

形ベッセル関数は、不均質半無限弾性体の表面を伝わるレー波の解析に現われる。ベッセル関数の求め方は種々の方法があるが関数の積分表示を利用して値を求めてよい。 p, q を実数として $K_{ip}(q) = \text{Re} \int_0^\infty \exp[-q \cosh t + ipt] dt$,

の表現^[註]を用いる。 t を複素数 ζ に拡張して停留点 ζ_s を求めれば

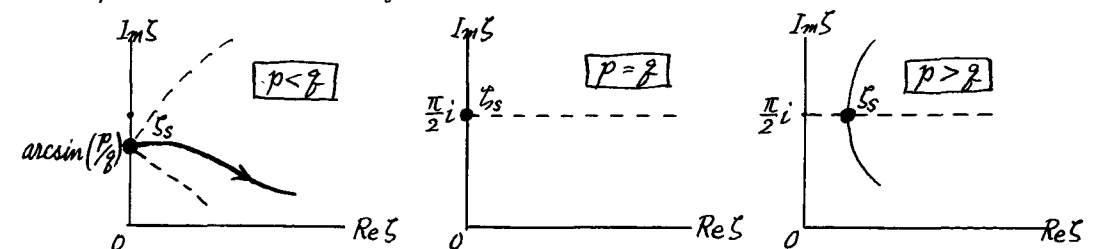
$$\zeta_s = \begin{cases} i \arcsin(p/q) & : (p < q \text{ の時}) \\ i\pi/2 & : (p = q \text{ の時}) \\ \text{arccosh}(p/q) + i\pi/2 & : (p > q \text{ の時}) \end{cases}$$

p, q の大小に応じて図のような積分路をとり、その結果、次の漸近形を得ることが出来る。

$$K_{ip}(q) \sim \sqrt{\pi} (q^2 - p^2)^{-1/4} \exp[-(q^2 - p^2)^{1/2} - p \arcsin(p/q)] \quad , (p < q)$$

$$K_{ip}(q) \sim \sqrt{2\pi} (p^2 - q^2)^{1/4} \exp\left(\frac{-p\pi}{2}\right) \cos\left\{ \frac{\pi}{4} + (p^2 - q^2)^{1/2} - p \ln\left[\frac{p}{q} + \left(\frac{p^2}{q^2} - 1 \right)^{1/2} \right] \right\} \quad , (p > q)$$

$$K_{ip}(p) \sim 1.405257385 \cdot q^{-1/3} e^{-p\pi/2} \quad , (p = q)$$



最急降下法による

停留位相法による

[註] 森口ほか2名「数学公式Ⅲ」岩波書店。

7.6 面外表面荷重を受ける半無限体

直角座標系(x, y)において、半無限弾性体が y ≥ 0 にあるとする。その表面に外力として面外せん断応力

$$\tau_{yz} = \mu T(x) e^{i\omega t}$$

を考える。この時の動的応答を指数型フーリエ変換によって解析する。外力がx座標に独立であるから空間的にはxとyを変数とする二次元問題になる。このせん断力による半空間の運動は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (7.76)$$

によって支配されている。ここに w(x, y, t) はx方向変位である。表面に外力が長時間、一定の強さで作用しているならば定常波動状態になっていると考えられるから、変位は次のように外力と同一の時間因子を分離する形に置ける。

$$w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t} \quad (7.77)$$

したがって式(7.76)は
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_T^2 w = 0 \quad (7.78)$$

になる。ここに
$$k_T = \omega / c_T \quad (7.79)$$

一方、y=0(表面)における境界条件は次のように書ける。

$$\frac{\partial w}{\partial y} = T(x) \quad (7.80)$$

7.6.1 厳密解

式(7.7)の定義にしたがって式(7.78)に指数型フーリエ変換を施せば常微分方程式

$$\frac{d^2 w^*}{dy^2} - (\xi^2 - k_T^2) w^* = 0 \quad (7.81)$$

を得る。また境界条件も変換しておく

$$\frac{dw^*}{dy} = T^*(\xi) \quad (7.82)$$

式(7.81)と(7.82)におけるξはフーリエ変換パラメータである。式(7.81)の一般解は

$$w^*(\xi, y) = A(\xi) \exp[(\xi^2 - k_T^2)^{1/2} y] + B(\xi) \exp[-(\xi^2 - k_T^2)^{1/2} y]$$

ここに A(ξ)とB(ξ)はξの未知関数である。このA(ξ)とB(ξ)を決定するには y=0における条件(式(7.82))と、w(x, y)が y → ∞ で有界である条件を用いる。一般解より w* が y → ∞ で指数関数的に大きくなるためには y に依存しない A(ξ) もしくは B(ξ) の係数を 0 としてそのような項を除けばよい。そこで単に A(ξ) = 0 としては行かない。以下の手順を考えておくことは後ほどの解析の準備となる。

指数部の根号は分岐点 ξ = ±k_T を始点(または終点)とする分岐線(切断線)を入れることによって複素面を一価にする。Re[(ξ² - k_T²)¹/²] がξの実軸上で負にならないように分岐を定めれば、その時に A(ξ) ≡ 0 とすることによって y → ∞ の挙動を有限なものにすることができる。Im[(ξ² - k_T²)¹/²] も後の解析のために検討しておけば時間因子として e^{iωt} を用いたので指数部 [iωt - (ξ² - k_T²)¹/² y] より位相面の移動が時間経過とともに外向きの波(放射波)を表わすはずだから、正の分岐を選ぶ。さて残る未知関数 B(ξ) は境界条件(7.82)を考慮すれば定まり、結局 w* は

$$w^*(\xi, y) = - \frac{T^*(\xi)}{(\xi^2 - k_T^2)^{1/2}} e^{-(\xi^2 - k_T^2)^{1/2} y} \quad (7.83)$$

式(7.8)を用いて逆変換すると

$$w(x, y) = - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T^*(\xi)}{(\xi^2 - k_T^2)^{1/2}} \exp[-i\xi x - (\xi^2 - k_T^2)^{1/2} y] d\xi \quad (7.84)$$

本解析で最も大きな仕事となるのはこの式(7.84)の積分評価である。

分岐点が積分路上(実軸上)にあるから分岐線の選び方について少し詳しく述べる必要がある。そのため時間因子の中の ω を複素周波数 ω = ω₁ + iω₂ に拡張して考えると理解しやすい。ω₂ > 0 ならば、その時の運動は時間とともに減衰

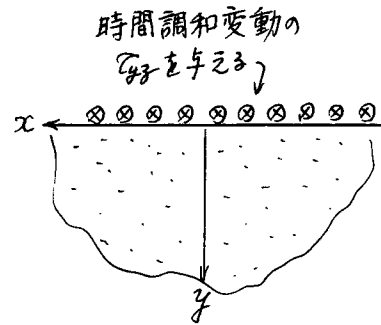


図7.5 面外せん断負荷

するのでこの場合を採用すれば分岐点は図7.6に示すように

$$\xi = \pm \xi_T = \pm \frac{\omega_1 + i\omega_2}{C_T}$$

にある。ここで ω_2 を限りなく 0 に近づけた時、それぞれの分岐点の実軸への接近状態から逆変換積分路は図7.7に示されるように選ぶべきである。前述したように $A(\xi) \equiv 0$ としたから、 $\text{Re } \xi > \xi_T$, $\text{Im } \xi = 0$ の積分路上の $(\xi^2 - \xi_T^2)^{1/2}$ は正の分岐をとっている。式(7.84)を厳密に求めるためには $T(x)$ を具体的に与えなければならぬ。最も代表的なものは $T(x) = \delta(x)$ (集中荷重の場合) であり、これは $T(\xi) = 1$ になるから積分は

$$W(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i\xi x - (\xi^2 - \xi_T^2)^{1/2} y]}{(\xi^2 - \xi_T^2)^{1/2}} d\xi \quad (7.85)$$

さて、ここで $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ (7.86a, b)

とおけば、式(7.85)は

$$W(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-ir\{\xi \cos \theta - i(\xi^2 - \xi_T^2)^{1/2} \sin \theta\}]}{(\xi^2 - \xi_T^2)^{1/2}} d\xi \quad (7.87)$$

この積分値を求める巧妙な手法がある。それは指数関数部が単純な e^{-irs} の形になるように複素 ξ 面上の積分路を変形することである。そこで次式で定まる ξ 面上の積分路を調べる。

$$S = \xi \cos \theta - i(\xi^2 - \xi_T^2)^{1/2} \sin \theta \quad (7.88)$$

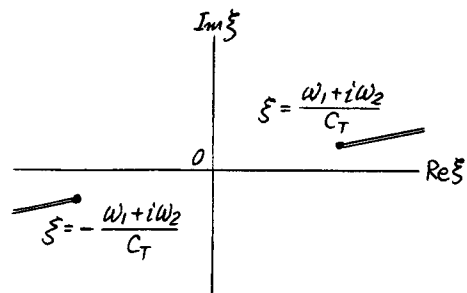


図7.6 複素周波数に対する分岐点

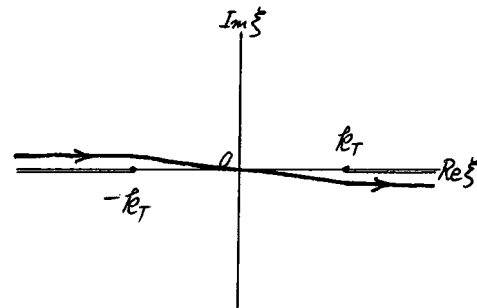


図7.7 ξ面における積分路

式(7.88)を ξ について解けば

$$\xi_{\pm} = S \cos \theta \pm i(S^2 - \xi_T^2)^{1/2} \sin \theta \quad (7.89)$$

この ξ は S をパラメータとして、図7.8に示される双曲線 C_1 と C_2 となる。もし、 $\text{Im}(\xi_{\pm}) = 0$ ならば $S = \xi_T$ であるので双曲線の頂点は $\xi = \xi_T \cos \theta$ によって与えられる。したがって $\theta \neq 0$ の時、双曲線の頂点は原点と分岐点 ξ_T との間にあり、 $\theta = 0$ の時(すなわち表面 $y=0$)は頂点と分岐点が一一致する。双曲線上の動点は実変数パラメータ S を $S = \xi_T$ から $S = \infty$ へ増大して行くと双曲線頂点から上下の無限遠へ移行してゆく。そして

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \left(\frac{\text{Im} \xi_{\pm}}{\text{Re} \xi_{\pm}} \right) = \pm \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \pm \tan \theta$$

となるから双曲線は $\text{Re} \xi$ 軸と角 θ をなす直線に漸近する。実軸に沿う積分を、この双曲線へおきかえるのは容易である。図7.8の回路 ($L_1 + L_2 + R_2 + C_1 + C_2 + R_1$) 内に何の極もなければ、分岐線も横切ってもいいし、また円弧 R_1 と R_2 に沿う積分は $|\xi| \rightarrow \infty$ で 0 になる。したがって(7.87)は

$$\begin{aligned} W(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ir[\xi \cos \theta - i(\xi^2 - \xi_T^2)^{1/2} \sin \theta]}}{(\xi^2 - \xi_T^2)^{1/2}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{C_1 + C_2} (\xi^2 - \xi_T^2)^{-1/2} e^{-irs} ds \\ &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\xi_T}^{\infty} (\xi^2 - \xi_T^2)^{-1/2} \frac{\partial \xi_+}{\partial S} e^{-irs} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{\xi_T} (\xi^2 - \xi_T^2)^{-1/2} \frac{\partial \xi_-}{\partial S} e^{-irs} ds \right\} \quad (7.90) \end{aligned}$$

式(7.89)を用いれば

$$\frac{\partial \xi_{\pm}}{\partial S} = \cos \theta \pm \frac{iS \sin \theta}{(S^2 - \xi_T^2)^{1/2}} \quad (7.91)$$

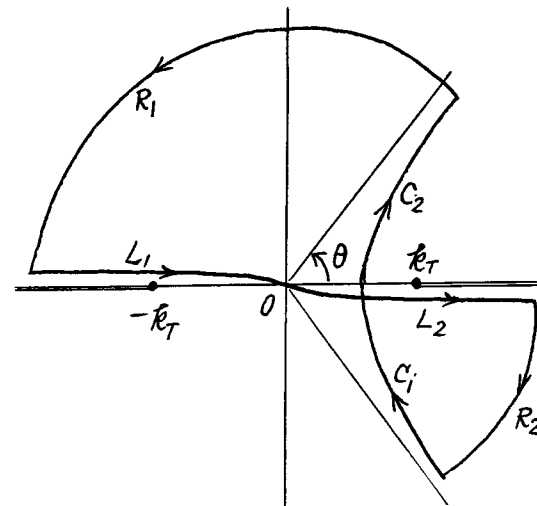


図7.8 ξ面における積分路の変換

$$\text{また} \quad (\xi_+^2 - k_T^2)^{1/2} = -(S^2 - k_T^2)^{1/2} \cos \theta - iS \sin \theta \quad (7.92)$$

$$(\xi_-^2 - k_T^2)^{1/2} = (S^2 - k_T^2)^{1/2} \cos \theta - iS \sin \theta \quad (7.93)$$

そして

$$\frac{\partial \xi_{\pm}}{\partial S} (\xi_{\pm}^2 - k_T^2)^{-1/2} = \mp \frac{1}{(S^2 - k_T^2)^{1/2}} \quad (7.94)$$

式(7.94)を式(7.90)に入れると

$$W(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{k_T}^{\infty} \frac{e^{-iXS}}{(S^2 - k_T^2)^{1/2}} dS \quad (7.95)$$

を得る。 $S = k_T u$ と変換すれば上式より

$$W(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-ik_T u x}}{(u^2 - 1)^{1/2}} du \quad (7.96)$$

式(7.96)の積分は、良く知られた第2種ハネル関数の積分表示を利用すれば^[註3]

$$W(x, y) = \frac{1}{2} i H_0^{(2)}(k_T x) \quad (7.97)$$

7.6.2 漸近表示 展開式(7.44)の第一項をとることにより、 $W(x, y)$ を求める。

式(7.95)を

$$W = -\frac{1}{\pi} \int_{k_T}^{\infty} e^{-iXS} (S - k_T)^{-1/2} g^*(S) dS$$

$$g^*(S) = (S + k_T)^{-1/2}$$

の形に書きかえれば、式(7.44)の漸近条件を満たしているから $x \gg 1$ に対して

$$W \sim \frac{1}{\pi} A_1 \quad \text{[註]}$$

ただし $A_1 = \Gamma(\frac{1}{2}) e^{\frac{1}{2}\pi i(\frac{1}{2}-2)} (2k_T)^{-1/2} (-x)^{-1/2} e^{-ik_T x}$ ^[註2]

したがって

$$W \sim \frac{i}{(2\pi k_T x)^{1/2}} \cdot e^{-i(k_T x - \frac{\pi}{4})} \quad (7.98)$$

を得る。

[註] 式(7.44)との対応関係は $\xi \leftrightarrow S$, $x \leftrightarrow -x$, $b \leftrightarrow \infty$, $a \leftrightarrow k_T$, $u \leftrightarrow \frac{1}{2}$ である。

[註2] ガンマ関数 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, [註3] $H_0^{(2)}(z) = \frac{2i}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-izs}}{(s^2 - 1)^{1/2}} ds$

7.6.3 最急降下法による評価 式(7.84)の近似値を求めるために鞍点法を応用してみる。まず極座標 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を導入すると式(7.84)は

$$W(x, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T^*(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - k_T^2}} e^{-\xi f(\xi)} d\xi \quad (7.99)$$

$$\text{ここに} \quad f(\xi) = i\xi \cos \theta + (\xi^2 - k_T^2)^{1/2} \sin \theta \quad (7.100)$$

鞍点を $f'(\xi) = 0$ の条件より求める。式(7.100)から

$$i \cos \theta + \frac{\xi \sin \theta}{\sqrt{\xi^2 - k_T^2}} = 0 \quad (7.101)$$

上式を満たす ξ は $(-k_T < \xi < k_T)$ の実軸上にある。図7.7に示した分岐(一側の面)では、その領域で

$$(\xi^2 - k_T^2)^{1/2} = i(k_T^2 - \xi^2)^{1/2} \quad (7.102)$$

となるから^[註]これを式(101)に入れてみると式(101)の解は

$$\xi = k_T \cos \theta \equiv \xi_s \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

そして鞍点 ξ_s における微係数は

$$f_0 = i k_T, \quad f_2 = -\frac{i}{k_T \sin^2 \theta}$$

である。式(7.73)より

$$2\theta_s - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \theta_s = \pi/4$$

したがって式(7.75)より $W(x, \theta)$ の近似は

$$W(x, \theta) = \frac{i}{(2\pi k_T x)^{1/2}} \cdot T^*(k_T \cos \theta) \cdot e^{-i(k_T x - \frac{\pi}{4})} \quad (7.103)$$

集中荷重の場合 $T^*(\xi) = 1$ になるから上式は式(7.98)に一致する。この最急降下法により、積分路がどの面をどこを通るか大まかでも検討してみれば関数の性質がわかるので役に立つことが多い。

[註] 時間因子 $e^{i\omega t}$ に対して放射波を構成することより、 i の前の符号が選定される。268頁の $\text{Im}[(\xi^2 - k_T^2)^{1/2}]$ についての議論を見よ。

7.7 時間調和線荷重のラム問題

1904年、H. Lamb によって報告された論文 "On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid" は 弾性波動伝ばの研究分野で、いつまでも色あせない重要な寄与となっている。^[註] その論文は半無限体の表面もしくは内部の動的集中力によって生ずる表面の運動を研究したものである。このラム問題は最近では、より巧みな解法で行われ、解もより詳細に計算されている。また、任意時間依存の負荷に対しても行なうことができる。過渡的応答としての取扱いは第7.11節で議論する。本節では手始めとして、表面に垂直に作用する時間調和線荷重による表面の運動を考える。この問題の境界条件は、 $y=0$ (表面)で

$$\tau_y = -Q \delta(x) e^{i\omega t} \quad (7.104)$$

$$\tau_{yx} = 0 \quad (7.105)$$

である。

7.7.1 平面ひずみ状態を支配する式 外力が z 軸に沿って半無限弾性体の自由表面に垂直に作用する線荷重とすれば、変形は平面ひずみ状態となる。第2章で議論した変位ベクトルの分割を用いれば、平面ひずみの時、変位ベクトル (u, v, w) の (xy) 面成分のみ考え、また、 z による微係数が0となるから、ベクトルポテンシャル ψ は (xy) 面に垂直な方向の成分のみとなる。すなわち $\psi = \psi \mathbf{k}$ である。従って変位成分はポテンシャル ϕ と ψ によって

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (7.106)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7.107)$$

と書ける。ここに ϕ と ψ は次の二次元波動方程式を満たす。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S_L^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (7.108)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = S_T^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7.109)$$

[註] H. Lamb, *Philosophical Transactions of the Royal Society (London)* A208 (1904) P.1

また S_L と S_T は

$$S_L = 1/C_L, \quad S_T = 1/C_T \quad (7.110 a, b)$$

によって定義される波のスローネス(遅度)である。応力成分の ϕ と ψ による表示は

$$\tau_x = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (7.111)$$

$$\tau_y = \lambda \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (7.112)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (7.113)$$

7.7.2 定常解 十分時間の経過して定常状態になったとして、ポテンシャルは次のように時間分離形に表わせるだろう。

$$\phi(x, y, t) = \phi(x, y) e^{i\omega t} \quad (7.114)$$

$$\psi(x, y, t) = \psi(x, y) e^{i\omega t} \quad (7.115)$$

したがって波動方程式(7.108)と(7.109)は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_L^2 \phi = 0 \quad (7.116)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + k_T^2 \psi = 0 \quad (7.117)$$

ただし、 k_L と k_T は

$$k_L = S_L \omega, \quad k_T = S_T \omega \quad (7.118 a, b)$$

それぞれの変位と応力の表式でも $e^{i\omega t}$ が分離されるが時間微分がなく後の解析に関与しなくなるので、この因子を省略して解析する。式(7.111)~(7.113)より

$$\tau_x = \mu \left(-k_T^2 \phi - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (7.119)$$

$$\tau_y = \mu \left(-k_T^2 \phi - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad (7.120)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - k_T^2 \psi - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \quad (7.121)$$

ここで指数型フーリエ変換を x について施せば式(7.116)(7.117)より解として

$$\phi^* = \Phi(\xi) \exp[-(\xi^2 - k_L^2)^{1/2} y] \quad (7.122)$$

$$\psi^* = \Psi(\xi) \exp[-(\xi^2 - k_T^2)^{1/2} y] \quad (7.123)$$

指数関数の根号による多価性は、分岐点 $\xi = \pm k_L$ と $\xi = \pm k_T$ をそれぞれ始点とする分岐線によって解消され、その際分岐線と積分路の対応関係を前節で用いた議論と同様に指定する。すなわち $\omega_2 > 0$ の複素周波数 $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ を考えて $\omega_2 \rightarrow 0$ の極限とすれば図7.9のように配置関係が決まる。また $y \rightarrow \infty$ の有限条件より平方根 $(\xi^2 - k_L^2)^{1/2}$ と $(\xi^2 - k_T^2)^{1/2}$ は、 $\text{Re } \xi > k_L, \text{Im } \xi = 0-$ および $\text{Re } \xi > k_T, \text{Im } \xi = 0-$ のそれぞれに対応した点で正実数にとる。

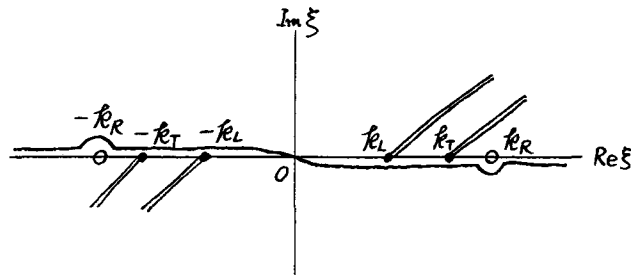


図 7.9. ラム問題の分岐線と積分路

式(7.122)と(7.123)を式(7.120)と(7.121)のフーリエ変換形に代入し境界条件式(7.104)と(7.105)を用いれば $\Phi(\xi)$ と $\Psi(\xi)$ を未知関数とする次の連立式を得る。

$$(2\xi^2 - k_T^2)\Phi - 2i\xi(\xi^2 - k_T^2)^{1/2}\Psi = -\frac{Q}{\mu} \quad (7.124)$$

$$2i\xi(\xi^2 - k_L^2)^{1/2}\Phi + (2\xi^2 - k_T^2)\Psi = 0 \quad (7.125)$$

これを解けば

$$\Phi = -\frac{2\xi^2 - k_T^2}{F(\xi)} \cdot \frac{Q}{\mu} \quad (7.126)$$

$$\Psi = \frac{2i\xi(\xi^2 - k_L^2)^{1/2}}{F(\xi)} \cdot \frac{Q}{\mu} \quad (7.127)$$

$$\therefore F(\xi) = (2\xi^2 - k_T^2)^2 - 4\xi^2(\xi^2 - k_L^2)^{1/2}(\xi^2 - k_T^2)^{1/2} \quad (7.128)$$

式(7.126)(7.127)を(7.122)(7.123)に入れば ϕ^* と ψ^* が求まるので変位と応力の

フーリエ変換形が得られたことになる。次の解析段階として、その逆変換を考える。

変位の指数型フーリエ変換形は(7.106)(7.107)より

$$u^* = -i\xi\phi^* - (\xi^2 - k_T^2)^{1/2}\psi^* \quad (7.129)$$

$$v^* = -(\xi^2 - k_L^2)^{1/2}\phi^* + i\xi\psi^* \quad (7.130)$$

ϕ^* と ψ^* を上式に入れ逆変換を行うと以下のように整理される。

$$u = (I_{uL} + I_{uT}) \frac{Q}{\mu} \quad (7.131)$$

$$v = (I_{vL} + I_{vT}) \frac{Q}{\mu} \quad (7.132)$$

ここに

$$I_{uL} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(2\xi^2 - k_T^2)}{F(\xi)} e^{-i\xi x - (\xi^2 - k_L^2)^{1/2} y} d\xi \quad (7.133)$$

$$I_{uT} = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\xi^2 - k_T^2)^{1/2}(\xi^2 - k_L^2)^{1/2}}{F(\xi)} e^{-i\xi x - (\xi^2 - k_T^2)^{1/2} y} d\xi \quad (7.134)$$

$$I_{vL} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\xi^2 - k_L^2)^{1/2}(2\xi^2 - k_T^2)}{F(\xi)} e^{-i\xi x - (\xi^2 - k_L^2)^{1/2} y} d\xi \quad (7.135)$$

$$I_{vT} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2(\xi^2 - k_L^2)^{1/2}}{F(\xi)} e^{-i\xi x - (\xi^2 - k_T^2)^{1/2} y} d\xi \quad (7.136)$$

ξ 面における積分路を図7.9に示す。 $F(\xi) = 0$ の式は半無限体の自由表面を伝わるレーレ波の議論(第5.11節参照)で調べた。すなわち $F(\xi) = 0$ を満たす実根が存在し式(7.133)~(7.136)においては極になる。 C_R をレーレ波速度とすればその極は

$$\xi = \pm k_R = \omega/C_R$$

で、積分路上にあるから図7.9のように積分路は迂回しなければならない。これらの逆変換の積分を行うことは、前節のせん断荷重のように適当な複素積分路を見つけていたようにうまくいかない。可能な一つの方法は、実軸に沿う積分を、分岐線に沿って回るものと極による寄与とに置き換えることである。 Lamb は $y=0$ (表面)の変位に注目して数値結果を出している。^[註] また分岐線に沿う積分の漸近表示式を示した。

[註] Ewing の本に再掲載されている。

W. M. Ewing, W. S. Jardetzky, F. Press "Elastic Waves in Layered Media" N. Y., McGraw-Hill Book Co. (1957), p.44

$y=0$ における結果のみを引用して示せば以下のようなになる。

$$u = -\frac{Q}{\mu} H e^{i(\omega t - k_R x)} + \frac{Q}{\mu} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{k_L^2}{k_T^2}\right)^{1/2} \frac{e^{i(\omega t - k_T x - \frac{\pi}{4})}}{(k_T x)^{3/2}} - \frac{Q}{\mu} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{k_L^3 k_T^2 (k_T^2 - k_L^2)^{1/2}}{(k_T^2 - 2k_L^2)^3} \cdot \frac{i e^{i(\omega t - k_L x - \frac{\pi}{4})}}{(k_L x)^{3/2}} \quad (7.137)$$

$$v = -\frac{iQ}{\mu} K e^{i(\omega t - k_R x)} + \frac{2Q}{\mu} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{k_L^2}{k_T^2}\right) \frac{i e^{i(\omega t - k_T x - \frac{\pi}{4})}}{(k_T x)^{3/2}} + \frac{Q}{2\mu} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{k_L^2 k_T^2}{(k_T^2 - 2k_L^2)^2} \frac{i e^{i(\omega t - k_L x - \frac{\pi}{4})}}{(k_L x)^{3/2}} \quad (7.138)$$

ここに

$$H = -\frac{k_R \{2k_R^2 - k_T^2 - 2(k_T^2 - k_L^2)^{1/2} (k_T^2 - k_L^2)^{1/2}\}}{F'(k_R)} \quad (7.139)$$

$$K = -\frac{k_T^2 (k_R^2 - k_L^2)^{1/2}}{F'(k_R)} \quad (7.140)$$

ただし

$$F'(k_R) \equiv \left[\frac{dF(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi=k_R}$$

明らかに式(7.137)と(7.138)の最初の項は表面波をあらわしている。二次元の場合これらの波は擾乱点からの距離が大きくなっても幾何学的に減衰することはない。両式の残りの項は x の増加とともに $x^{-3/2}$ のオーダーで減衰してゆく円柱状の体積波 (body wave) である。この他の本問題に関する結果は Ewing らの著書を見られたい。^[前頁註] 前節で用いた手法によって $y \neq 0$ に対する変位の近似式も導くことができよう。

7.8 無限体に急激に作用する線荷重 (= 次元点荷重)

任意時間依存の荷重によって生ずる過渡的な波動解は、時間調和荷重による応答解を積分することによって表現できる。しかし、一般的にはラプラス変換法により解析する方が多く行なわれており、また形式的に波頭など不連続部の取扱いが効果的になされる。以下に、この手法で無限体内の線荷重による過渡応答問題を例に解析してみよう。

右手座標系 (x, y, z) を用いれば集中線荷重は、次のような体積力を分布させることにより表わせる。

$$F = \mathbf{j} Q \delta(x) \delta(y) f(t) \quad (7.141)$$

ここに $f(t)$ は $t < 0$ で恒等的に 0 の関数である。

荷重 F が座標 z に独立で境界面が存在しないか

ら平面ひずみ状態となり、また z に関するすべての場

の導関数は 0 である。この線荷重による応答は $y=0$ の平面に関して反対称である

から^[註] 垂直応力 τ_y は $y=0$ 平面で少なくとも $x \neq 0$ の時 0 となる。そしてまた $y=0$

で x 方向変位も 0 である。これらの考察より、無限体に突然作用する線荷重問題は、

$y \geq 0$ の半空間に対する境界値問題に置きかえられる。その境界条件は $y=0$ で

$$\tau_y(x, 0, t) = -\frac{1}{2} Q \delta(x) f(t) \quad (7.142)$$

$$u(x, 0, t) = 0 \quad (7.143)$$

で与えられる。弾性体は最初静止しているから初期条件として

$$u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0 \quad (7.144)$$

$$\dot{u}(x, y, 0) = \dot{v}(x, y, 0) = 0 \quad (7.145)$$

平面ひずみ状態だから式(7.106)-(7.113)を利用する。解析には第7.2節で定義した変換、すなわち時間について片側ラプラス変換、空間座標 x について両側ラプラス変換を

[註] τ_y は $y < 0$ で圧縮、 $y > 0$ で引張りの反対称分布

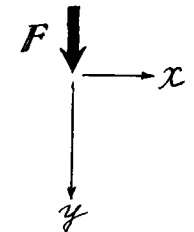


図7.10 無限体に線荷重 (z 方向に - 様である)

用いる。式(7.108)(7.109)に2重にこの積分変換を施せば次の常微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 \bar{\phi}^*}{dy^2} - (S_L^2 p^2 - \zeta^2) \bar{\phi}^* = 0 \quad (7.146)$$

$$\frac{d^2 \bar{\psi}^*}{dy^2} - (S_T^2 p^2 - \zeta^2) \bar{\psi}^* = 0 \quad (7.147)$$

ここに p と ζ は それぞれ片側ラプラス変換と両側ラプラス変換のパラメータである。
 y の大きな正值に対して有界もしくは放射条件を満足する解として

$$\bar{\phi}^* = \Phi(p, \zeta) e^{-(S_L^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} y} \quad (7.148)$$

$$\bar{\psi}^* = \Psi(p, \zeta) e^{-(S_T^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} y} \quad (7.149)$$

ただし、 $1/2$ 乗項は、その実部が正になる分岐を選ぶ。

式(7.106)と(7.112)にラプラス変換を施せば

$$\bar{u}^* = \zeta \bar{\phi}^* - (S_T^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} \bar{\psi}^* \quad \text{[註]} \quad (7.150)$$

$$\bar{c}_y^* = \mu \{ S_T^2 p^2 \bar{\phi}^* - 2\zeta \bar{\phi}^* + 2\zeta (S_T^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} \bar{\psi}^* \} \quad \text{[註2]} \quad (7.151)$$

式(7.148)と(7.149)を(7.150)(7.151)に代入し、境界条件(7.142)と(7.143)を用いる。

$$\zeta \Phi(p, \zeta) - (S_T^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} \Psi(p, \zeta) = 0 \quad (7.150)'$$

$$\mu [(S_T^2 p^2 - 2\zeta^2) \Phi(p, \zeta) + 2\zeta (S_T^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} \Psi(p, \zeta)] = -\frac{1}{2} Q \bar{f}(p) \quad (7.151)'$$

上式を連立させて $\Phi(p, \zeta)$ と $\Psi(p, \zeta)$ を求めれば

[註2] 式(7.112)は $\tau_y = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - 2\mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2\mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$
 $= \mu \left\{ \frac{c_L^2}{c_T^2} S_L^2 \phi'' - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right\}$

$$\frac{c_L^2}{c_T^2} S_L^2 = S_T^2 \text{ だから } \bar{c}_y^* = \mu \{ p^2 S_T^2 \bar{\phi}^* - 2\zeta^2 \bar{\phi}^* + 2(S_T^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} \zeta \bar{\psi}^* \}$$

[註] 式(7.149)より $\frac{\partial \bar{\psi}^*}{\partial y} = -(S_T^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} \bar{\psi}^*$

$$\Phi(p, \zeta) = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\mu S_T^2} \frac{\bar{f}(p)}{p^2} \quad (7.152)$$

$$\Psi(p, \zeta) = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\mu S_T^2} \frac{\bar{f}(p)}{p^2} \frac{\zeta}{(S_T^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2}} \quad (7.153)$$

x 方向変位を少し詳しく調べてみよう。式(7.150)より

$$\frac{2\mu S_T^2}{Q} \bar{u}^* = -\frac{\zeta \bar{f}(p)}{p^2} \left\{ e^{-(S_L^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} y} - e^{-(S_T^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} y} \right\} \quad (7.154)$$

上式の逆変換を考える。たにみ込み等の定理が利用できるとして $\zeta \bar{f}(p)$ を除いて扱えば、まず次式を評価しなければならない。

$$\bar{I}_L = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{p^2} \int_{S_1 - i\infty}^{S_1 + i\infty} e^{\zeta x} e^{-(S_L^2 p^2 - \zeta^2)^{1/2} y} d\zeta \quad (7.155)$$

ここに $-S_L p < S_1 < S_L p$ である。 $S_1 = 0$ として虚軸に沿う積分路をとり、さらに $\zeta = i\xi$ と置換することによって上式は次のようなフーリエ変換積分形になる。

$$\bar{I}_L = \frac{1}{2\pi p^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} e^{-(\xi^2 + S_L^2 p^2)^{1/2} y} d\xi \quad (7.156)$$

フーリエ変換表^[註]を利用して右辺は

$$\bar{I}_L = \frac{S_L}{\pi p} \frac{y}{r} K_1(S_L p r) \quad (7.157)$$

ここに $r^2 = x^2 + y^2$ (7.158)

そして $K_1(\cdot)$ は第一種変形ベッセル関数である。式(7.157)のラプラス逆変換をすれば

$$I_L = \frac{1}{\pi} \frac{y}{r^2} (t^2 - S_L^2 r^2)^{1/2} H(t - S_L r) \quad \text{[註2]} \quad (7.159)$$

[註2] 式(7.157)で $\zeta = S_L r$ とおけば

$$\bar{I}_L = \left(\frac{S_L^2 y}{\pi} \right) \left(\frac{1}{S_L p} \right) K_1(S_L p)$$

[註]の公式集II, 290頁より $\sqrt{t^2 - 1} \cdot H(t - 1) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p} K_1(p) \right]$ を用いればよい。

公式集II, 284頁の定数倍演算より

$$\frac{1}{\zeta} \sqrt{(\zeta/S_L)^2 - 1} \cdot H(t - \zeta) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{S_L p} K_1(S_L p) \right] \text{ これより式(7.159)を得る。}$$

[註] たとは「森口ほか3名「数学公式集II」, 277頁, 岩波書店

式(7.154)の第2項について前述の手順で求める。式(7.155)に対応する積分は

この場合
$$\bar{I}_T = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{p^2} \int_{S_1 - i\infty}^{S_1 + i\infty} e^{s_1 x} e^{-(S_1^2 p^2 - s^2)^{1/2} y} ds \quad (7.160)$$

これは S_L を S_T に置きかえただけだから、式(7.159)より

$$I_T = \frac{1}{\pi} \frac{y}{r^2} (t^2 - S_T^2 r^2)^{1/2} H(t - S_T r) \quad (7.161)$$

もし、 $f(t)$ が ディラックのデルタ関数ならば片側ラプラス変換 $\bar{f}(p)$ は 1 であるから、この時の変位 $u(x, y, t)$ は式(7.154)より次のように定まる。

$$\frac{2\pi\mu S_T^2}{Q} u(x, y, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{y}{r^2} (t^2 - S_L^2 r^2)^{1/2} H(t - S_L r) - \frac{y}{r^2} (t^2 - S_T^2 r^2)^{1/2} H(t - S_T r) \right\} \quad (7.162)$$

x による微分は式(7.154)の右辺に ζ がついていてあるためである。

集中荷重がより一般的な時間の関数となる場合は、片側ラプラス変換のたたみ込みの定理によって、変位 $u(x, y, t)$ を求めることができる。

7.9 Cagniard-de Hoop 法

前節では2つの逆変換積分を一ずつ順に評価したが、この方法は関数が複雑になればなるほど困難となることが多く、そして積分変換表の利用に大きく依存している。式(7.155)と途中結果の式(7.157)と最後の式(7.159)を見れば、式(7.157)は特殊関数が含まれるなど、明らかに I_L の最終式に比べ複雑である。それならば一つの操作で一度に二つの逆変換をするようなもっと効果的な手法はないのだろうか。Lamb はこの可能性に気付いたが、Cagniard によってラプラス変換の応用と関連させて形式的に示され、さらに de-Hoop によって変形され議論された。^[註] Cagniard-de Hoop 法は片側ラプラス変換の初歩的な関係

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\int_{t_1}^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right] = f(t) H(t - t_1) \quad (7.163)$$

に基づいている。

[註] de-Hoop, A.T. "Applied Scientific Research" B8 (1960), 349

Cagniard-de Hoop 法を説明するために前節で議論した無限体の集中荷重問題に立ちかえて考える。ここで次の変数変換を I_L の式(7.155)に用いる。

$$\zeta = p\eta \quad (7.164)$$

ここに片側ラプラス変換パラメータ p は正実数であると仮定する。その結果

$$\bar{I}_L = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{p} \int_{\eta_1 - i\infty}^{\eta_1 + i\infty} e^{-p[(S_L^2 - \eta^2)^{1/2} y - \eta x]} d\eta \quad (7.165)$$

と書ける。ただし $-S_L < \eta_1 < S_L$ である。Cagniard-de Hoop 法の基本となる考えは、両側ラプラス逆変換のための複素 η 面上の積分路を別の新しい積分路に変形し、その時式(7.163)の形に誘導して、片側ラプラス逆変換とむとも行ってしまうものである。式(7.165)は、指数部に注目して

$$(S_L^2 - \eta^2)^{1/2} y - \eta x = t \quad (7.166)$$

とすれば式(7.163)の形になる。この時、 t をある範囲の実数値とするパラメータと考えた時、 η はどのような値に対応するか調べなければならない。そこで η について解けば

$$\eta_{L\pm}(x, \theta, t) = -\frac{t}{r} \cos\theta \pm i \left(\frac{t^2}{r^2} - S_L^2 \right)^{1/2} \sin\theta, \quad (\text{複符号同順}) \quad (7.167)$$

ただし
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (7.168)$$

$$\tan\theta = y/x \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad (7.169)$$

そして正值平方根を採る。いま、

$$\eta_1 = -\frac{t}{r} \cos\theta, \quad \eta_2 = \pm \left(\frac{t^2}{r^2} - S_L^2 \right)^{1/2} \sin\theta$$

よりパラメータ t を消去すれば

$$\frac{\eta_1^2}{\cos^2\theta} - \frac{\eta_2^2}{\sin^2\theta} = S_L^2$$

になる。これは双曲線である。 $\eta_1 < 0$ を考えれば図7.11のように左側のものだけになる。頂点は $\eta = -S_L \cos\theta$ で $t = S_L r$ の時にあたる。 t が大きく

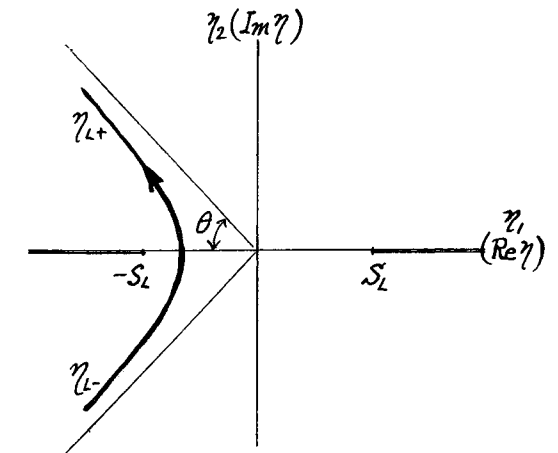


図7.11 Cagniard-de Hoop 積分路。

これは $|\zeta_{\pm}|$ も大きくなり曲線は

$$\frac{\operatorname{Im}(\zeta_{\pm})}{\operatorname{Re}(\zeta_{\pm})} = \mp \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \mp \tan\theta \quad (7.170)$$

の関係に漸近する。このようにパラメータ t は $S_L Y$ から ∞ まで変化させた時、それに対応する双曲線上の動点は頂点から無限遠へ向って移動する。

以上で述べられた双曲線を *Cagniard-de Hoop* 積分路として用いる。式(7.165)の虚軸に平行な積分路をこの積分路に置き換えるのは極も分岐点を横切ることがないので、非常に容易である。式(7.166)あるいは式(7.167)の関係を用いて ζ を t に変数変換すれば、式(7.165)は

$$\bar{I}_L = \frac{1}{p} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\infty}^{S_L Y} \left(\frac{\partial \zeta_-}{\partial t} \right) e^{-pt} dt + \int_{S_L Y}^{\infty} \left(\frac{\partial \zeta_+}{\partial t} \right) e^{-pt} dt \right\} \quad (7.171)$$

ここに
$$\frac{\partial \zeta_{\pm}}{\partial t} = -\frac{\cos\theta}{Y} \pm i \left(\frac{t^2}{Y^2} - S_L^2 \right)^{-1/2} \frac{t}{Y^2} \sin\theta \quad (7.172)$$

したがって、式(7.171)は

$$\bar{I}_L = \frac{1}{p} \frac{\sin\theta}{\pi Y^2} \int_{S_L Y}^{\infty} e^{-pt} \left(\frac{t^2}{Y^2} - S_L^2 \right)^{-1/2} t dt \quad (7.173)$$

ところで、式(7.163)と同様に

$$\mathcal{L}^{-1} \int_{S_L Y}^{\infty} e^{-pt} \left(\frac{t^2}{Y^2} - S_L^2 \right)^{-1/2} t dt = \left(\frac{t^2}{Y^2} - S_L^2 \right)^{-1/2} t \cdot H(t - S_L Y)$$

であるから \bar{I}_L のラプラス逆変換は $\frac{1}{p}$ に関する $\int_0^t dt$ の演算を考慮すれば

$$I_L = \frac{\sin\theta}{\pi Y^2} \int_{S_L Y}^t \left(\frac{t^2}{Y^2} - S_L^2 \right)^{-1/2} \cdot t dt = \frac{\sin\theta}{\pi} \left(\frac{t^2}{Y^2} - S_L^2 \right)^{1/2} \cdot H(t - S_L Y) \quad (7.174)$$

式(7.169)より $\sin\theta = Y/Y$ だから式(7.174)は次のようにも書ける。

$$I_L = \frac{1}{\pi} \frac{Y}{Y^2} (t^2 - S_L^2 Y^2)^{1/2} \cdot H(t - S_L Y) \quad (7.175)$$

同様の手順で、次も求められる。

$$I_T = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{p^2} \int_{\zeta_1 - i\infty}^{\zeta_1 + i\infty} e^{\zeta x} e^{-(S_T^2 p^2 - S^2)^{1/2} y} d\zeta \right\}$$

複素 ζ 面における *Cagniard-de Hoop* 積分路は

$$\zeta_{\pm}(Y, \theta, t) = -\frac{t}{Y} \cos\theta \pm i \left(\frac{t^2}{Y^2} - S_T^2 \right)^{1/2} \sin\theta \quad (7.176)$$

によって与えられる。その結果

$$I_T = \frac{1}{\pi} \frac{Y}{Y^2} (t^2 - S_T^2 Y^2)^{1/2} \cdot H(t - S_T Y) \quad (7.177)$$

特別な場合として $\bar{f}(p) = 1$ とすれば^[註] 変位は式(7.154)より

$$\frac{2\pi\mu S_T^2}{Q} u(x, y, t) = -\frac{\partial}{\partial x} (I_L - I_T) \quad (7.178)$$

式(7.175)(7.177)を代入すれば式(7.162)となる。

7.10 線荷重解に関する結果と考察

式(7.162)の微分を実行して水平方向の変位を求めれば

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\mu S_T^2}{Q} u(x, y, t) &= \frac{xY}{Y^2} \left\{ \frac{2}{Y^2} (t^2 - S_L^2 Y^2)^{1/2} + \frac{S_L^2}{(t^2 - S_L^2 Y^2)^{1/2}} \right\} H(t - S_L Y) \\ &\quad - \frac{xY}{Y^2} \left\{ \frac{2}{Y^2} (t^2 - S_T^2 Y^2)^{1/2} + \frac{S_T^2}{(t^2 - S_T^2 Y^2)^{1/2}} \right\} H(t - S_T Y) \end{aligned} \quad (7.179)$$

式(7.179)は Easonらによって別の手法で出された解に一致する^[註] y 方向の変位および応力などの式も Easonらの論文にある。式(7.179)は波が速度 C_L と C_T で外向きに伝播してゆくさまを示している。波頭は荷重の作用点を中心とした同心円でそれぞれ $C_L t$ と $C_T t$ の半径をもつ。波頭では $t - S_T Y = 0$ 又は $t - S_L Y = 0$ だから変位は特異性を示すが、これは作用荷重の時間依存をディラックのデルタ関数で与えた理想インパルス入力にしたためである。 t が十分大きくなると作用点まわりの変位は式(7.179)より

$$\frac{2\pi\mu S_T^2}{Q} u(x, y, t) \sim \frac{xY}{Y^2} \frac{S_T^2 - S_L^2}{t}$$

を得る。これより時間経過とともに変位が 0 になってゆくことがわかり、デルタ関数状の時間依存なので直観的にもなっとくできるだろう。

[註] G. Eason, J. Fulton, & I. N. Sneddon, *Philosophical Transactions of the Royal Society (London)* **A248** (1956) p.575.

集中線荷重がステップ関数状に時間変動するならば、変位 $u(x, y, t)$ は式(7.179)を時間積分して得られ、その結果は、

$$\frac{2\pi\mu\kappa^2 r^4}{Qxy} u = \begin{cases} 0 & ; r \geq t/S_L \\ \frac{t}{S_L} \left(\frac{t^2}{S_L^2} - r^2 \right)^{1/2} & ; \frac{t}{S_T} \leq r \leq \frac{t}{S_L} \\ \frac{t}{S_L} \left(\frac{t^2}{S_L^2} - r^2 \right)^{1/2} - \frac{\kappa t}{S_L} \left(\frac{t^2}{S_T^2} - r^2 \right)^{1/2} & ; r \leq \frac{t}{S_T} \end{cases}$$

ここに $\kappa = \frac{C_L}{C_T} = \frac{S_T}{S_L}$ である。 [註]

前に引用した Eason らの論文によれば、 y 方向変位は

$$\frac{4\pi\mu\kappa^2 r^2}{Q} v = \begin{cases} 0 & ; r \geq t/S_L \\ \left(1 - \frac{2x^2}{r^2} \right) \frac{t}{S_L} \left(\frac{t^2}{S_L^2} - r^2 \right)^{1/2} + r^2 \ln \left\{ \frac{t}{S_L r} + \left(\frac{t^2}{S_L^2 r^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} & ; t/S_T \leq r \leq t/S_L \\ \left(1 - \frac{2x^2}{r^2} \right) \frac{t}{S_L} \left\{ \left(\frac{t^2}{S_L^2} - r^2 \right)^{1/2} - \kappa \left(\frac{t^2}{S_T^2} - r^2 \right)^{1/2} \right\} + r^2 \log \left\{ \frac{t}{S_L r} + \left(\frac{t^2}{S_L^2 r^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} \\ + \kappa^2 r^2 \log \left\{ \frac{t}{S_T r} + \left(\frac{t^2}{S_T^2 r^2} - 1 \right)^{1/2} \right\} & ; r \leq t/S_T \end{cases}$$

これらを応力ひずみ関係に入れば

$$-\frac{2\pi\kappa^2 r^2}{Qx} \tau_{xy} = \begin{cases} 0 & ; r > \frac{t}{S_L} \\ \frac{2y^2}{r^2} \frac{t}{S_L} \left(\frac{t^2}{S_L^2} - r^2 \right)^{-1/2} - \frac{2}{r^2 S_L} \left(1 - \frac{4y^2}{r^2} \right) \left(\frac{t^2}{S_L^2} - r^2 \right)^{1/2} & ; \frac{t}{S_T} < r < \frac{t}{S_L} \\ \kappa \frac{t}{S_L} \left(\frac{t^2}{S_T^2} - r^2 \right)^{-1/2} - \frac{2y^2}{r^2 S_L} \left\{ \kappa \left(\frac{t^2}{S_T^2} - r^2 \right)^{-1/2} - \left(\frac{t^2}{S_L^2} - r^2 \right)^{-1/2} \right\} \\ + \frac{2}{r^2 S_L} \left(1 - \frac{4y^2}{r^2} \right) \left\{ \kappa \left(\frac{t^2}{S_T^2} - r^2 \right)^{1/2} - \left(\frac{t^2}{S_L^2} - r^2 \right)^{1/2} \right\} & ; r < \frac{t}{S_T} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{[註]} \int_{S_T}^{\tau} \frac{1}{\sqrt{t^2 - S^2 r^2}} dt &= \log \left(\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - S^2 r^2}}{S r} \right) \\ \int_{S_T}^{\tau} \sqrt{t^2 - S^2 r^2} dt &= \frac{1}{2} \left\{ \tau \sqrt{\tau^2 - S^2 r^2} - S^2 r^2 \log \left(\frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - S^2 r^2}}{S r} \right) \right\} \end{aligned}$$

波頭における変位は連続になっている。ここで t を無限大にしてゆくと

$$\tau_{xy} = -\frac{xQ}{2\pi r^2 \kappa^2} \left\{ 1 + \frac{2(\kappa^2 - 1)y^2}{r^2} \right\}, \quad r^2 = x^2 + y^2$$

となる。

問題

- [1] 前頁の τ_{xy} の式を誘導確認せよ。 u, v を求めてから行え。
[2] 本節の場合の σ_x と σ_y を求めよ。

7.11 半空間の過渡的応答

表面の垂直線荷重によって半無限弾性空間に生ずる過渡的な波の研究のしりは前に引用した Lamb の論文にありそれはフーリエ積分を用いて解析したもので任意時間依存の線荷重に対する表面の応答を求めている。本節では Cagniard-de Hoop 法によって表面負荷を受ける弾性半空間の応力を内部の任意点で求めてみる。

境界条件として $t > 0$, $y = 0$ において

$$\tau_y = -Q \delta(x) f(t) \quad (7.180)$$

$$\bar{\tau}_{yx} = 0 \quad (7.181)$$

本問の動的応答を支配する方程式は (7.106) ~ (7.113) で与えられる。弾性体はもともと静止しているとして初期条件式 (7.144) と (7.145) を適用する。時間 t について片側ラプラス変換、空間座標 x について両側ラプラス変換をそれぞれ適用して場の諸量に対する表式を誘導してみる。Cagniard-de Hoop 法を利用するため次のような特別の両側ラプラス変換を考える。

$$f^*(p\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\eta x} f(x) dx \quad (7.182)$$

これに対する逆変換は

$$f(x) = \frac{p}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} e^{p\eta x} f^*(p\eta) d\eta \quad (7.183)$$

すなわち、式 (7.164) の置き換え $s = p\eta$ を今までの両側ラプラス変換の定義に組み入れて再定義した形になっている。このことは後述の代数的取扱いをかなり簡潔にする。

半空間 $y \geq 0$ で用いるポテンシャルの変換形は次の形を採用する。

$$\bar{\phi}^* = \Phi(p, \eta) e^{-p\gamma_L y} \quad (7.184)$$

$$\bar{\psi}^* = \Psi(p, \eta) e^{-p\gamma_T y} \quad (7.185)$$

$$\text{ここに } \gamma_L = (S_L^2 - \eta^2)^{1/2}, \quad \gamma_T = (S_T^2 - \eta^2)^{1/2} \quad (7.186)$$

式 (7.184) (7.185) に対応する変位成分と応力成分の変換形は

$$\bar{u}^* = p\eta \bar{\phi}^* - p\gamma_T \bar{\psi}^* \quad (7.187)$$

$$\bar{v}^* = -p\gamma_L \bar{\phi}^* - p\eta \bar{\psi}^* \quad (7.188)$$

$$\bar{\tau}_x^* = \mu p^2 [(S_T^2 - 2S_L^2 + 2\eta^2) \bar{\phi}^* - 2\eta\gamma_T \bar{\psi}^*] \quad (7.189)$$

$$\bar{\tau}_y^* = \mu p^2 [(S_T^2 - 2\eta^2) \bar{\phi}^* + 2\eta\gamma_T \bar{\psi}^*] \quad (7.190)$$

$$\bar{\tau}_{yx}^* = \mu p^2 [-2\eta\gamma_L \bar{\phi}^* + (S_T^2 - 2\eta^2) \bar{\psi}^*] \quad (7.191)$$

境界条件 (7.180) と (7.181) より、 $\Phi(p, \eta)$ と $\Psi(p, \eta)$ を求めれば

$$\Phi(p, \eta) = -\frac{Q}{\mu} \frac{\bar{f}(p)}{p^2} \frac{S_T^2 - 2\eta^2}{R(\eta)} \quad (7.192)$$

$$\Psi(p, \eta) = -\frac{Q}{\mu} \frac{\bar{f}(p)}{p^2} \frac{2\eta\gamma_L}{R(\eta)} \quad (7.193)$$

$$\text{ここに } R(\eta) = (S_T^2 - 2\eta^2)^2 + 4\eta^2\gamma_L\gamma_T \quad (7.194)$$

次に $\bar{\tau}_y^*$ の逆変換を例にして、その解析的取扱いを考えよう。両側ラプラス変換の逆変換公式 (7.183) を用いれば

$$\bar{\tau}_y = -Q p \bar{f}(p) (\bar{I}_L + \bar{I}_T) \quad (7.195)$$

$$\text{ここに } \bar{I}_L = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{(S_T^2 - 2\eta^2)^2}{R(\eta)} e^{p(\eta x - \gamma_L y)} d\eta \quad (7.196)$$

$$\bar{I}_T = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{4\eta^2\gamma_L\gamma_T}{R(\eta)} e^{p(\eta x - \gamma_T y)} d\eta \quad (7.197)$$

式 (196) (197) はともに $-S_L < \eta_1 < S_L$ で成立する。方程式 $R(\eta) = 0$ は半無限弾性体の表面を伝わる L-L 波のスローネスを与える式となっている (第 5.11 節の式 (5.96) 参照)。したがって $R(\eta) = 0$ は $\eta = \pm S_R = \pm \frac{1}{c_R}$ に 2 つの実根を有する。式 (7.196) (7.197) の積分には $\frac{1}{2}$ 乗根 γ_L と γ_T がともに含まれているので多少複雑にはなるが、ここで Cagniard-de Hoop 法を用いるのが効果的である。その被積分関数は複素 η 面に $\eta = \pm S_L$ と $\eta = \pm S_T$ の分岐点と $\eta = \pm S_R$ の 1 位の極を有している。さて、式 (7.196) の被積分関数は、式 (7.167) によって定まる (t をパラメータとした) 積分路により希望する形

$$\bar{I}_L = \int_{S_L}^{\infty} G_L(x, \theta, t) e^{-pt} dt \quad (7.198)$$

になる。ただし $G_L(x, \theta, t)$ は実軸に関して積分路の対称性から次式で与えられる。

$$G_L(x, \theta, t) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \left[\frac{(S_T^2 - 2\eta^2)^2}{R(\eta)} \right]_{\eta=\eta_{L+}} \frac{\partial \eta_{L+}}{\partial t} \right\} \quad (7.199)$$

\bar{I}_T の被積分関数に対しては式(7.176)によって定まる経路が必要となる。さて、 $\eta_{T\pm}$ によって定まる双曲線の頂点 $\eta = -S_T \cos \theta$ は θ の値によって分岐点 $\eta = S_L$ と $\eta = -S_L$ との間になったりならなかったりする。もし θ が

$$\cos^{-1}(S_L/S_T) \leq \theta \leq \pi - \cos^{-1}(S_L/S_T) \quad (7.200)$$

の範囲ならば図7.12aのようになり、逆変換解は前に述べたようになるだろう。しかし $\theta < \cos^{-1}(S_L/S_T)$ あるいは $\pi \geq \theta > \pi - \cos^{-1}(S_L/S_T)$ ならば分岐線をまわる積分を考慮せねばならない。その $0 < \theta < \cos^{-1}(S_L/S_T)$ の場合の積分経路を図7.12bに示す。弾性変形が $x=0$ に関して対称(左右対称)になるから $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で考えればよい。分岐線を迂回するために付加される積分路は $\eta = -S_L$ を中心とした半径 ϵ ($\epsilon \rightarrow 0$) の円と次式で与えられる二つの線分よりなる

$$\eta_{TL} = -\frac{t}{r} \cos \theta + (S_T^2 - \frac{t^2}{r^2})^{1/2} \sin \theta \pm i\epsilon \quad (7.201)$$

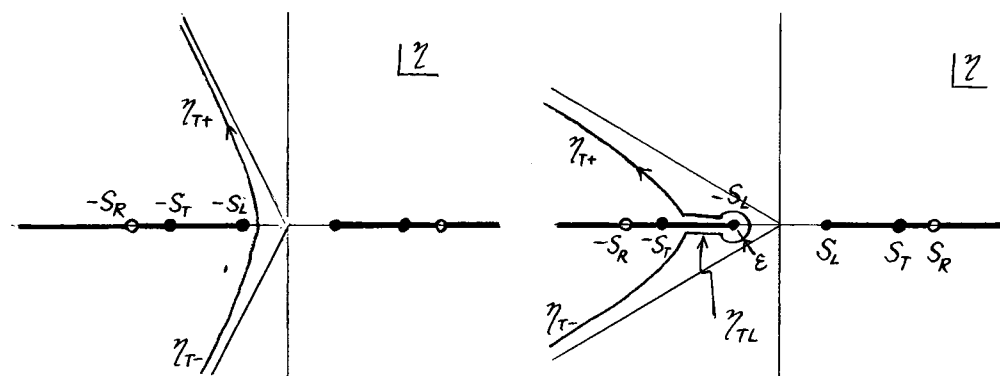


図7.12 η 面の積分経路

t の範囲は η_{TL} を $-S_L$ と $-S_T \cos \theta$ にそれぞれ等しいと置くことによって見い出せる。

その結果
$$t_{TL} \leq t < S_T r \quad (7.202)$$

ここに
$$t_{TL} = S_L r \cos \theta + r (S_T^2 - S_L^2)^{1/2} \sin \theta \quad (7.203)$$

従って積分 \bar{I}_T は次式に変換できる。

$$\bar{I}_T = \int_{t_{TL}}^{S_T r} G_{TL}(x, \theta, t) e^{-pt} dt + \int_{S_T r}^{\infty} G_T(x, \theta, t) e^{-pt} dt \quad (7.204)$$

ここに
$$G_{TL}(x, \theta, t) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \left[\frac{4\eta^2 \chi_L(\eta) \chi_T(\eta)}{R(\eta)} \right]_{\eta=\eta_{TL}} \frac{\partial \eta_{TL}}{\partial t} \right\} \quad (7.205)$$

$$G_T(x, \theta, t) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \left[\frac{4\eta^2 \chi_L(\eta) \chi_T(\eta)}{R(\eta)} \right]_{\eta=\eta_{T+}} \frac{\partial \eta_{T+}}{\partial t} \right\} \quad (7.206)$$

この段階で、演算関係式(7.163)により式(7.198)と(7.204)の逆変換が視察によって行うことができる。式(7.195)に立ちかえて、大きさ $Q f(t)$ の線荷重を作用させた時の応力 $\tau_y(x, y, t)$ の表示を求めて整理してみる。 $x=0$ に関して対称だから θ は 0 から $\pi/2$ までを検討すればよい。その結果は

$$\tau_y(x, y, t) = -Q [(\tau_y)_L + (\tau_y)_{TL} + (\tau_y)_R] \quad (7.207)$$

となる。ただし荷重を作用させてからの経過時間 t やいろいろな θ の範囲における $(\tau_y)_L$, $(\tau_y)_{TL}$, $(\tau_y)_R$ のとりうる関数を表7.1に示す。また波頭模様を図7.13に示す。

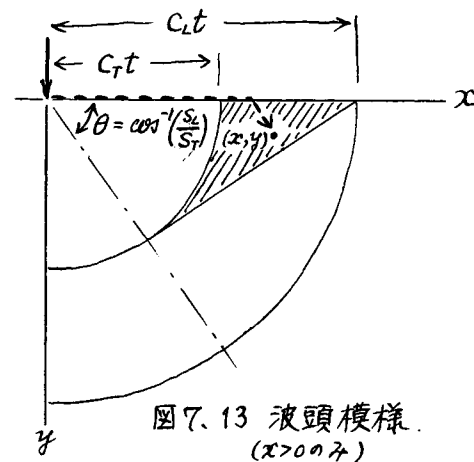


図7.13 波頭模様 ($x > 0$ のみ)

式(7.207)の第1項 $(\tau_y)_L$ が領域 $x < C_L t$ の擾乱を与える。第2項 $(\tau_y)_{TL}$ は図7.13の斜線の領域 $0 \leq \theta \leq \cos^{-1}(S_L/S_T)$ の先頭波 (head waves) であって、縦波(P波)だけでは自由表面の(応力が0となる)境界条件が満たされないでそれを補うために横波(SV波)が表面より生じて重なった応答を与える。 (x, y) の位置に先頭波の波頭が到来するに要する

表 7.1 ; $0 \leq \theta \leq \pi/2$ に対する式(7.207)の各項

t	θ	$(\tau_y)_L$	$(\tau_y)_{TL}$	$(\tau_y)_T$
$t \leq S_L Y$		0	0	0
$S_L Y \leq t \leq t_{TL}$		$\frac{df}{dt} * G_L _{S_L Y}^t$	0	0
$t_{TL} \leq t \leq S_T Y$	$0 \leq \theta \leq \cos^{-1}(\frac{S_L}{S_T})$	$\frac{df}{dt} * G_L _{S_L Y}^t$	$\frac{df}{dt} * G_{TL} _{t_{TL}}^t$	0
	$\cos^{-1}(\frac{S_L}{S_T}) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{df}{dt} * G_L _{S_L Y}^t$	0	0
	$0 \leq \theta \leq \cos^{-1}(\frac{S_L}{S_T})$	$\frac{df}{dt} * G_L _{S_L Y}^t$	$\frac{df}{dt} * G_{TL} _{t_{TL}}^t$	$\frac{df}{dt} * G_T _{S_T Y}^t$
$t \geq S_T Y$	$\cos^{-1}(\frac{S_L}{S_T}) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{df}{dt} * G_L _{S_L Y}^t$	0	$\frac{df}{dt} * G_T _{S_T Y}^t$

[記号] $\frac{df}{dt} * G |_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{df(\tau)}{d\tau} G(x, y, t-\tau) d\tau$

時間は 図 7.13 に破線で示したように 距離 $x-y[(S_T/S_L)^2-1]^{-1/2}$ を縦波が表面に沿って伝わる時間と、内部へ入りこんだ距離 $y[1-(S_L/S_T)^2]^{-1/2}$ を横波が伝わる時間の和になる。 θ を 0 (もしくは π) に近づけると $\eta = S_R$ の極の影響が大きくなり、 $\theta = 0$ の時は、双曲線が分岐線に沿うものになり、この極により応答はレー波の到来した時、 ∞ 大となる。インパルス線荷重に対する数値結果が Forrestal らによって示されている[註] $f(t) = \delta(t)$ の結果を図 7.14 と 図 7.15 に掲げる。水平方向変位 u は横波が到来すると応答が 0 になる。ただしレー波速度で伝わる δ 関数状応答を例外とする。垂直変位 v にレー波速度で伝わる無限大の不連続が存在している。

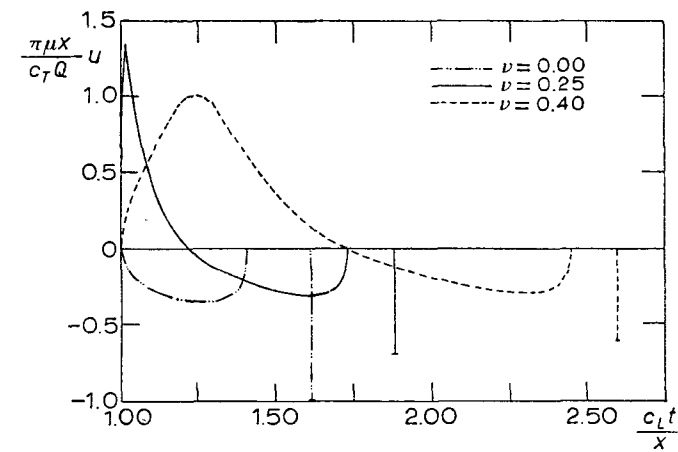


図 7.14 : インパルス表面線荷重による表面の水平方向変位

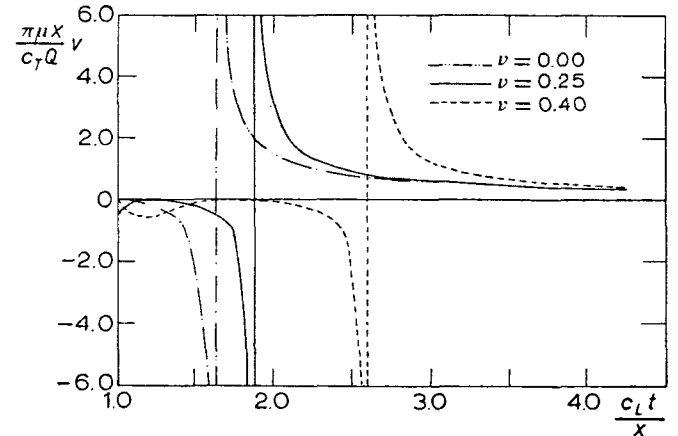


図 7.15 : インパルス表面線荷重による表面の垂直方向変位

[註] M.J. Forrestal, L.E. Fugelsso, G.L. Neidhardt & R.A. Felder, "Proceedings Engineering Mechanics Division Specialty Conference, ASCE (1966), p. 719"

7.12 表面の垂直点荷重による半無限体の過渡応答

Lambの考えのように時間調和荷重の解からパルス荷重解を誘導することもできるが、本節では積分変換法による解析を Pekeris^[註]による手順にしたがって行い、自由表面の変位応答を説明する。具体的には、荷重が任意に時間依存する場合の応答が時間についての線形重ね合せにより求まるので、ステップ衝撃のみに焦点をあわせ、その時の垂直変位を求める。

7.12.1. 解法 $z \geq 0$ の均質等方な半無限弾性体を考える。表面に大きさ

$QH(t)$ の集中垂直荷重が作用するならば

生ずる波動は軸対称となるので 図7.16 のように円柱座標系を用いると便利である。

$z=0$ における境界条件は

$$\tau_{rz} = 0 \quad (7.208)$$

$$\tau_z = -QH(t) \frac{\delta(r)}{2\pi r} \quad (7.209)$$

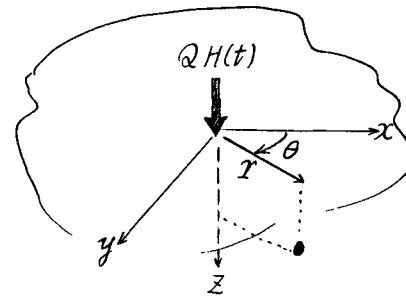


図7.16 円柱座標系と表面点荷重

となる。ここに直角座標系におけるデルタ関数

$\delta(x)\delta(y)$ が、円柱座標系で $\delta(r)/2\pi r$ と表わせることを用いた。軸対称運動ではベクトルポテンシャル Ψ が成分 ψ_θ のみになるので便宜のため ψ_θ を単に ψ と書くことにする。変位ポテンシャル ϕ と ψ は r, z, t の関数であり第2.13節の公式から、

変位ベクトルのポテンシャルによる分解は次式になる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (7.210)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \quad (7.211)$$

[註] C. L. Pekeris, "Proceedings of the National Academy of Sciences (USA) 41 (1955) P. 469.

この2つのポテンシャル ϕ と ψ は次の波動方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (7.212)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{\psi}{r^2} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (7.213)$$

z 軸を回転対称軸とする本問題では、応力変位の関係式として

$$\tau_z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \quad (7.214)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad (7.215)$$

また問題設定のためには初期条件が必要である。もし半空間が $t=0$ 以前で静止状態ならば $r^2 + z^2 > 0$ に対し

$$\phi(r, z, 0) = \dot{\phi}(r, z, 0) = \psi(r, z, 0) = \dot{\psi}(r, z, 0) = 0 \quad (7.216)$$

式(7.208)~(7.216)によって定まる問題を解析するために用いる積分変換は、時間 t についての片側ラプラス変換と半径 r についてのハンケル変換である。ラプラス変換により式(7.212)と(7.213)は次式になる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = \frac{p^2}{C_L^2} \bar{\phi} \quad (7.217)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial z^2} - \frac{\bar{\psi}}{r^2} = \frac{p^2}{C_T^2} \bar{\psi} \quad (7.218)$$

第7.3節で議論したように関数 $f(r)$ の n 次ハンケル変換は

$$f^{(n)}(\xi) = \int_0^\infty f(r) J_n(\xi r) \cdot r dr$$

によって定義される。ここに $J_n(\xi r)$ は n 次の Bessel 関数である。これに対する逆変換は

$$f(r) = \int_0^\infty f^{(n)}(\xi) J_n(\xi r) \xi d\xi \quad (7.219)$$

である。本問では ϕ に対して 0 次のハンケル変換を、また ψ に対しては 1 次のハンケル変換を用いる。それぞれ個別に変換すれば式(7.217)と(7.218)は次の常微分方程

式になる。

$$\frac{d^2 \bar{\phi}^{H_0}}{dz^2} - \alpha^2 \bar{\phi}^{H_0} = 0 \quad (7.220)$$

$$\frac{d^2 \bar{\psi}^{H_1}}{dz^2} - \beta^2 \bar{\psi}^{H_1} = 0 \quad (7.221)$$

$$\text{ここに } \alpha = (\xi^2 + S_L^2 p^2)^{1/2}, \quad \beta = (\xi^2 + S_T^2 p^2)^{1/2} \quad (7.222 a, b)$$

$$\text{そして } S_L = 1/C_L, \quad S_T = 1/C_T$$

z の非常に大きいところで発散しない式(7.220)と(7.221)の適する解は

$$\bar{\phi}^{H_0} = \Phi(\xi, p) e^{-\alpha z}, \quad \bar{\psi}^{H_1} = \Psi(\xi, p) e^{-\beta z} \quad (7.223 a, b)$$

変位と応力にラプラス変換とハンケル変換を施せば

$$\bar{w}^{H_0} = \frac{d\bar{\phi}^{H_0}}{dz} + \xi \bar{\psi}^{H_1} \quad (7.224)$$

$$\bar{u}^{H_1} = -\xi \bar{\phi}^{H_0} - \frac{d\bar{\psi}^{H_1}}{dz} \quad (7.225)$$

$$\bar{\tau}_z^{H_0} = \mu \left\{ (S_T^2 p^2 + 2\xi^2) \bar{\phi}^{H_0} + 2\xi \frac{d\bar{\psi}^{H_1}}{dz} \right\} \quad (7.226)$$

$$\bar{\tau}_{zr}^{H_1} = -\mu \left\{ 2\xi \frac{d\bar{\phi}^{H_0}}{dz} + (S_T^2 p^2 + 2\xi^2) \bar{\psi}^{H_1} \right\} \quad (7.227)$$

$z=0$ (表面)の境界条件、式(7.208)(7.209)は次のように変換される。

$$\bar{\tau}_z^{H_0} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{p} \quad (7.228)$$

$$\bar{\tau}_{zr}^{H_1} = 0 \quad (7.229)$$

$\bar{\phi}^{H_0}$ と $\bar{\psi}^{H_1}$ に対する解形(7.223a)と(7.223b)を(7.226)と(7.227)に代入し、さらに条件(7.228)と(7.229)を考慮すれば、未知関数 $\Phi(\xi, p)$ と $\Psi(\xi, p)$ についての連立式

$$(S_T^2 p^2 + 2\xi^2) \Phi - 2\beta \xi \Psi = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{\mu p}$$

$$-2\alpha \xi \Phi + (S_T^2 p^2 + 2\xi^2) \Psi = 0 \quad \text{を得る。}$$

Φ と Ψ について解けば

$$\Phi = -\frac{Q}{2\pi \mu p} \frac{S_T^2 p^2 + 2\xi^2}{D_H(\xi, p)} \quad (7.230)$$

$$\Psi = -\frac{Q}{2\pi \mu p} \frac{2\alpha \xi}{D_H(\xi, p)} \quad (7.231)$$

$$\text{ただし } D_H(\xi, p) = (S_T^2 p^2 + 2\xi^2)^2 - 4\xi^2 \alpha \beta \quad (7.232)$$

式(7.230)と(7.231)を式(7.223)に入れ、さらに式(7.224)(7.225)に入れれば

$$\bar{w}^{H_0} = \frac{Q}{2\pi \mu} \left\{ (2\xi^2 + S_T^2 p^2) e^{-\alpha z} - 2\xi^2 e^{-\beta z} \right\} \frac{\alpha}{D_H p} \quad (7.233)$$

$$\bar{u}^{H_1} = \frac{Q}{2\pi \mu} \left\{ (2\xi^2 + S_T^2 p^2) e^{-\alpha z} - 2\alpha \beta e^{-\beta z} \right\} \frac{\xi}{D_H p} \quad (7.234)$$

7.12.2 表面の垂直変位 w $z=0$ の表面変位について考える。式(7.233)と

(7.234)を式(7.219)に於てハンケル逆変換形で表現し、さらに $\xi = p\eta$ の置き換

えをすれば

$$\bar{w}(r, 0, p) = \frac{Q}{2\pi \mu} \int_0^\infty \frac{\eta (\eta^2 + S_L^2)^{1/2}}{D(\eta)} J_0(p\eta r) d\eta \quad (7.235)$$

$$\bar{u}(r, 0, p) = \frac{Q}{2\pi \mu} \int_0^\infty \frac{\eta^2 [S_T^2 + 2\eta^2 - 2(\eta^2 + S_L^2)^{1/2} (\eta^2 + S_T^2)^{1/2}]}{D(\eta)} J_1(p\eta r) d\eta \quad (7.236)$$

ここに

$$D(\eta) = (2\eta^2 + S_T^2)^2 - 4\eta^2 (\eta^2 + S_L^2)^{1/2} (\eta^2 + S_T^2)^{1/2}$$

いま、 η に $i\eta$ を代入すればわかるように上式はまさしく線荷重解析で得られた $R(\eta)$ の式(7.194)と同一になる。したがって $D(\eta) = 0$ の根は、第5.11節で議論したレーレ方程式の根に対応するものであるから

$$\eta = \pm i S_R = \pm i / C_R$$

である。 C_R はレーレ波速度。

次にラプラス逆変換を Cagniard-de Hoop 法により評価する。ここでは垂直変位 w のみに注目し、解析の詳細を述べよう。

逆変換を容易にするため ベッセル関数 $J_0(x)$ の積分表示

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi} \text{Im} \int_1^\infty \frac{e^{ixs}}{(s^2-1)^{1/2}} ds$$

を用いる。^[註] これは式(4.71)の誘導でも利用した。垂直変位 w のラプラス変換形は次のようになる。

$$\bar{w}(x, 0, p) = \frac{Q S_T^2}{\pi^2 \mu} \text{Im} \int_0^\infty \frac{\eta(\eta^2 + S_L^2)^{1/2}}{D(\eta)} d\eta \int_1^\infty \frac{e^{ip\eta rs}}{(s^2-1)^{1/2}} ds$$

被積分関数には、複素 η 面の上半分を考えれば $\eta = iS_R$ の極と、 $\eta = iS_L$ と $\eta = iS_T$ の

それぞれに分岐点を有している。正の実軸に沿う積分を 図 7.17 に示す積分経路 Γ に沿うものに変換する。その経路 Γ は虚軸と iS_L, iS_T, iS_R のそれぞれを回る。3つの円弧からなっているが、 iS_L と iS_T まわりの積分値は、その円弧半径を 0 に極限すれば 0 になることが容易に確かめられるだろう。

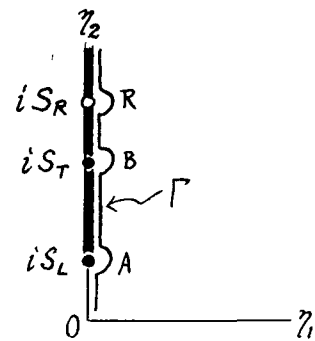


図 7.17 η 面

さらに極 $\eta = iS_R$ まわりの積分も積分値が実数になるので変位 w への寄与はない。したがって虚軸に沿う それぞれ直線部分の積分のみすればよい。ただ多少めんどうにはなるが $\eta = iS_R$ を経由する積分は主値をとらなければならない。虚軸に沿う積分のみになったので $\eta = i\nu$ とおけば

$$\bar{w}(x, 0, p) = -\frac{Q S_T^2}{\pi^2 \mu} \text{Im} \int_0^\infty m(i\nu) \nu d\nu \int_1^\infty \frac{e^{-p\nu rs}}{(s^2-1)^{1/2}} ds$$

ここに $m(\eta) = (\eta^2 + S_L^2)^{1/2} / D(\eta)$

上式の 2 番目の積分がラプラス変換形であるから

$$\mathcal{L}^{-1} \int_1^\infty \frac{e^{-p\nu rs}}{(s^2-1)^{1/2}} ds = \frac{H(t-\nu l)}{(t^2 - \nu^2 l^2)^{1/2}}$$

[註] 森口, ほか 2 名 「数学公式集 III」 181 頁, 岩波書店

また 1 番目の積分には ラプラス変換パラメータが現われないから 前の結果をそのまま代入して 垂直方向変位 w は次のようになる。

$$w(x, 0, t) = -\frac{Q S_T^2}{\pi^2 \mu} \text{Im} \int_0^{t/l} \frac{\nu m(i\nu)}{(t^2 - \nu^2 l^2)^{1/2}} d\nu \quad (7.237)$$

さて、 $m(\eta)$ を η 面の虚軸に沿うそれぞれの区間で調べてみよう。容易に \overline{OA} 上では実数となることがわかる。従って式(7.237)より $(t/l) < S_L$ ならば $w(x, 0, t) \equiv 0$ になる。また次に \overline{AB} 上では

$$m(i\nu) = \frac{i(\nu^2 - S_L^2)^{1/2}}{(S_T^2 - 2\nu^2)^2 + 4i\nu^2(\nu^2 - S_L^2)^{1/2}(S_T^2 - \nu^2)^{1/2}}$$

を得る。残りの $\nu > S_T$ に対応する虚軸に沿う部分では

$$m(i\nu) = \frac{i(\nu^2 - S_L^2)^{1/2}}{(S_T^2 - 2\nu^2)^2 - 4\nu^2(\nu^2 - S_L^2)^{1/2}(\nu^2 - S_T^2)^{1/2}}$$

これらの結果より、自由表面の垂直変位 w は l あるいは t の 3 つの区間で以下のよう導びかれる。

$$t \leq S_L l ; \quad w(x, 0, t) = 0$$

$$S_L l \leq t \leq S_T l ; \quad w(x, 0, t) = -\frac{Q S_T^2}{\pi^2 \mu} F_1(t/l)$$

$$S_T l \leq t ; \quad w(x, 0, t) = -\frac{Q S_T^2}{\pi^2 \mu} \{ F_1(S_T l) + F_2(t/l) \}$$

ここに

$$F_1\left(\frac{t}{l}\right) = \int_{S_L}^{t/l} \frac{\nu(\nu^2 - S_L^2)^{1/2}(S_T^2 - 2\nu^2)^2(t^2 - \nu^2 l^2)^{-1/2}}{(S_T^2 - 2\nu^2)^4 + 16\nu^4(\nu^2 - S_L^2)(S_T^2 - \nu^2)} d\nu$$

$$F_2\left(\frac{t}{l}\right) = \text{Pr} \int_{S_T}^{t/l} \frac{\nu(\nu^2 - S_L^2)^{1/2}(t^2 - \nu^2 l^2)^{-1/2}}{(S_T^2 - 2\nu^2)^2 - 4\nu^2(\nu^2 - S_L^2)^{1/2}(\nu^2 - S_T^2)^{1/2}} d\nu$$

記号 Pr は積分の主値をとることを示す。

7.12.3 $\lambda = \mu$ の特別な場合 $\lambda = \mu$ の時は、 $C_L^2 = 3C_T^2$ あるいは $S_T^2 = 3S_L^2$

になる。したがって $D(\eta) = 0$ の根は具体的に

$$\eta / S_T = \pm i(3 + \sqrt{3})^{1/2} / 2$$

と表わせるので無次元時間の $\tau = t/(S_T Y)$ を用いて半空間表面の変位を書けば

$$\tau \leq \frac{1}{\sqrt{3}} ; w(\tau) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tau < 1 ; w(\tau) = -\frac{Q}{\pi^2 \mu Y} \frac{3}{Y} G_1(\tau)$$

$$1 \leq \tau ; w(\tau) = -\frac{Q}{\pi^2 \mu Y} \frac{3}{Y} \{G_1(\tau) + G_2(\tau)\}$$

こゝに

$$G_1(\tau) = Pr \int_{1/\sqrt{3}}^{\tau} \frac{S(S^2 - \frac{1}{3})^{1/2} (1 - 2S^2)^2}{(\tau^2 - S^2)^{1/2} (3 - 24S^2 + 56S^4 - 32S^6)} dS$$

$$G_2(\tau) = Pr \int_1^{\tau} \frac{S^3(S^2 - 1)^{1/2} (4S^2 - \frac{4}{3})}{(\tau^2 - S^2)^{1/2} (3 - 24S^2 + 56S^4 - 32S^6)} dS$$

この形の解は Pekeris によるもので、さらに解析的に積分を実行している。その結果 $\lambda = \mu$ すなわちポアソン比が 0.25 の場合の垂直変位 w は次のようになる。

$$\tau \leq \frac{1}{\sqrt{3}} ; w(\tau) = 0 \tag{7.238}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tau \leq 1 ; w(\tau) = \frac{Q}{32\pi \mu Y} \left\{ 6 - \frac{\sqrt{3}}{(\tau^2 - \frac{1}{4})^{1/2}} - \frac{(3\sqrt{3} + 5)^{1/2}}{(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \tau^2)^{1/2}} + \frac{(3\sqrt{3} - 5)^{1/2}}{(\tau^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4})^{1/2}} \right\} \tag{7.239}$$

$$1 \leq \tau < \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})^{1/2} ; w(\tau) = \frac{Q}{16\pi \mu Y} \left\{ 6 - \frac{(3\sqrt{3} + 5)^{1/2}}{(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \tau^2)^{1/2}} \right\} \tag{7.240}$$

$$\tau \geq \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})^{1/2} ; w(\tau) = \frac{3Q}{8\pi \mu Y} \tag{7.241}$$

これらの式で $\tau = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})^{1/2}$ は レー波の到来時間である。図 7.18 に垂直変位 $\frac{\pi \mu Y}{Q} w(\tau)$ を無次元時間に対してプロットされている。Y を固定して見れば、この曲線は応答の時間依存性を表わしている。 $t = Y/C_L$ に最初の波がやってくる(点 P)。 $t = Y/C_T$ で変位 $w(\tau)$ の応答曲線は傾斜(微係数)が不連続になる(点 S)。変位は $t = Y/C_R$ で無限大となる(点 R)。ただし C_R は レー波速度。 $t > Y/C_R$ では変位は一定値を保ち、静的解に等しくなる。

積分評価が幾分複雑になるが半径方向変位も同様にして求めることができる。その表式は前に引用した Pekeris の論文に見ることが出来る^[註]。急激にある瞬間に作用して自由表面上を一定速度で直線的に動く移動荷重問題も研究されている。そのような移動点荷重問題を Gakenheimer と Miklowitz^[註2] によって扱われた。接線点荷重による半無限体の過渡的な波動は Chao^[註3] によって研究されている。

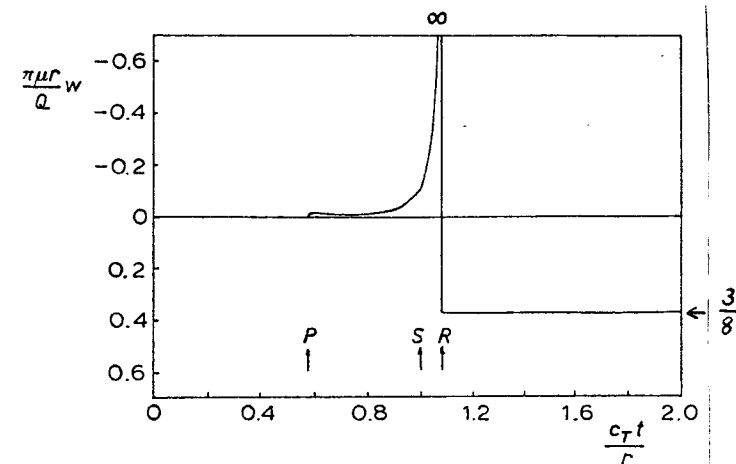


図 7.18 式(7.238)~(7.241)より算出した表面の垂直変位記号の P, S, R はそれぞれ縦波、横波、レー波の到来を示す。

[註] A.C. Eringen & E.S. Suhubi "Elastodynamics II" (1975) Acad Press. pp. 741~752 にも再掲されている。
 { D.C. Gakenheimer & J. Miklowitz, Jour. Appl. Mech., 36(1969) p.505.
 [註2] { D.C. Gakenheimer, Jour. Appl. Mech., 37(1970) p.552
 [註3] C. C. Chao; Jour. Appl. Mech., 27(1960) p.559.

7.13 垂直点荷重によって生ずる表面波

式(7.238)~(7.241)より求まる垂直変位を検討してみれば、自由表面を伝わる最も大きな波はレ-レ波速度で伝播し、また z の増加とともに幾何学的に減衰することがわかる。レ-レ表面波と媒体内部へ広がる体積波とを比べれば減衰の z 依存性より、荷重作用点から十分離れた位置の波動は表面では表面波が支配的になる。これは実験観測的にも確かめられている事実である。解析的には、レ-レ波の効果は逆変換積分の被積分関数に含まれるある極からの寄与に対応している。これらの寄与のみを完全に応答を与える積分表示から取り出すことは困難ではないので、完全解が閉じた解として得られない場合には応答の大きな表面波のみに注目し、その成分のみを与える簡易式を見い出すこともよいだろう。

点荷重に対する半無限体の動的応答を、表面波成分のみによって変位と応力を求めてみる。この試みは Chaoら^[註]によってなされている。式(7.233)と(7.234)に、式(7.21)(7.32)によって定義される形式的な逆変換を適用すれば、変位は

$$w = \frac{Q}{4\pi^2\mu_i} \int_0^\infty J_0(\xi r) \xi d\xi \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} [(2\xi^2 + S_T^2 p^2) e^{-\alpha z} - 2\xi^2 e^{-\beta z}] \frac{\alpha}{D_H} e^{pt} \frac{dp}{p} \quad (7.242)$$

$$u = \frac{Q}{4\pi^2\mu_i} \int_0^\infty J_1(\xi r) \xi^2 d\xi \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} [(2\xi^2 + S_T^2 p^2) e^{-\alpha z} - 2\alpha\beta e^{-\beta z}] \frac{1}{D_H} e^{pt} \frac{dp}{p} \quad (7.243)$$

複素 p 面において、極は $D_H = 0$ の式の 0 点にある。この式は、レ-レ波に対応する 2 つの 0 点をもっている。特別な場合として $\lambda = \mu$ の時、 $C_L^2 = 3C_T^2$ であるからこれらの 2 根を具体的に書き出せば

$$p = \pm \frac{i\xi}{S_T\gamma}, \quad \text{ここに } \gamma = \frac{1}{2}(3+\sqrt{3})^{1/2}$$

留数評価による通常の手法で、レ-レ極による寄与が容易に求められ、そのため

[註] C. C. Chao, H. H. Bleich & J. Sackman, *Jour. Appl. Mech.*, 28 (1961) 300

次の項を考える。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty J_0(\xi r) \xi d\xi \int_{\varepsilon-i\infty}^{\varepsilon+i\infty} \frac{\alpha(2\xi^2 + S_T^2 p^2)}{D_H} e^{-\alpha z + pt} \frac{dp}{p}$$

レ-レ極における評価をすれば

$$I_1 = \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \left[\frac{\alpha(2\xi^2 + S_T^2 p^2)}{p \cdot \partial D_H / \partial p} e^{-\alpha z + pt} \right]_{p = +i\xi/S_T\gamma} d\xi \\ + \int_0^\infty \xi J_0(\xi r) \left[\frac{\alpha(2\xi^2 + S_T^2 p^2)}{p \cdot \partial D_H / \partial p} e^{-\alpha z + pt} \right]_{p = -i\xi/S_T\gamma} d\xi$$

さらに分母は

$$\left[p \cdot \frac{\partial D_H}{\partial p} \right]_{p = \pm i\xi/S_T\gamma} = -\frac{8\xi^4}{\gamma^2\sqrt{3}}$$

いま $\tau = t/S_T\gamma$ として $m = [\tau + i(z/r)(\gamma^2 - \frac{1}{3})^{1/2}]/\gamma$ を導入すると

$$I_1 = -\frac{(3\gamma^2 - 1)^{1/2}(2\gamma^2 - 1)}{4\gamma} \operatorname{Re} \int_0^\infty J_0(\xi r) e^{im\xi r} d\xi$$

ベッセル関数の積分は求めることができるので[註] 次のように書ける。

$$I_1 = \frac{(3\gamma^2 - 1)^{1/2}(1 - 2\gamma^2)}{4\gamma} \cdot \frac{1}{r} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{(1 - m^2)^{1/2}} \right]$$

この結果は Chaoらによって導かれたものに一致する。式(7.242)の第 2 項も、また式(7.243)の 2 つの項と同じく評価できる。このような手順で $w(r, z, t)$ と $u(r, z, t)$ の表面波成分が取り出される。Chaoらによればそれらは

$$w = \frac{Q}{\pi\mu r} \frac{(3\gamma^2 - 1)^{1/2}}{8\gamma} \operatorname{Im} \left[\frac{1 - 2\gamma^2}{(m^2 - 1)^{1/2}} + \frac{2\gamma^2}{(n^2 - 1)^{1/2}} \right] \quad (7.244)$$

$$u = -\frac{Q}{\pi\mu r} \frac{\sqrt{3}}{8} \operatorname{Re} \left[(1 - 2\gamma^2) \left\{ 1 - \frac{m}{(m^2 - 1)^{1/2}} \right\} \right. \\ \left. + 2(\gamma^2 - 1)^{1/2} (\gamma^2 - \frac{1}{3})^{1/2} \left\{ 1 - \frac{n}{(n^2 - 1)^{1/2}} \right\} \right] \quad (7.245)$$

ここに $n = [\tau + i(z/r)(\gamma^2 - 1)^{1/2}]/\gamma$ である。

レ-レ波成分のみを考えたから、以上の近似式は表面近くの浅い所 ($z/r \ll 1$) で、しかもレ-レ波の到来する時間とほぼ等しい近辺 ($\tau \approx \gamma$) のみを対象としたもの

[註] 森口ほか2名「数学公式Ⅲ」, 198頁, 岩波書店。

である。このような制限のもとに、Chaoらは式(7.244)と(7.245)を次のように簡潔な形にまとめた。

$$w = K_1 (\gamma^2 - \frac{1}{3})^{1/2} \text{Im} [(1 - 2\gamma^2) Z_1^{-1/2} + 2\gamma^2 Z_2^{-1/2}] \quad (7.246)$$

$$u = K_1 \gamma \text{Re} [(1 - 2\gamma^2) Z_1^{-1/2} + 2(\gamma^2 - 1)^{1/2} (\gamma^2 - \frac{1}{3})^{1/2} Z_2^{-1/2}] \quad (7.247)$$

ここに

$$K_1 = \frac{Q}{\pi \mu} \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{rZ}\right)^{1/2}$$

$$Z_1 = \frac{r(\tau - \gamma)}{z} + i(\gamma^2 - \frac{1}{3})^{1/2}$$

$$Z_2 = \frac{r(\tau - \gamma)}{z} + i(\gamma^2 - 1)^{1/2}$$

式(7.246)(7.247)より、 $(z/r) \ll 1$ で $\tau \approx \gamma$ の時の応力成分も導くことができる。たとえば $\tau_z(x, z, t)$ を示せば

$$\tau_z = K_2 (2\gamma^2 - 1)^2 \text{Re} [Z_1^{-3/2} - Z_2^{-3/2}] \quad (7.248)$$

ここに

$$K_2 = \frac{Q}{\pi} \frac{\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\gamma}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{r}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{z}\right)^{3/2}$$

その他の成分はChaoらの報告に見られる。変位と応力式にはパラメータ $\tau (= \tau_s r = C_T t / r)$ を用いた。そこで応力 τ_z を例にして、図7.19に $r(\tau - \gamma)/z$ の関数として示す。

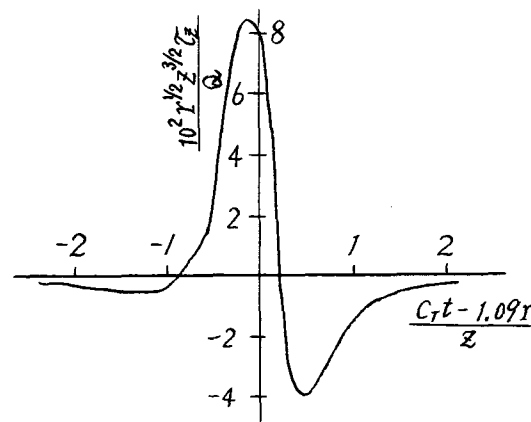


図7.19 表面効果

式(7.246)~(7.248)からわかるように表面効果は距離とともに $r^{-1/2}$ で減衰し、表面波以外の成分が r^{-1} で減衰することと異っている。この現象に対する物理的な解釈は、本問の例から推察できるように表面波が円柱波として拡大するのに対し体積波が球面波で拡がるということである。

7.14. 例題解

7.14.1. ガンマ関数の漸近形 鞍点法を用いて次式で定義されるガンマ関数の $z \gg 1$ における漸近形を求める。

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

$t = zS$ とおけば上式は

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-zS} (zS)^{z-1} z dS = z^z \int_0^\infty e^{-zS} S^{z-1} dS = z^z \int_0^\infty e^{-zS + z \log S} \frac{1}{S} dS$$

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty e^{-z(S - \log S)} \frac{1}{S} dS$$

ここで $f(s) = s - \log s$ として $f'(s) = 0$ より鞍点を求めれば

$$f'(s) = 1 - \frac{1}{s} = 0, \quad s = 1$$

鞍点近傍で $f(s)$ を級数展開すれば $f(s) = 1 + \frac{1}{2}(s-1)^2 + \dots$

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty e^{-z(1 + \frac{1}{2}t^2)} dt \approx z^z \int_{-\infty}^\infty e^{-z(1 + \frac{1}{2}t^2)} dt = z^z e^{-z} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{z}{2}t^2} dt$$

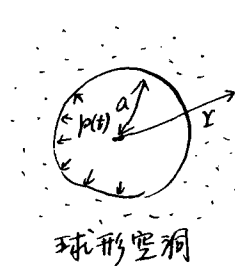
$t = z^{-1/2}(s-1)$

いま $\sqrt{\frac{z}{2}}t = \mu$ とおきかえれば

$$\Gamma(z) = z^z e^{-z} \sqrt{\frac{z}{2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\mu^2} d\mu = z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi}$$

以上より $\Gamma(z) \sim z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \sqrt{2\pi}$, ($z \gg 1$) 【スターリングの公式】

7.14.2 球形空洞内の衝撃圧による無限体の応答 第4.3節でも扱ったが、ここでは時間に対する片側ラプラス変換を用いて解く組織立った方法を考えよう。場を反



配する方程式は点対称性より

$$\left. \begin{aligned} \tau_r &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + 2\lambda \frac{u}{r} \\ \tau_\theta &= \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + 2(\lambda + \mu) \frac{u}{r} \end{aligned} \right\} ; \text{応力成分 (a)}$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad ; \text{変位成分} \quad (b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\phi) \quad ; \text{波動方程式} \quad (c)$$

となる。そして問題を決定するための境界条件は初期静止の条件とともに

$$r=a, \quad t \geq 0 \text{ において } \tau_r = -p(t) \quad (d)$$

$$r \geq a, \quad t < 0 \text{ において } u(r, t) = \dot{u}(r, t) = 0 \quad (e)$$

式(c)をラプラス変換し、(e)の条件を考慮すれば

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\bar{\phi}) = \frac{s^2}{c_L^2}(r\bar{\phi}) \quad (f)$$

式(b)を式(a)に入れ、 τ_r をラプラス変換すれば

$$\bar{\tau}_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial r^2} + 2\lambda \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \quad (g)$$

式(d)をラプラス変換して求めれば $\bar{\tau}_r = -\bar{p}(s)$

式(f)の一般解 $\bar{\phi} = A \cdot \frac{1}{r} \exp[-(s/c_L)r]$ (h)

これを式(g)に入れて整理すれば

$$\bar{\tau}_r = A \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{c_L^2} s^2 + \frac{4\mu}{r c_L} s + \frac{4\mu}{r^2} \right) e^{-(s/c_L)r} \quad (i)$$

$r=a$ において式(h)が成り立つから式(i)のAは

$$A = -\frac{a^3}{4\mu} \left(1 + \frac{a}{c_L} s + \frac{a^2}{4c_L^2} s^2 \right)^{-1} \bar{p}(s) e^{(s/c_L)a} \quad (k)$$

式(k)を式(i)に代入し、

$$\bar{\phi} = -\frac{a^3}{4\mu r} \left\{ \frac{\bar{p}(s) e^{-(s/c_L)(r-a)}}{1 + \frac{a}{c_L} s + \frac{a^2}{4c_L^2} s^2} \right\} \quad (l)$$

次に $r=a$ の内壁で変動する荷重を具体的に与えてみる。内圧がステップ関数で与えられるとすれば $\bar{p}(s) = \frac{1}{s}$ である。このとき式(l)をラプラス逆変換すれば

$$\phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \left(-\frac{a^3}{4\mu r} \cdot \frac{1}{s} \right) \frac{e^{-(s/c_L)(r-a)}}{1 + \frac{a}{c_L} s + \frac{a^2}{4c_L^2} s^2} e^{st} ds$$

$$\phi = \frac{1}{2\pi i} \left(-\frac{a c_T^2}{\mu r} \right) \int_{\eta-i\infty}^{\eta+i\infty} \frac{1}{s} \frac{1}{(s-s_1)} \frac{1}{(s-s_2)} e^{\tau s} ds \quad (m)$$

$$\therefore s_{1,2} = -\left(\frac{2c_T^2}{a c_L} \right) \pm i \left(\frac{2c_T^2}{a} \right) \sqrt{\left(\frac{1}{c_T} \right)^2 - \left(\frac{1}{c_L} \right)^2}$$

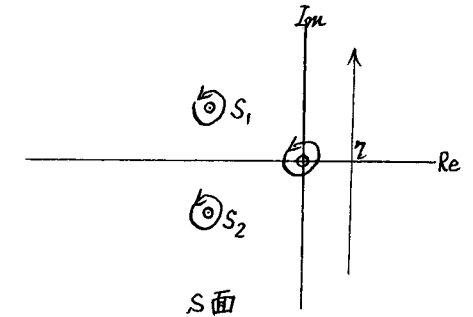
$$\tau = t - [(r-a)/c_L] > 0$$

1位の極が $s=0, s_1, s_2$ にあるので、それぞれの留数計算をして積分値を求める。

$$\text{Res}(0) = \frac{1}{s_1 s_2}$$

$$\text{Res}(s_1) = \frac{1}{s_1(s_1-s_2)} e^{\tau s_1}$$

$$\text{Res}(s_2) = \frac{1}{s_2(s_2-s_1)} e^{\tau s_2}$$



になるから式(m)は

$$\phi = -\frac{a c_T^2}{\mu r} \left(\frac{1}{s_1 s_2} + \frac{e^{\tau s_1}}{s_1(s_1-s_2)} + \frac{e^{\tau s_2}}{s_2(s_2-s_1)} \right) \quad (n)$$

ここで $s_1 = \xi + i\zeta, s_2 = \xi - i\zeta$ において整理すれば虚部が打消し合って

$$\phi = -\frac{a c_T^2}{\mu r (\xi^2 + \zeta^2)} \left[1 + \frac{e^{\tau \xi}}{\xi} (\xi \sin \tau \zeta - \zeta \cos \tau \zeta) \right] \quad (\tau > 0) \quad (o)$$

($\tau < 0$ では $\phi = 0$)

ところで $\xi^2 + \zeta^2 = \left(\frac{2c_T^2}{a c_L} \right)^2 + \left(\frac{2c_T^2}{a} \right)^2 \left\{ \left(\frac{1}{c_T} \right)^2 - \left(\frac{1}{c_L} \right)^2 \right\} = 4c_T^2/a^2$ になるから

$$\phi = -\frac{a^3}{4\mu r} \left\{ 1 + e^{\tau \xi} \sqrt{\left(\frac{\xi}{\zeta} \right)^2 + 1} \cdot \sin(\tau \zeta + \gamma) \right\} H(\tau) \quad (p)$$

$$\text{ただし } \gamma = -\cot^{-1}(\xi/\zeta)$$

また $\xi = -\frac{2c_T^2}{a c_L} = -\frac{c_L}{a} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right), \zeta^2 = \left(\frac{4c_T^4}{a^2} \right) \left(\frac{1}{c_T^2} - \frac{1}{c_L^2} \right) = \frac{c_L^2}{a^2} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \right)^2$ となる

それぞれを $-\alpha, \beta^2$ とおけば本問のステップ内圧に対するポテンシャル解は

$$\phi = -\frac{a^3}{4\mu r} \left[1 - (2-2\nu)^{1/2} e^{-\alpha \tau} \sin(\beta \tau + \gamma) \right] H(\tau) \quad (q)$$

となる。これは式(4.42)に一致する。

7.14.3 剛球介在物のねじり振動による弾性波

右図のように無限体中の球形剛体介在物がz軸まわりにねじり振動している時、周囲弾性体に生ずる動的な変形場を解析する。

半径をa, ねじり回転角の振幅をφ₀とすれば境界条件は

$$(W)_{r=a} = a \phi_0 \sin \theta \cdot e^{i\omega t} \quad (a)$$

の場合を考える。変位場を支配する基礎式は変位ベクトル **u** を用いて一般表示すれば

$$G \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + G) \text{grad}(\text{div} \mathbf{u}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (b)$$

となるが r, θ, φ の各座標方向変位成分のうち φ 方向の w のみが恒等的に 0 とならないことに注意すれば式(b)は

$$\text{div} \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot v) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} = 0$$

$$\therefore u = v = 0, \frac{\partial}{\partial \phi} (\cdot) = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nabla^2 u - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot v) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} \\ \nabla^2 v - \frac{v}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \phi} \\ \nabla^2 w - \frac{w}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nabla^2 w - \frac{w}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

従って

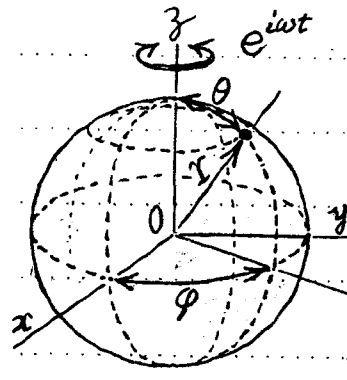
$$G \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial w}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}) - \frac{w}{r^2 \sin^2 \theta} \right] = \rho \ddot{w} \quad (c)$$

次に解形として $w = W(r) \cdot \sin \theta \cdot e^{i\omega t}$ (d)

とおいて変数分離する。式(c)より

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \left[k^2 - \frac{2}{r^2} \right] W = 0 \quad ; \quad k = \omega / c_T \quad (e)$$

式(e)は球ベッセルの微分方程式になっている。上式の解として、 $e^{i\omega t}$ に対し無限



球座標系

遠で放射波となることより第2種ハッケル関数 $h_1^{(2)}(kr)$ を採用する。

$$W = A h_1^{(2)}(kr) = -A \frac{kr - i}{(kr)^2} \cdot e^{-i kr}$$

$$\text{従って } w = -A \frac{kr - i}{(kr)^2} e^{-i(kr - \omega t)} \sin \theta \quad (f)$$

境界条件式(a)より

$$A = a \phi_0 \frac{-(ka - i)}{\beta a - i} e^{i\beta a} \quad (g)$$

以上より

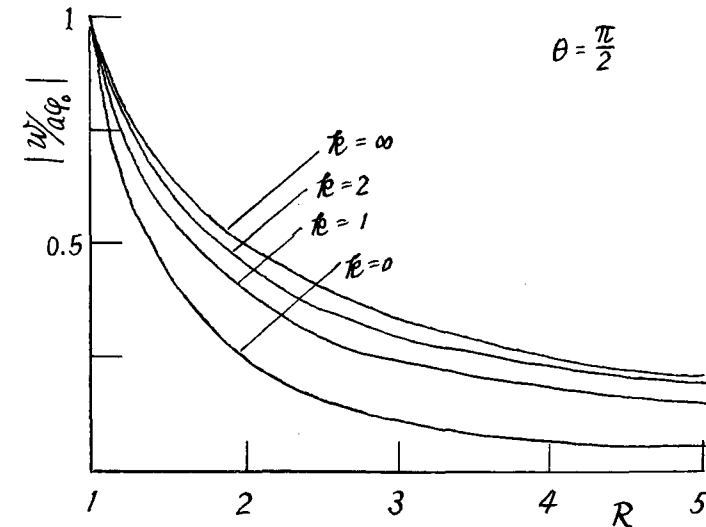
$$w = a \phi_0 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \frac{kr - i}{ka - i} \exp\{-i[\beta(r - a) - \omega t]\} \sin \theta \quad (h)$$

変位の振幅に注目する

$$|w| = a \phi_0 \left(\frac{a}{r} \right) \sin \theta \left| \frac{kr - i}{ka - i} \right| = a \phi_0 \frac{\sin \theta}{R^2} \left(\frac{R^2 K^2 + 1}{K^2 + 1} \right)^{1/2} \quad (i)$$

$$\text{ただし } R = r/a, \quad K = ka = \omega a / c_T$$

得られた式(i)より、 $\omega a / c_T$ が小さい時は振幅は $1/r^2$ で減衰し、大きい時は $1/r$ で減衰することが確認できる。下図は $\theta = \pi/2$ における変位振幅の分布である。



周囲弾性体に生ずる振幅。(1981大特)

問 題

[51] 初期静止状態の半無限弾性体の表面に、空間的に一様な圧力 $p(t)$ が作用するとき生ずる波動は第1.3節で解析した。その問題を時間に関する片側ラプラス変換により解析し、一致することを確認せよ。

[52] 無限体内の線荷重 $F = jQ\delta(x)\delta(y)\sin\omega t$ による定常変位応答を座標 x に関する指数フーリエ変換を用いて求めよ。そのとき

- (a) 逆変換積分を解析的に行って厳密解を求めよ。
- (b) また、その積分を最急降下法を用いて近似評価せよ。

[53] 面外せん断線荷重を受ける無限体の水平偏向運動を考える。その運動方程式は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \delta(x)\delta(y)f(t) = \frac{1}{C_T^2} \ddot{w}$$

で与える。 $f(t)$ は時間の関数として波源の強さが変化することを示す。また、 t が負の時 $f(t) \equiv 0$ であり、媒体が静止しているとする。この問題を Cagniard-de Hoop 法により解いて $w(x, y, t)$ を求めよ。

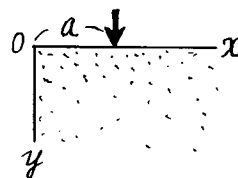
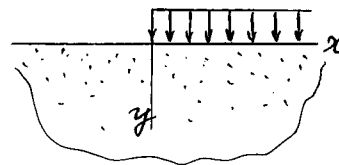
[54] 次のような表面圧力を受ける半無限弾性体の変位成分 v を、 x の負なる表面 ($x < 0, y = 0$) で求めよ。

$$\begin{aligned} (\tau_y)_{y=0} &= -\tau_y H(x) f(t) \\ (\tau_{yx})_{y=0} &= (\tau_{yz})_{y=0} = 0 \end{aligned}$$

[55] 頂角から a の距離に集中荷重を受ける四半分体(右図)がある。 $x=0$ の面の境界条件として

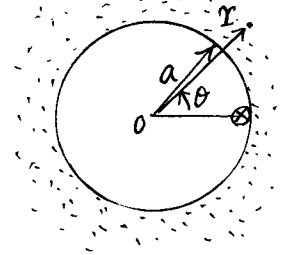
$$(\tau_{xz})_{x=0} = (\tau_{xy})_{x=0} = 0 \quad \text{そして} \quad (u)_{x=0} = 0 \quad \text{ならば}$$

頂角 ($x=y=0$) における垂直変位はどうか、ポアソン比を 0.25 とし求めよ



[56] 初期静止の無限体が点荷重を受けている。問題を円柱座標で扱い、半径方向変位を Hankel 変換と片側ラプラス変換を用いて求めよ。逆変換は Cagniard-de Hoop 法で行い、その結果を問題[13]の式と照合してみよ。

[57] 無限体内に半径 a の円孔があり、内壁の $r=a$ に周にわたって一様なせん断力が作用する。すなわち $(\tau_{\theta z})_{r=a} = \tau_0 \delta(z) H(t)$, $(\tau_r)_{r=a} = (\tau_z)_{r=a} = 0$ のとき初期静止条件のもとで (i) 波動が周方向変位 $v(r, z, t)$ のみになることを示し、(ii) 積分変換法で問題を解け。

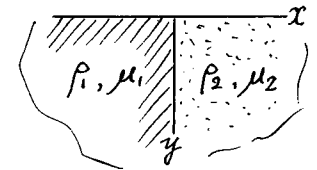


[58] 無限体内の円孔内壁に面外せん断力が作用している。境界条件 $(\tau_{rz})_{r=a} = \tau_0 \delta(\theta) H(t)$, $(\tau_r)_{r=a} = (\tau_{\theta z})_{r=a} = 0$ と初期静止の条件で面外変位 $w(r, \theta, t)$ を求めよ。

(ヒント) $\theta=0$ は対称面になる。

[59] $\frac{1}{4}$ 弾性体が $x=0$ で完全接合されている(右図)。

$$\begin{aligned} \text{また表面}(y=0) \text{で} \quad x \leq 0, \quad (\tau_{yz})_{y=0} &= T_1 H(t) \\ x \geq 0, \quad (\tau_{yz})_{y=0} &= T_2 H(t) \end{aligned}$$



の外力が作用する。この時、以下のことを確かめよ。

$$\eta = \frac{\gamma}{(C_T)_2 t}, \quad m = \frac{(C_T)_1}{(C_T)_2}, \quad k = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

を定義すれば $x=0$ における界面応力は $0 < \eta \leq m c$

$$\frac{\pi}{2} \frac{\tau_{xz}}{T_1} = -C \ln \frac{1+(1-\eta^2)^{1/2}}{\eta} + U + C k \ln \frac{m+(m^2-\eta^2)^{1/2}}{\eta} - \frac{C k (a^2-b^2)}{2b(1-b^2)^{1/2}} \left\{ \sin^{-1} \frac{m\eta+b\eta}{m+b\eta} + \sin^{-1} \frac{m\eta-b\eta}{m-b\eta} \right\}$$

$m \leq \eta \leq 1$ では

$$\frac{\pi}{2} \frac{\tau_{xz}}{T_1} = -C \ln \frac{1+(1-\eta^2)^{1/2}}{\eta} + U$$

$$\text{ただし} \quad a^2 = \frac{k m^2 - 1}{k - 1}, \quad b^2 = \frac{k^2 m^2 - 1}{k^2 - 1}, \quad C = \frac{k - 1}{k^2 - 1}, \quad \eta = \frac{T_2}{T_1}$$

$$U = \frac{C(a^2-b^2)}{2b(m^2-b^2)^{1/2}} \left\{ \sin^{-1} \left(\frac{b+m\eta}{m+b\eta} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{b-m\eta}{m-b\eta} \right) \right\}$$

また、 $\eta=0$ における特異性を調べよ。

第 8 章

弾性単層と弾性柱における衝撃波

8.1 概説

無限体の解析で説明したような比較的簡単でしかも巧みな手法をそのまま有限体の問題に用いることは多くの場合不可能である。それは境界面による反射波が縦波と横波の連成によって構成されるためである。ただ、例外として SH 波による面外変形波の問題や、物理的に現実性に乏しくなるが応力と変位をある組合せで境界条件を与える問題などで、丁度、反射境界面が対称面となって無限体の解析になる場合がある。^[註] しかしながらこのような対称性を与える条件は近似的にしか成り立たないと考えるのが自然だから弾性板や梁のような単純な形状であっても無限回の反射によって導波される衝撃波を弾性力学的に厳密に求めることは大変難しい問題である。

有限弾性体の衝撃波による応答の解析可能性について述べれば、ある限定された条件下でのみ可能である。具体的には、非常に時間の短い瞬間の応答(短時間応答)、あるいは外乱もしくは波源から非常に離れた遠方場で、しかも十分時間経過した時の応答(遠方場応答)、あるいは時間は任意でよいが乱れの受けている領域と乱れの受けてない領域を分ける波頭近辺の応答(波頭応答)に対してなされている。短時間解(short-time solutions)は、その時間内に起るいくつかの反射波を追跡する形でなされ、遠方場解(far-field solutions)は板や棒などの導波体断面にわたった定常振動変形の様式(モード)を組み合わせ得られる。もし、全域に対する応答解を求めるとするならばそれぞれの領域に適した解の合成によって得ることになるだろう。従来の研究に関するレビューは、平面ひずみ状態にある弾性単層の衝撃問題として短距離場と遠方場の解析について、Miklowitz^[註2]が行っている。

[註] 第3.11節参照

[註2] J. Miklowitz, IN: Wave propagation in solids, ed by J. Miklowitz, ASME pub. ser. (1969), p. 44

本章では弾性単層と円柱内の衝撃弾性波を考える。まず有限寸法をもつ弾性体の解析的な取扱いを理解するために、二種類の波の連成しない面外変形せん断波を考えよう。これは、ただ一つの変位成分に対する解析となるので導波体としてはたらく単層の応答状態がつかみ易く、解析の見通しはよいはずである。次に、縦波と横波の連成する問題として、面内変形波による単層の応答解析と軸対称波による円柱の応答解析について述べる。

8.2 弾性単層の面外変形せん断運動

直角座標系 (x, y, z) で、図 8.1 のように弾性単層が $x \geq 0$, $-h \leq y \leq h$, $-\infty < z < \infty$ の領域を占めるものとする。その上下両表面が自由面とすれば

$$y = \pm h \text{ で } \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \equiv 0 \quad (8.1)$$

また、 $x=0$ の端面に次のような時間変動せん断力を仮定する。

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} = T(y)f(t) \quad (8.2)$$

ただし $f(t) \equiv 0$; $t < 0$ として負荷を受ける以前は単層は静止しており

$$w(x, y, 0) = \dot{w}(x, y, 0) \equiv 0 \quad (x > 0)$$

の初期条件を加える。この問題は 3.11 節や図 3.3 で説明した様に対称性を考慮することによって線荷重応答解から求めることができる。境界条件を対称性によって満たす手法によれば波源の像波源を次々と重ね合わせることになるので解が級数形になるが有限時間では有限級数となる。その級数の第 2 項以後は境界からの反射波を表わし、反射回数の少ない短い時間ほど項数が少なくなる。この取扱いは短時間応答の解析の一つである。

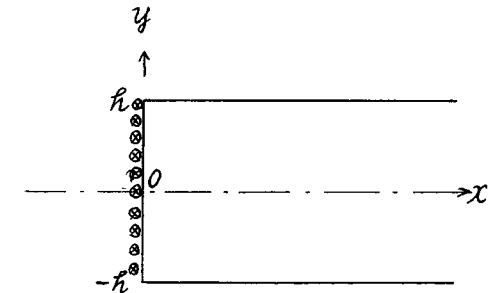


図 8.1 単層に面外変形負荷

弾性単層の厚さ方向(y方向)に分布する場の量(変位や応力など)を三角関数で表わして、 $y = \pm h$ の表面の境界条件を満たすように選び、これらの重ね合せによって端面条件を近似することができる。この手法は時間調和な波の重ね合せ、あるいは変形モードの重ね合わせであって、形式的にはフーリエ変換による解法と等価である。

8.2.1 定常状態の調和運動 第6章で述べた事柄は導波体内を伝わる波の各々の単一モードに関するものであるから、そのような個々の運動モードを生じさせる外力が非常に特殊な場合にあたる。たとえば単層の面外せん断変形運動の対称モードを考えてみよう。

$$w_n = A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{2h}\right) \cdot \exp[i(k_n x - \omega t)] \quad (8.3)$$

ここに $n = 0, 2, 4, \dots$ として

$$k_n = \left[\left(\frac{\omega}{c_T}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2 \right]^{1/2} \quad (8.4)$$

式(8.3)は、 $x=0$ の端面に、 $e^{-i\omega t}$ で時間変動し、かつ厚さにわたって $\cos(n\pi y/2h)$ で分布する変位を与えた時の単層に生ずる定常波動場になっている。この特別の負荷によって生ずるモードがxの正方向に減衰しないで伝わるかどうかは k_n が実数か虚数かによる。すなわち、 ω, n, c_T, h に依存しており[式(8.4)参照] 動的負荷を与えたからと言って波が必ず伝ばする訳ではないことがわかる。もし端面負荷が $\cos(n\pi y/2h)$ の形で厚さ方向に分布しないもの、あるいは三角関数的モード関数に一致しない時は、フーリエ級数形にして各項に対応する波動場の重ね合せとしなければならない。すなわち無限個のモードの和として考えなければならない。

式(8.2)の $T(y)$ が y の偶関数として与えられる場合を考えよう。この時、波動場は、次のように対称モードの重ね合せの形で表わせる。ただし $f(t) = e^{-i\omega t}$ とする。

$$w(x, y, t) = \sum_{n=0, 2, 4, \dots} A_n \cos\left(\frac{n\pi y}{2h}\right) \exp[i(k_n x - \omega t)] \quad (8.5)$$

ここに A_n は各々のモードの振幅であり、 k_n は式(8.4)で与えられる。 k_n は ω の大きい場合に実数となるので波の伝ばするモードとなりうる。式(8.5)は表面 $y = \pm h$ で自由条件(8.1)を満足している。これに対応する τ_{xz} の式は

$$\tau_{xz}(x, y, t) = \sum_{n=0, 2, 4, \dots} B_n \cos\left(\frac{n\pi y}{2h}\right) \cdot \exp[i(k_n x - \omega t)] \quad (8.6)$$

の形になるから $T(y)$ が次のようになれば式(8.2)が満たされる。

$$T(y) = \sum_{n=0, 2, 4, \dots} B_n \cos\left(\frac{n\pi y}{2h}\right) \quad (8.7)$$

係数 B_n を決定するため、上式の両辺に $\cos(m\pi y/2h)$ を乗じて y について $-h$ から h まで積分する。 m は整数である。三角関数の直交性を用いれば

$$B_0 = \frac{1}{h} \int_0^h T(y) dy \quad (8.8)$$

$$B_n = \frac{2}{h} \int_0^h T(y) \cos\left(\frac{n\pi y}{2h}\right) dy, \quad (n=2, 4, \dots) \quad (8.9)$$

対称性より積分区間を $(0, h)$ にしてある。 $T(y) = T_0$ の特別な場合には $B_n = 0$ になり、最低次モードのみ生じて $B_0 = T_0$ である。

例として下図のような分布の

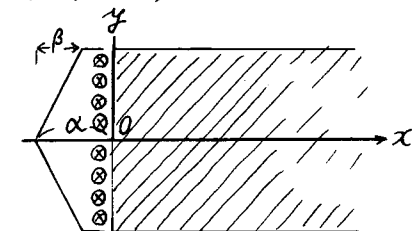
$$T(y) = \left[\alpha - \frac{\beta}{h} |y| \right] T_0; \quad \beta \leq \alpha \quad (8.10)$$

を考えよう。この時の係数は

$$B_0 = \left(\alpha - \frac{1}{2}\beta\right) T_0, \quad B_n = \left(\frac{4}{n\pi}\right)^2 \beta T_0; \quad (n=2, 6, 10, \dots)$$

$$B_n = 0; \quad (n=4, 8, 12, \dots)$$

になる。高次モードの応答に及ぼす度合は α/β の値によって決まる。もし $(\alpha/\beta) > 1$ ならば $B_0 > \frac{1}{2}\beta T_0$ であり、 (B_n/B_0) は $2(4/n\pi)^2$ より小さい。



$T(y)$ の端面分布の例

8.2.2 過渡応答 衝撃応答解析の一つの方法として式(8.2)の関数 $f(t)$ を周波数 ω のフーリエ型積分表示して行うことも考えられる^[註]が、ここではもっと直接的なラプラス変換による方法を説明する。まず変位を次のように置く。

$$w(x, y, t) = \sum_{n=0, 2, 4, \dots} W_n(x, t) \cos\left(\frac{n\pi y}{2h}\right) \quad (8.11)$$

式(8.11)は $y = \pm h$ における境界条件(8.1)を満足している。面外せん断変形に対する波動方程式^[註2]に代入すれば $W_n(x, t)$ が次式を満足しなければならない。

$$\frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} - \left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2 W_n = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 W_n}{\partial t^2} \quad (8.12)$$

時間について片側ラプラス変換すれば

$$\frac{d^2 \bar{W}_n}{dx^2} - \left\{ \left(\frac{p}{C_T}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{2h}\right)^2 \right\} \bar{W}_n = 0 \quad (8.13)$$

ここで $T(y)$ が

$$T(y) = \sum_{n=0, 2, 4, \dots} B_n \cos\left(\frac{n\pi y}{2h}\right) \quad (8.14)$$

によって表わせると仮定すれば $x=0$ と ∞ で適切な式(8.13)の解は

$$\bar{W}_n(x, p) = -\frac{C_T B_n \bar{f}(p)}{\mu(p^2 + a_n^2)^{1/2}} e^{-(p^2 + a_n^2)^{1/2}(x/C_T)} \quad (8.15)$$

ここに

$$a_n = \frac{n\pi C_T}{2h} \quad (8.16)$$

ラプラス変換表より

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-(p^2 + a_n^2)^{1/2}(x/C_T)}}{(p^2 + a_n^2)^{1/2}} \right] = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 < t < (x/C_T) \\ J_0 \left[\left(t^2 - \frac{x^2}{C_T^2} \right)^{1/2} a_n \right] & ; \quad t \geq (x/C_T) \end{cases}$$

^[註3]であるから、たに 4 の定理を用いれば、式(8.15)より

$$W_n(x, t) = -\frac{C_T}{\mu} B_n \int_{x/C_T}^t f(t-s) J_0 \left[\left(s^2 - \frac{x^2}{C_T^2} \right)^{1/2} a_n \right] ds$$

[註] 第1.9節と第4.3節参照

[註2] 式(2.55)を参照。 $f_3 = 0$, $u_3 = w$ にあたる。

[註3] 森口、ほか著「数学公式Ⅲ」201頁、公式で $t = (x^2 + y^2)^{1/2}$ とおけば得られる。

特別な場合としてインパルス応力負荷、すなわち $f(t) = \delta(t)$ とすれば $t > x/C_T$ における変位は前式より

$$w(x, y, t) = -\frac{C_T}{\mu} \sum_{n=0, 2, 4, \dots} B_n J_0 \left[\left(t^2 - \frac{x^2}{C_T^2} \right)^{1/2} a_n \right] \cos\left(\frac{n\pi y}{2h}\right)$$

この解から明らかなように波の形は時間経過とともに変化しており変位パルスの分散性を示している。 $t = x/C_T$ の波頭ではその大きさは不変である。入力負荷を理想化したインパルスとしたので波頭における不連続量 $[w]$ は $-\frac{C_T}{\mu} T(y)$ のくいちがいとなる。

8.2.3 弾性単層端に異種保護材の付いた時のせん断衝撃 境界条件を鏡像波源を並べることによって満足させる手法の応用例として、図のように有限厚さ l の弾性半無限単層と端に取付けられた幅 a の弾性材の組み合わせを考える。それぞれの

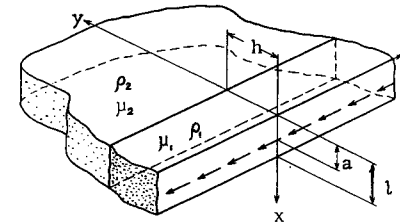


図 a 有限厚弾性平板端に取付けられた異種弾性材に線状縦せん断衝撃

材料領域に対する諸量を括弧付き上添字で区別する。境界条件を次のようにとる

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^{(1)}(0, y) &= 0 \\ \tau_{xz}^{(2)}(0, y) &= 0 \\ \tau_{xz}^{(1)}(l, y) &= 0 \\ \tau_{xz}^{(2)}(l, y) &= 0 \\ \tau_{yz}^{(1)}(x, 0) &= Q \delta(x-a) H(t) \end{aligned} \right\} (a)$$

また、接合面 ($y=h$) で τ_{yz} と w が連続

そして初期静止の条件をつける。せん断衝撃を受けるこの複合体の上下表面 ($x=0$ と $x=l$) が自由面となるのは、その面が問題の対称面となれば実現できるので本問は図cのように半無限体の表層保護材に周期 $2l$ で衝撃波源を配置したものと等価である。いま $x=a$ にある単一波源による応答解を $w_0(x; a)$ で表現する。ただし第一引数は観測点の x 座標を、第二引数を波源の x 座標を

示すものとする。この時図6の荷重点列に対する解は

$$w(x; a) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [w_0(x; -2j\ell + a) + w_0(x; 2j\ell - a)] \quad (b)$$

そして面外せん断問題の特性より $w_0(x; a)$ が $x=a$ に対して対称分布であり、また波源点と観測点を同じ距離だけ x 方向に移動しても値が変わらないことから

$$w_0(x; a) = w_0(-x; -a) = w_0(x+d; a+d) \quad (c)$$

d : 平行移動距離

が成り立つ。このことより式(b)は次のように書き換えられる。

$$w(x; a) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} [w_0(2j\ell + x; a) + w_0(2j\ell - x; a)] \quad (d)$$

従って $x=a$ にある波源による解 $w_0(x; a)$ が求まれば上式の組み合わせによって本問の解が得られる。また $w_0(x; a)$ に対応する応力成分 $\tau_{yz}(x; a)$ と $\tau_{xz}(x; a)$ のそれぞれが $x=a$ に対して対称と反対称になることに注意すれば同様な重ね合せで求まる。

単一衝撃に対する解 $w_0(x; a)$ もしくは $w_0(x-a; 0)$ を求めればよいので以下にそれを求める解析を示す。 $X=x-a$ とおき、下添字 0 と引数表示を省略する。また、対称性より $X \geq 0$ の領域のみの取扱いで十分である。面外変形せん断波に対する波動方程式をフーリエ・ラプラス変換(FL-変換)

すれば、材料を区別する $\alpha=1, 2$ をつけて

$$\frac{d^2 \bar{w}^{*(\alpha)}}{dy^2} - p^2 (\xi^2 + S_T^{(\alpha)2}) \bar{w}^{*(\alpha)} = 0 \quad (e)$$

ただしフーリエ変換パラメータを $p\xi$ として

いる。式(e)の基本解は

$$\bar{w}^{*(\alpha)} = A^{(\alpha)}(\xi, p) e^{-py\sqrt{\xi^2 + S_T^{(\alpha)2}}} + B^{(\alpha)}(\xi, p) e^{py\sqrt{\xi^2 + S_T^{(\alpha)2}}} \quad (f)$$

ただし

$$\operatorname{Re} p > 0, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\xi^2 + S_T^{(\alpha)2}} > 0$$

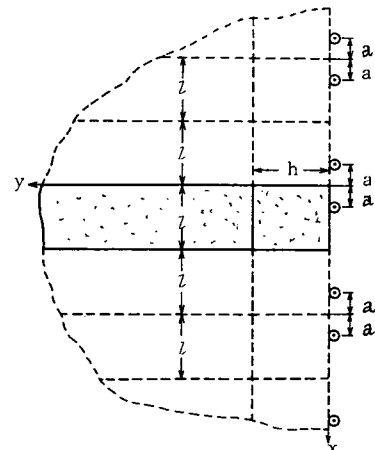


図6 鏡像法による波源列

式(f)より導かれる応力成分は

$$\bar{\tau}_{yz}^{*(\alpha)} = \mu^{(\alpha)} p (\xi^2 + S_T^{(\alpha)2})^{1/2} [-A^{(\alpha)} e^{-py(\xi^2 + S_T^{(\alpha)2})^{1/2}} + B^{(\alpha)} e^{py(\xi^2 + S_T^{(\alpha)2})^{1/2}}] \quad (g)$$

$$\bar{\tau}_{xz}^{*(\alpha)} = \mu^{(\alpha)} i p \xi [A^{(\alpha)} e^{-py(\xi^2 + S_T^{(\alpha)2})^{1/2}} + B^{(\alpha)} e^{py(\xi^2 + S_T^{(\alpha)2})^{1/2}}] \quad (h)$$

また $y=0$ の境界条件より

$$\bar{\tau}_{yz}^{*(1)} = Q/p \quad (i)$$

そして $y=h$ で τ_{yz} と w とが連続であり $y \rightarrow \infty$ で解が有界となることから未定係数 $A^{(\alpha)}$ と $B^{(\alpha)}$ を求めれば

$$A^{(1)} = -\frac{Q}{\mu^{(1)}} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot (\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2} \quad (j)$$

$$B^{(1)} = -\frac{Q}{\mu^{(1)}} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \eta \cdot (\xi^2 + S_T^{(1)2})^{-1/2} \exp[-2p\eta(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2}] \quad (k)$$

$$A^{(2)} = -\frac{Q}{\mu^{(1)}} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{2}{\{(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2} + (\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}})(\xi^2 + S_T^{(2)2})^{1/2}\}} \exp[-p\eta\{(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2} - (\xi^2 + S_T^{(2)2})^{1/2}\}] \quad (l)$$

$$B^{(2)} = 0 \quad (m)$$

ここに

$$\Delta = 1 - \eta \cdot \exp[-2p\eta(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2}] \quad (n)$$

$$\eta = \frac{\mu^{(1)}(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2} - \mu^{(2)}(\xi^2 + S_T^{(2)2})^{1/2}}{\mu^{(1)}(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2} + \mu^{(2)}(\xi^2 + S_T^{(2)2})^{1/2}} \quad (o)$$

いま $1/\Delta$ を次のように無限級数形に展開する

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{1 - \eta \cdot \exp[-2p\eta(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2}]} = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^n \exp[-2np\eta(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2}] \quad (p)$$

(p)を(g)に入れ、(l)、(m)を考慮すれば $y=h$ における接合せん断応力は

$$(\bar{\tau}_{yz}^{*(2)})_{y=h} = \frac{2Q\mu^{(2)}(\xi^2 + S_T^{(2)2})^{1/2}}{\mu^{(1)} \cdot p \{(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2} + (\frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(1)}})(\xi^2 + S_T^{(2)2})^{1/2}\}} \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{n-1} e^{-p(2n-1)\eta(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2}} \quad (q)$$

上式を見ればわかるようにラプラス変換パラメータ p が、分母に一つと指数関数部にCagniard法の適用できる都合のよい形で入っている。そこで級数の項別逆変換をす

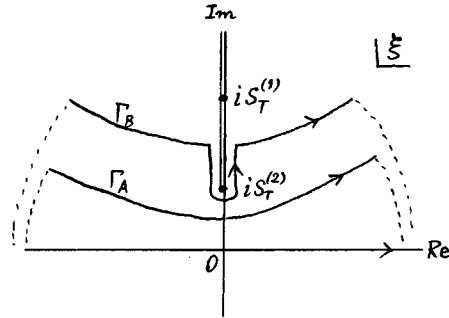
ればよい。式(8)より フーリエ逆変換形は

$$(\tau_{yz}^{*(2)})_{y=h} = Q \sum_{n=1}^{\infty} I_n^*(p) \quad (1)$$

ここに
$$I_n^*(p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\xi) \exp[-p\{(2n-1)h(\xi^2 - S_T^{(1)2})^{1/2} - i\xi X\}] d\xi \quad (1-1)$$

$$M(\xi) = \frac{\mu^{(2)}(\xi^2 + S_T^{(2)2})^{1/2}}{\mu^{(1)}(\xi^2 + S_T^{(1)2})^{1/2} + \mu^{(2)}(\xi^2 + S_T^{(2)2})^{1/2}} \eta^{n-1} \quad (1-2)$$

(1-1)の積分は ξ の実軸に沿うものである。これを右図のように双曲線に沿うものにおきかえれば、視察によってFL逆変換ができる。すなわち、



図C: Cagniard 積分路。

とおけば $S_T^{(1)}$, $S_T^{(2)}$ の大きさによって図の

Γ_A , 又は Γ_B に ξ を対応させることができる。 $I_n^*(p)$ について求めた結果は

$S_T^{(1)} \frac{X}{\{(2n-1)^2 h^2 + X^2\}^{1/2}} \leq S_T^{(2)}$ のとき Cagniard 積分路 Γ_A により

$$I_n(X) = \frac{1}{\pi} \left\{ M(\xi_1^+) \frac{\partial \xi_1^+}{\partial t} - M(\xi_1^-) \frac{\partial \xi_1^-}{\partial t} \right\} H(t - S_T^{(1)} \{(2n-1)^2 h^2 + X^2\}^{1/2}) \quad (1)$$

ただし
$$\xi_1^{\pm} = \frac{iXt \pm (2n-1)h \{t^2 - S_T^{(1)2}\} \{(2n-1)^2 h^2 + X^2\}^{1/2}}{(2n-1)^2 h^2 + X^2} \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \xi_1^{\pm}}{\partial t} = \frac{iX}{(2n-1)^2 h^2 + X^2} \pm \frac{(2n-1)ht}{\{(2n-1)^2 h^2 + X^2\} \{t^2 - S_T^{(1)2}\} \{(2n-1)^2 h^2 + X^2\}^{1/2}} \quad (1-2)$$

$S_T^{(1)} \frac{X}{\{(2n-1)^2 h^2 + X^2\}^{1/2}} > S_T^{(2)}$ のときは Cagniard 積分路 Γ_B を用いて

$$I_n(X) = \frac{1}{\pi} \left\{ M(\xi_2^+) \frac{\partial \xi_2^+}{\partial t} - M(\xi_2^-) \frac{\partial \xi_2^-}{\partial t} \right\} H(t - S_T^{(1)} \{(2n-1)^2 h^2 + X^2\}^{1/2}) + \frac{1}{\pi} \left\{ M(\xi_2^+) - M(\xi_2^-) \right\} \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right) H\left(\frac{X}{\{(2n-1)^2 h^2 + X^2\}^{1/2}} - \frac{S_T^{(2)}}{S_T^{(1)}} \right) \times H\left(t - \{S_T^{(2)} X + (2n-1)h(S_T^{(1)2} - S_T^{(2)2})^{1/2}\} \right) \cdot H\left(S_T^{(1)} \{(2n-1)^2 h^2 + X^2\}^{1/2} - t \right) \quad (1)$$

ここに
$$\xi_2^{\pm} = i \frac{Xt - (2n-1)h [S_T^{(1)2} \{(2n-1)^2 h^2 + X^2\} - t^2]^{1/2}}{(2n-1)^2 h^2 + X^2} \pm \varepsilon \quad (1-1)$$

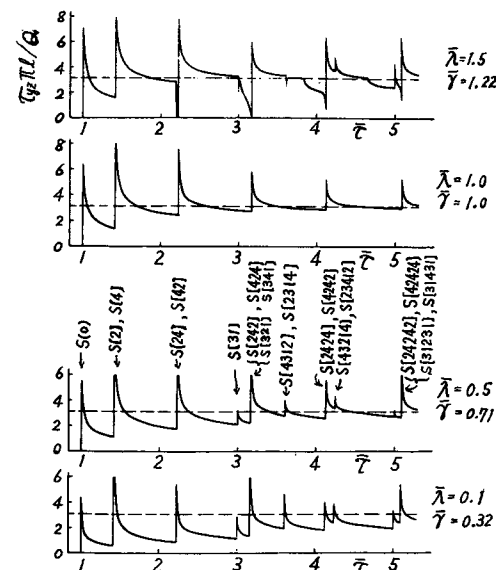
$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = i \left[\frac{X}{(2n-1)^2 h^2 + X^2} + \frac{(2n-1)ht}{\{(2n-1)^2 h^2 + X^2\} [S_T^{(1)2} \{(2n-1)^2 h^2 + X^2\} - t^2]^{1/2}} \right] \quad (1-2)$$

式(1-1)の $\pm \varepsilon$ は分岐線の右側と左側を沿う時の値を示す。式(1)(1)で与えられる $I_n(X)$ はいずれも実数値になる。これらの結果より、接合せん断応力は式(1)の重ね合わせをすれば、単一せん断波源によるものとして求められる。さらに式(1)に於いて本問題の弾性層端の補強された時の接合応力を求めれば、

$$(\tau_{yz}(x;a))_{y=h} = Q \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ I_n(|x+2jl-a|) + I_n(|-x+2jl-a|) \right\} \quad (1)$$

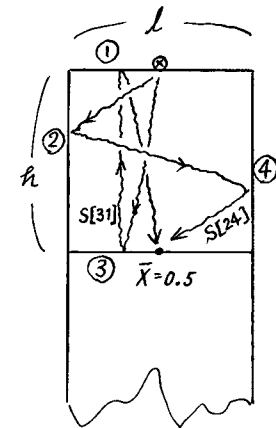
となる。式(1)は n と j についての二重級数になっているが、それらのパラメータは、ある値よりも大きくなると式(1)(1)の中のステップ関数により恒等的に0となるので、有限時間範囲においては、実質上有限級数であり厳密な解析解である。^[註]

計算例を図dに示す。ただし無次元量として $\bar{\lambda} = \mu^{(2)}/\mu^{(1)}$, $\bar{\gamma} = C_T^{(2)}/C_T^{(1)}$, $\bar{x} = x/l$, $\bar{t} = C_T^{(1)}t/l$, $\bar{h} = a/l$, $\bar{m} = h/l$ を導入している。なお、図中の $S[\dots]$ などとは



図d、 $\bar{x}=0.5$ の接合せん断応力の変動 ($m=1$, $\bar{h}=0.5$, $\bar{\beta}=1$)

衝撃波頭が反射した自由面を表わし、 $S[24]$ と $S[31]$ を例に示せば、図e のようになる。



図e: せん断波の伝ば径路。

[註] 大好 高垣, 機構論(1977)甲府

8.3 衝撃負荷による面内変形応答

急激に作用する垂直線荷重によって弾性単層はどのような過渡応答を示すだろうか。それを調べるため単層中央に原点をとった直角座標系(図8.2)で解析する。もし線荷重が y 座標に独立であるならば、生ずる波動場は平面ひずみ状態になるので、第7.7節と同様な場の方程式に支配される。

8.3.1 解法 境界条件として

$$\left. \begin{aligned} y = +h; \tau_y = -Qf(t)\delta(x) \\ \tau_{yx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.17)$$

$$\left. \begin{aligned} y = -h; \tau_y = 0 \\ \tau_{yx} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

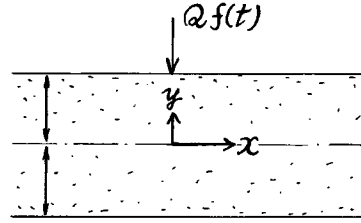


図8.2 集中面内荷重

となる問題を考える。解析上での取扱いを容易にするため式(8.17)(8.18)を用いる代わりに 対称な問題と反対称な問題に分割して図8.3に示すような条件を考える。明らかに図8.3(A)が $y=0$ に関して反対称、図8.3(B)が $y=0$ に関して対称な問題となる。それぞれの境界条件は

反対称(図8.3(A))に対し、 $y = h: \tau_y = -\frac{1}{2}Qf(t)\delta(x), \tau_{yx} = 0 \quad (8.19)$

$y = -h: \tau_y = \frac{1}{2}Qf(t)\delta(x), \tau_{yx} = 0 \quad (8.20)$

対称問題(図8.3(B))に対し、 $y = h: \tau_y = -\frac{1}{2}Qf(t)\delta(x), \tau_{yx} = 0 \quad (8.21)$

$y = -h: \tau_y = -\frac{1}{2}Qf(t)\delta(x), \tau_{yx} = 0 \quad (8.22)$

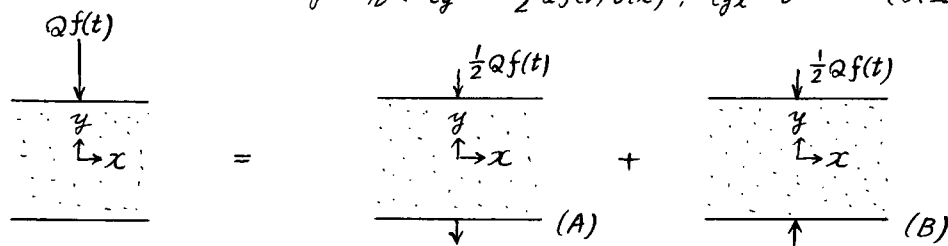


図8.3 反対称と対称な問題への分割

もともと $t=0$ で静止状態にあるとすれば初期条件として

$$\phi(x, y, 0) = \dot{\phi}(x, y, 0) = \psi(x, y, 0) = \dot{\psi}(x, y, 0) = 0 \quad (8.23)$$

分割した問題は、ともに積分変換法によって解かれる。式(7.20)によるラプラス変換と式(7.7)によるフーリエ指数変換を用いる。ポテンシャル $\phi(x, y, t)$ と $\psi(x, y, t)$ のラプラス・フーリエ変換を $\bar{\phi}^*(\xi, y, p)$ と $\bar{\psi}^*(\xi, y, p)$ で定義する。式(7.108)と(7.109)より

$$\frac{d^2 \bar{\phi}^*}{dy^2} - (\xi^2 + S_L^2 p^2) \bar{\phi}^* = 0$$

$$\frac{d^2 \bar{\psi}^*}{dy^2} - (\xi^2 + S_T^2 p^2) \bar{\psi}^* = 0$$

を得る。ここに p がラプラス変換パラメータ、 ξ がフーリエ指数変換パラメータである。これらの式の本問題に適する解は

$$\bar{\phi}^*(\xi, y, p) = A_1 \sinh(\alpha y) + A_2 \cosh(\alpha y) \quad (8.24)$$

$$\bar{\psi}^*(\xi, y, p) = B_1 \sinh(\beta y) + B_2 \cosh(\beta y) \quad (8.25)$$

ただし $\alpha = (\xi^2 + S_L^2 p^2)^{1/2}, \beta = (\xi^2 + S_T^2 p^2)^{1/2} \quad (8.26 a, b)$

式(6.61)(6.62)と(8.24)(8.25)を比べればわかるように、弾性単層を伝わる自由波の時のポテンシャル $\Phi(x_2), \Psi(x_2)$ と $\bar{\phi}^*(\xi, y, p), \bar{\psi}^*(\xi, y, p)$ の式は本質的には同じになる。反対称問題の解に対応する $\bar{\phi}^*$ と $\bar{\psi}^*$ の項を採用すれば

$$\bar{\phi}^* = A_1 \sinh(\alpha y), \quad \bar{\psi}^* = B_2 \cosh(\beta y) \quad (8.27 a, b)$$

境界条件(8.19)(8.20)を考慮する。その条件式と式(7.112)(7.113)をラプラス・フーリエ変換して、式(8.27)を代入して得られる式より、

$$[\lambda(-\xi^2 + \alpha^2) + 2\mu\alpha^2] A_1 \sinh(\alpha h) + 2i\mu\xi\beta B_2 \sinh(\beta h) = -\frac{1}{2}Q\bar{f}(p)$$

$$-2i\xi\alpha \cdot A_1 \cosh(\alpha h) + (\xi^2 + \beta^2) B_2 \cosh(\beta h) = 0$$

そこで A_1 と B_2 について解けば

$$A_1 = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\mu} \frac{(\xi^2 + \beta^2) \operatorname{coth}(\beta h)}{D_a} \bar{f}(p)$$

$$B_2 = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\mu} \frac{2i\xi\alpha \operatorname{coth}(\alpha h)}{D_a} \bar{f}(p)$$

$$\text{ここに } D_a = (\beta^2 + \xi^2)^2 \sinh(\alpha h) \operatorname{coth}(\beta h) - 4\xi^2\alpha\beta \sinh(\beta h) \operatorname{coth}(\alpha h), \quad (8.28)$$

一方、式(8.21), (8.22) によって定まる対称問題に対しては ϕ^* と ψ^* は次の表示を用いる、

$$\bar{\phi}^* = A_2 \operatorname{coth}(\alpha y), \quad \bar{\psi}^* = B_1 \sinh(\beta y)$$

そして対称問題の境界条件を考慮して

$$[\lambda(-\xi^2 + \alpha^2) + 2\mu\alpha^2] A_2 \operatorname{coth}(\alpha h) + 2i\mu\xi\beta B_1 \operatorname{coth}(\beta h) = -\frac{1}{2} Q \bar{f}(p)$$

$$-2i\xi\alpha A_2 \sinh(\alpha h) + (\xi^2 + \beta^2) B_1 \sinh(\beta h) = 0$$

これを解いて

$$A_2 = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\mu} \frac{(\xi^2 + \beta^2) \sinh(\beta h)}{D_s} \bar{f}(p) \quad (8.29)$$

$$B_2 = -\frac{1}{2} \frac{Q}{\mu} \frac{2i\xi\alpha \sinh(\alpha h)}{D_s} \bar{f}(p) \quad (8.30)$$

$$\text{ここに } D_s = (\xi^2 + \beta^2)^2 \sinh(\beta h) \operatorname{coth}(\alpha h) - 4\xi^2\alpha\beta \sinh(\alpha h) \operatorname{coth}(\beta h), \quad (8.31)$$

弾性単層表面に生ずる応力 $\bar{\tau}_x$ を求めれば以下のようになる。式(7.11)よりラプラス・フーリエ変換形は

$$\bar{\tau}_x^* = (\beta^2 + \xi^2) \bar{\phi}^* - 2i\mu\xi \frac{d\bar{\psi}^*}{dy}$$

となるから $y = +h$ の表面では

$$\bar{\tau}_x^* = \begin{cases} -\frac{1}{2} Q N_a(\xi, p) \bar{f}(p) / D_a(\xi, p) & : \text{反対称問題に対して} \\ -\frac{1}{2} Q N_s(\xi, p) \bar{f}(p) / D_s(\xi, p) & : \text{対称問題に対して} \end{cases} \quad (8.32)$$

$$\text{ここに } N_a(\xi, p) = (\xi^2 + \beta^2)^2 \sinh(\alpha h) \operatorname{coth}(\beta h) + 4\xi^2\alpha\beta \operatorname{coth}(\alpha h) \sinh(\beta h)$$

$$N_s(\xi, p) = (\xi^2 + \beta^2)^2 \operatorname{coth}(\alpha h) \sinh(\beta h) + 4\xi^2\alpha\beta \sinh(\alpha h) \operatorname{coth}(\beta h)$$

8.3.2 逆変換 式(7.8), (7.21) によって定義される逆変換を用いて応力成分 $\tau_x(x, y, t)$ を求める。形式的に書けば次のようになる。

反対称問題では

$$\tau_x = -\frac{Q}{8\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} d\xi \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{N_a(\xi, p)}{D_a(\xi, p)} e^{pt} dp \quad (8.33)$$

対称問題では

$$\tau_x = -\frac{Q}{8\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} d\xi \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{N_s(\xi, p)}{D_s(\xi, p)} e^{pt} dp \quad (8.34)$$

ただし、時間関数 $f(t)$ はディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ の場合を考え、 $\bar{f}(p) = 1$ であることを用いている。より一般的な時間変動の場合は、このパルス負荷に対する解を重ね合わせて導くことが出来る。複素 p 面における積分評価は比較的容易に出来る。すなわち、式(8.33)(8.34)の右辺の被積分関数を調べれば α と β に関して偶関数になるから、たとえ α と β のそれぞれが多価性 (= 価性) を有している被積分関数全体では一価であり分岐点が存在しない。従って直接そのまま複素積分によって評価できる。 p -面の左半面で閉じた積分回路を作れば $|p| \rightarrow \infty$ で積分値が 0 になることから、 $\operatorname{Re}[p] = \gamma$ によって定まる積分路に沿う積分値は、閉回路内の^{極に対する}留数之和に $2\pi i$ を乗じたものに等しい。 p 面の極の位置は、式(8.33)(8.34)の $D_a(\xi, p)$, $D_s(\xi, p)$ の根(零点)である。

$p = i\omega$ の置換えをすると $D_a(\xi, p) = 0$, $D_s(\xi, p) = 0$ の式は

$$(\xi^2 - \beta^2) \sin(p h) \cos(\beta h) + 4\xi^2 \beta \sin(\beta h) \cos(p h) = 0 \quad (8.35)$$

$$(\xi^2 - \beta^2) \sin(\beta h) \cos(p h) + 4\xi^2 \beta \sin(p h) \cos(\beta h) = 0 \quad (8.36)$$

$$\text{ここに } p^2 = \frac{\omega^2}{C_1^2} - \xi^2, \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{C_2^2} - \xi^2 \quad \text{である。}$$

式(8.35)(8.36)は、それぞれ式(6.69)(6.68)に示した Rayleigh-Lamb の周波数方程式であることがわかる。この周波数スペクトルは弾性単層の導波特性の研究により詳しく調べられており、あらゆる ξ の値に対して無限個の解 ω_n が存在する。すなわち、

$$p_n = \pm i\omega_n$$

なる無限個の極が虚軸上に並ぶ。ここに ω_n は ξ を変数とする Rayleigh-Lamb の周波数方程式の根である。極はすべて一位のものであり、留数もよく知られた手法で求められる。反対称問題に対する $\tau_x(x, h, t)$ を求める式は次のようになる。

$$\tau_x = -\frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\partial D_a}{\partial p} \right]_{p=i\omega_n} + \left[\frac{\partial D_a}{\partial p} \right]_{p=-i\omega_n} \right\} d\xi \quad (8.37)$$

対称問題の場合は

$$\tau_x = -\frac{Q}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial D_s}{\partial p} \right]_{p=i\omega_n} + \left[\frac{\partial D_s}{\partial p} \right]_{p=-i\omega_n} \right\} + (\omega=0 \text{ における留数}) d\xi$$

8.3.3 停留位相法の応用 x と t の関数となる式(8.37)の応力 τ_x を厳密に解析的に求めることは大変複雑になる。そこで近似評価を考えれば、数値積分が第7章で論じた停留位相法などが挙げられよう。電子計算機を用いて数値積分することは非常に取りかかり易いかもしれないが、かなりプログラム作成に労力を要するのみならず、多大な計算時間を要する場合も多い。それでも時間 t の全域に渡る $\tau_x(x, h, t)$ の詳細なデータが必要ならば、数値積分を実行することになる。もし、比較的、時間 t の値が大きい時の応力のみを求めるのであれば、その近似値を停留位相法によって容易に求める。 $p^{-1}(\partial D_a / \partial p)$ と N_a が p の偶関数となることに注意すれば、式(8.37)は

$$\tau_x = -\frac{Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} d\xi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n} \left[\frac{\partial D_a}{\partial p} \right]_{p=i\omega_n} \quad (8.38)$$

$p = i\omega_n$ で Rayleigh-Lamb の周波数方程式 $D_a(i\omega, \xi) = 0$ が成り立ち、また式(8.32)(8.28)より N_a について次が成立する。

$$[N_a]_{p=\pm i\omega_n} = [2(\beta^2 + \xi^2)^2 \sinh(\alpha h) \cosh(\beta h)]_{p=\pm i\omega_n}$$

D_a の p による微分を実行すれば

$$\frac{1}{p N_a} \frac{\partial D_a}{\partial p} = \frac{M(p, \xi)}{\beta^2 + \xi^2} \cdot \frac{1}{C_L^2}$$

ここに $M(p, \xi)$ は次式によって定義される無次元関数である。

$$M(p, \xi) = \frac{1}{\alpha h} \frac{(\beta h)^2 + (\xi h)^2}{\sinh(2\alpha h)} - \frac{\kappa^2 (\beta h)^2 + (\xi h)^2}{\beta h \sinh(2\beta h)} + 2\kappa^2 + \frac{1}{2} \frac{(\beta h)^2 + (\xi h)^2}{(\alpha h)^2 (\beta h)^2} [(\beta h)^2 + \kappa^2 (\alpha h)^2]$$

また κ は C_L/C_T である。従って無次元応力 $(h^2/QC_L)\tau_x$ は

$$\left(\frac{h^2}{QC_L}\right)\tau_x = -\frac{1}{4\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (I_{1n} - I_{2n}) \quad (8.39)$$

$$I_{1n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[2(\xi h)^2 - (\omega_n h/C_T)^2] C_L}{M(i\omega_n, \xi) \omega_n h} \exp[i(C_L t/h) w_1(\xi h)] \cdot d(\xi h), \quad (8.40)$$

$$I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[2(\xi h)^2 - (\omega_n h/C_T)^2] C_L}{M(i\omega_n, \xi) \omega_n h} \exp[-i(C_L t/h) w_2(\xi h)] \cdot d(\xi h), \quad (8.41)$$

さらに w_1 と w_2 は

$$w_1(\xi h) = \frac{\omega_n h}{C_L} - \frac{x}{C_L t} \xi h \quad (8.42)$$

$$w_2(\xi h) = \frac{\omega_n h}{C_L} + \frac{x}{C_L t} \xi h \quad (8.43)$$

式(8.40)と(8.41)の積分は、 $C_L t/h$ の値が十分大きいとして停留位相法によって評価する。式(8.40)の積分値を支配するのは停留条件

$$\frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0 \quad (8.44)$$

を満たす $\xi = \xi_s$ の近傍の積分である。このような ξ が一つあるとすれば I_{1n} の近似は

$$I_{1n} = \left(\frac{2\pi h}{C_L t}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{i}{w_1''(\xi_s h)}\right)^{1/2} \cdot \frac{2(\xi_s h)^2 - (\omega_{ns} h/C_T)^2}{M(i\omega_{ns}, \xi_s)} \cdot \frac{C_L}{\omega_{ns} h} e^{i S_n(x, t)} \quad (8.45)$$

ここに ω_{ns} は $\xi = \xi_s$ における ω_n である。また

$$w_1''(\xi_s h) = \frac{d^2 w_1(\xi h)}{d(\xi h)^2} \Big|_{\xi=\xi_s} \quad (8.46)$$

$$S_n(x, t) = (C_L t/h) w_1(\xi_s h) \quad (8.47)$$

位相の停留条件(8.44)は ω_l が式(8.42)であるから

$$\frac{\partial \omega_l}{\partial \xi} = \frac{\hbar}{c_l} \frac{\partial \omega_l}{\partial \xi} - \frac{\hbar x}{c_l t} = 0$$

従って
$$\frac{x}{t} = \frac{\partial \omega_l}{\partial \xi} = C_{gn} \quad (8.48)$$

C_{gn} は n 次モードの群速度である。上式にあてはまる ξ が ξ_s で、それは観測位置 x および時刻 t によって定まる。この ξ_s を擾乱の局所波数(local wavenumber)と呼ぶ。いま式(8.47)に(8.42)を入れ

$$S_n(x, t) = t \omega_n[\xi_s(x, t)] - x \xi_s(x, t)$$

として x で微分すれば

$$\frac{\partial S_n}{\partial x} = -\xi_s$$

また t で微分すれば

$$\frac{\partial S_n}{\partial t} = \omega_{ns}$$

を得る。いろいろなモードに対する群速度は差分方程式を用い周波数スペクトルから計算できる。^(註) 図8.4に最初の5つのそれぞれのモードに対する群速度曲線を示す。これ

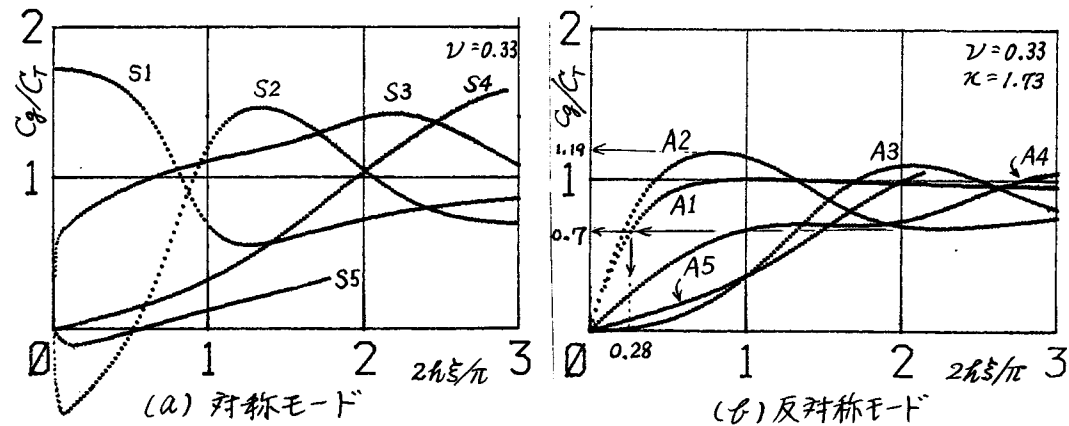


図8.4. 群速度曲線

PL06*6
[大野 7#3 1983 RL33SYM RL33ASYM]

(註) レーラムの周波数方程式が与えられているので陰関数の微分として $\partial \omega / \partial \xi$ の値を解析的に求めれば ω_n 又は ξ_{sn} に対する C_{gn} が算出できる。差分を用いるよりも計算負担が軽くなる。

らの曲線はポアソン比が0.33のときのものである。反対称の場合、 $\xi \rightarrow 0$ ですべてのモードが $C_g = 0$ となっている。図で $S1$ と $A1$ は $\xi \rightarrow \infty$ で群速度がレーラム波速度になる最低次モードの曲線である。

式(8.45)の近似形に I_m を表現するさい、 ξ の実数値に対して関数 $M(i\omega_n, \xi)$ が0とならない条件を暗黙のうちに考慮している。従ってもし0点が存在するならば式(8.40)の積分は被積分関数の極のまわりからの寄与があって、式(8.45)の近似が成り立たなくなる。しかしこの心配は無用である。Skalakの棒に対する解析^(註)と同様にすべての実数 ξ に対して分母が0とならないことが以下の様に説明できるからである。

S_1 の方向を $D_a(i\omega, \xi) = 0$ を満たす周波数スペクトル曲線^(註)の方向とすれば(下図参照) $\partial D_a(i\omega, \xi) / \partial S_1 = 0$ である。もし $D_a(i\omega, \xi) = 0$ の曲線上のある点で $\partial D_a(i\omega, \xi) / \partial \omega$ も0となり、さらに ω 軸と平行な接線を持たないならばこの点ではあらゆる方向が $\partial D_a / \partial S = 0$ となる。 $\partial D_a / \partial S = 0$ ということは D_a が最大、最小もしくは鞍点となる点の条件である。もし最大値あるいは最小値とすれば $D_a(i\omega, \xi) = 0$ の曲線はその点を通らない。また、もし鞍点ならば $D_a(i\omega, \xi) = 0$ を満たす2本の曲線がその点を通ることになる。しかしながらレーラムの周波数スペクトル曲線を見れば、実数 ξ に対し、互いに交差することのない曲線群となっており、かつ ω 軸と平行になる所もない。従って $\partial D_a / \partial \omega$ すなわち $M(i\omega_n, \xi)$ が0となることはありえない。

弾性単層の横衝撃応答は Jones によっても取扱われている。^(註2) 彼は分母が常に正値形式をとる運動エネルギー関数に比例するという観点から直接、モードの重ね合せで行った。

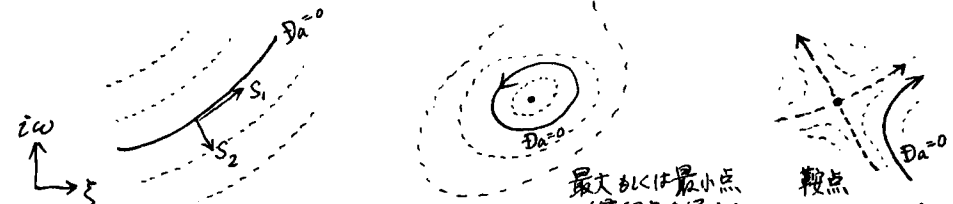


図. $D_a(i\omega, \xi)$ の等値線図

(註) R. Skalak, "Jour. Appl. Mech." 24 (1957) 57.

(註2) R. P. N. Jones, "Quart. Jour. Mech. Appl. Math." 17 (1964) 401

n 次モードに対する停留条件(8.48)より

$$\frac{C_{gn}}{C_T} = \frac{x}{C_T t} = \frac{x}{c_L t} \kappa$$

の関係が成立するから 任意の x/t に対応して ξ_s が図8.4の曲線より求められる。この対応する ξ_s は x/t の値によって1つも無い場合もあれば複数となる場合もある。観測位置 x の時刻 t における応答は この x/t に対応するすべての ξ_s による(又は ω_s による)寄与 I_{ms} を求め、式(8.39)に順う総和として求められる。式(8.45)の誘導において用いた仮定(ξ_s がそれぞれのモードで1つずつある仮定)は $0 < x < 0.7 C_T t$ の場合に成立する。図8.4(b)参照。まづこのような場合を考える。

群速度が ξ_s に関して奇関数であるから $W_1(\xi_s)$ の停留点を ξ_s とすれば $W_2(\xi_s)$ の停留点は $\xi = -\xi_s$ にある。あとは I_{2n} の積分も I_{1n} と同様にして評価することができるので結局、応力は次のようになる。

$$\left(\frac{h^2}{2Qc_L}\right) \tau_x = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2\pi h}{c_L t}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\pm W_1''(\xi_s h)\right]^{-1/2} G_{ms} \sin(\xi_s x - \omega_{ms} t \mp \frac{\pi}{4}) \quad (8.49)$$

ここに複符号は $d^2\omega_n/d\xi^2$ が負となる時一符号を採用する。また

$$G_{ms} = \frac{2(\xi_s h)^2 - (\omega_{ms} h / C_T)^2}{M(i\omega_{ms}, \xi_s)} \cdot \frac{c_L}{\omega_{ms} h}$$

さて $\xi = \xi_s$ で $\omega_{ms} = \omega_n$ をとる。 $0 < x < 0.7 C_T t$ の範囲においては いずれのモードに対しても x/t の増加とともに局所的な擾乱の波長 $2\pi/\xi_s$ が短くなってゆく。そして $x = 0.7 C_T t$ の時、最低次分枝の応答に対する $2h\xi_s/\pi$ の値は 0.28 となり、その波の波長は板厚 $2h$ のほゞ7倍となる。従って以上の取扱いは波長が板厚の7倍より大きい成分に対して成立する。

次に $x > 1.19 C_T t$ の時を考える。この場合 対応する ξ_s が無い。したがって応力 τ_x は 0 と近似される。これはすでに縦波速度 c_L で伝わる擾乱を受けている領域 $1.19 C_T t < x < \kappa C_T t = c_L t$ があるはずだから全くの 0 ではないが、その領域における応力値が $(c_L t/h)^{-1/2}$ のオーダーよりも小さいことを示している。

最後に $0.7 C_T t < x < 1.19 C_T t$ の範囲を考える。図8.4(b)から明らかなように群速度が停留する ξ_s の値があるから近似式(8.45)は成り立たない。分母の $W_1''(\xi_s h)$ が 0 となってしまう。高次モードに対する群速度は ある ξ_s のところで極大値ある所で極小値をとる。また $\xi_s \rightarrow \infty$ では微分 $dG_s/d\xi$ は いずれの分枝に対して 0 となってゆく。さて $W_1''(\xi_s h) = 0$ の時の近似評価は、第7.5節で補遺として述べたようにエアリー積分の形である。前述の Jones の論文に弾性単層の過渡的な反対称応答の解析として、この取扱いが述べられている。注目すべき結果は、式(8.49)では τ_x が $(c_L t/h)^{-1/2}$ のオーダーで変化するのに対し、この場合は $(c_L t/h)^{-1/3}$ のオーダーで変化することである。すなわちエアリー相 (Airy phase) が支配的となる点である。 $0.7 C_T t < x < 1.19 C_T t$ の時の扱いは高次モードによる寄与を考慮したが、応答の主要部は基準モードによるものであり、特に $0 < x < 0.7 C_T t$ ではそうである。

第6.12節の近似板理論によって、ここで議論した過渡応答問題を解析することから出来るが近似できない x と t の領域が存在することに注意しなければならない。その議論は Nigul^[註] の論文に見られる。

[註] Nigul, U. Int. Jour. Solids Structs. 4 (1969) P. 607

8.4 単層に集中点荷重

垂直点荷重を急激に作用させれば軸対称波動となる。そして場の変量も軸対称性を有するから変位ポテンシャルを第2章の第2.13節にしたがって与えられる。線荷重のときと同様、単層の応答は対称荷重と反対称荷重のそれぞれに対する応答

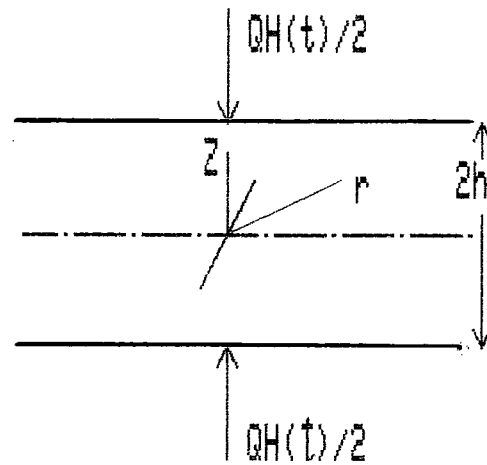


図8.5 点荷重

の重ね合わせで考えることができる(図8.3参照)。z軸を荷重方向と一致させて円柱座標系をきめる。すなわちz軸方向が層面に垂直で中央面に原点が来るようにする。この問題の幾何学的様相を図8.5にしめす。ステップ荷重が作用するときの境界条件は次のように書ける。

$$\tau_z = -\frac{1}{2} QH(t) \frac{\delta(r)}{2\pi r}$$

$$\tau_{zr} = 0$$

ここに $\delta(r)$ は極座標系におけるディラックのデルタ関数である。さらに無限遠点の条件として変位および応力がそこで0になる条件を加える。また、もともと層が静止している初期条件

$$\phi(r, z, 0) = \dot{\phi}(r, z, 0) = \psi(r, z, 0) = \dot{\psi}(r, z, 0) = 0$$

を用いる。この軸対称問題はMiklowitzによって扱われたものである。(*)

(*) J. Miklowitz, Jour. Appl. Mech. 29(1962) p.53

解法は、時間tについてLaplace変換を、半径rについてHankel変換を用いる。これらの変換と逆変換はそれぞれ式(7.20)(7.21)と式(7.31)(7.32)に定義されている。変位ポテンシャルを支配する方程式はこの二重変換により二次の常微分方程式となり、それらの解は式(8.24)(8.25)と全く同形となる。対称変形に対する解形の未知係数を決定するため前記の境界条件を用いれば、結果は式(8.29)(8.30)と類似した式になる。式(7.21)(7.32)によって定義される逆変換により、形式解を求めればたとえば半径方向変位 $u(r, z, t)$ は

$$u(r, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \xi J_1(r\xi) d\xi \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{U_s(\xi, z, p)}{pD_s(\xi, p)} \exp(pt) dp \quad (8.50)$$

この式で $U_s(\xi, z, p)$ はHankel変換パラメータ ξ 、Laplace変換パラメータ p そして対称軸座標 z のやや複雑な関数である。分母が線荷重問題に対して得られるものと全く同じになる。すなわち $D_s(\xi, p)$ は式(8.31)で与えられる。

線荷重問題と同様、複素 p 面における積分の評価は簡単である。 p 面に分岐点がないので積分は $\Re(p) < \gamma$ の半空間にある極の留数積に $2\pi i$ を掛けられたものとなるから

$$u(r, z, t) = \int_0^\infty \xi J_1(r\xi) \left[\lim_{|p| \rightarrow 0} \frac{\partial U_s / \partial p}{\partial D_s / \partial p} \right] d\xi + \int_0^\infty \xi J_1(r\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left[\frac{U_s e^{pt}}{p \partial D_s / \partial p} \right]_{p=i\omega_n} + \left[\frac{U_s e^{pt}}{p \partial D_s / \partial p} \right]_{p=-i\omega_n} \right] d\xi \quad (8.51)$$

ここに ω_n は対称モードに対するRayleigh-Lambの周波数方程式 $D_s(\xi, i\omega) = 0$ の根である。さらに式(8.51)の近似値を求めるため、MiklowitzはBessel関数を r/h の値の大きい場合の漸近展開形の初項でおきかえ、そして停留位相法を用いた。この解析の主なる結果として、遠方場の波頭の応答は対称波の最低次モードで低周波の波によって支配されることが示されている。

8.5 衝撃を受ける棒

ある位置から他の位置まで機械的な信号を伝えるために弾性棒を利用することがある。その時、もしその信号が時間とともに急変するものならば波の伝播効果を考慮しなければならない。棒中の縦波の伝播に関する最も簡単な初歩の場の方程式は

$$\frac{\rho \partial^2 w}{E \partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \quad (8.52)$$

である。ここに w 、 ρ 、 E はそれぞれ軸方向変位、質量、縦弾性係数である。式(8.52)は棒内の応力が一次元状態であるという仮定のもとに得られているものなので、棒内を伝わる波の形が伝播とともに変わらないという非分散波の扱いになる。これが成り立つのはDavies^(*)によって実験的に確かめられているように外から入力されるパルスが比較的ゆっくり変動する場合である。もし衝撃荷重のように急激に作用させるときの波ならば分散性を示し厳密な弾性論による取扱いが必要となろう。

軸対称な場合 $z=0$ で混合境界条件を与えるならば、積分変換法によって解析でき、この種の問題の解はFolkら^(**)によって示された。また、半無限長円柱の任意の端条件に対する一般的問題も研究されている^(***)。

さて、半径方向変位 $u(r, z, t)$ 、軸方向変位 $w(r, z, t)$ を変位ポテンシャルで表せば、第2.13節よりそれぞれ

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \quad (8.53)(8.54)$$

ここに、ベクトルポテンシャルの単一成分を ψ_0 としないで ψ と表わす。これらのポテンシャルは次の波動方程式を満足する。

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \psi - \frac{1}{r^2} \psi = \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (8.55)(8.56)$$

(*) R.M.Davies, Phil.Trans.Roy.Soc. **A240**(1948)375,

(**) R.Folk, et.al, Jour.Acoust.Soc.Am. **30**(1958)552.

(***) J.Miklowitz, loc.cit.,

関係する応力テンソル成分は

$$\tau_{rr} = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \quad (8.58)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) \right\} \quad (8.59)$$

$$\tau_z = \lambda \nabla^2 \phi + 2\mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\psi) \right) \quad (8.60)$$

これらの式の解は棒端面と側面の次の境界条件を満足しなければならない。

$$z=0, \quad 0 < r < a \quad \tau_z(r, 0, t) = -P H(t) \quad (8.61)$$

$$u(r, 0, t) = 0 \quad (8.62)$$

$$r=a, \quad z > 0 \quad \tau_r(a, z, t) = 0 \quad (8.63)$$

$$\tau_{rz}(a, z, t) = 0 \quad (8.64)$$

さらに、無限遠の条件 ($z \rightarrow \infty$ で応力が0) と初期静止の条件

$$\phi(r, z, 0) = \dot{\phi}(r, z, 0) = \psi(r, z, 0) = \dot{\psi}(r, z, 0) = 0 \quad (8.65)$$

を考慮する。式(8.62)(8.53)より $z=0$ におけるポテンシャルの関係式

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (8.66)$$

を得る。これより式(8.60)の τ_z に含まれる ψ を消去すれば式(8.61)より

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \phi = -P H(t)$$

となる。ここに ∇^2 は式(8.57)によって定義されるラプラス演算子である。波動方程式(8.55)を満たす ϕ は $z=0$ で次の様にも書ける。

$$\rho \ddot{\phi} = -P H(t) \quad (8.67)$$

このことから

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (8.68)$$

8.5.1 厳密解析 式(8.53)-(8.60), (8.63)-(8.65) そして(8.67)-(8.68)によって述べられた問題に積分変換法を適用してみる。本問の半無限領域 $z \geq 0$ 対し、 z についてのFourier sine及びcosine変換を用いる。これらの変換は式(7.26)(7.28)に定義されているように

$$\text{sine変換として} \quad f^s(\xi) = \int_0^{\infty} f(z) \sin(\xi z) dz$$

$$\text{cosine変換として} \quad f^c(\xi) = \int_0^{\infty} f(z) \cos(\xi z) dz$$

である。式(8.67)(8.68)の境界条件より ψ に対してはcosine変換を、 ϕ に対してはsine変換を用いることができる。この他に、時間 t の依存性を消去するためにLaplace変換を用いる。波動方程式(8.55)(8.56)を初期条件(8.65)と境界条件(8.67)(8.68)を考慮しながら積分変換すると次のようになる。

$$\frac{d^2 \bar{\phi}^s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{\phi}^s}{dr} + \alpha^2 \bar{\phi}^s = \frac{P \xi}{\rho p^3} \quad (8.69)$$

$$\frac{d^2 \bar{\phi}^c}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \bar{\phi}^c}{dr} + \left(\beta^2 - \frac{1}{r^2} \right) \bar{\phi}^c = 0 \quad (8.70)$$

$$\text{ここに} \quad \alpha^2 = -\frac{p^2}{C_L^2} - \xi^2, \quad \beta^2 = -\frac{p^2}{C_T^2} - \xi^2 \quad (8.71 \text{ a, b})$$

棒の中心で有界な式(8.69)(8.70)の解は

$$\bar{\phi}^s = A J_0(\alpha r) + \frac{P \xi}{a^2 \rho p^3} \quad (8.72)$$

$$\bar{\phi}^c = B J_1(\beta r) \quad (8.73)$$

まだ考慮されていない条件は $r=a$ の円柱側面で応力 τ_r と τ_{rz} が0になる条件である。式(8.58)にLaplace変換とFourier sine変換を適用し、式(8.72)(8.73)を用いれば $r=a$ において

$$\begin{aligned} & [-(\beta^2 - \xi^2) J_0(\alpha a) + 2 \frac{\alpha}{a} J_1(\alpha a)] A + 2 \left[\beta \xi J_0(\beta a) - \frac{\xi}{a} J_1(\beta a) \right] B \\ & = - \frac{\lambda P \xi}{(\lambda + 2\mu) \mu p \alpha^2} \end{aligned}$$

同様に式(8.59)にLaplace変換とFourier cosine変換をすれば $r=a$ で

$$2 \alpha \xi J_1(a \alpha) A + (\beta^2 - \xi^2) J_1(a \beta) B = 0$$

これらの式の解は

$$A = - \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \frac{P \xi}{\mu p} \frac{(\beta^2 - \xi^2) J_1(\beta a)}{\alpha^2 D} \quad (8.74)$$

$$B = - \frac{2 \lambda}{(\lambda + 2\mu)} \frac{P}{\mu p} \frac{1}{\alpha} \frac{\xi^2 J_1(\alpha a)}{D} \quad (8.75)$$

ここに

$$D = \frac{2 \alpha}{a} (\beta^2 + \xi^2) J_1(\alpha a) J_1(\beta a) - (\beta^2 - \xi^2)^2 J_0(\alpha a) J_1(\beta a) - 4 \alpha \beta \xi^2 J_1(\alpha a) J_0(\beta a) \quad (8.76)$$

軸方向の物体点速度は

$$v(r, z, t) = \frac{\partial w}{\partial t}$$

で与えられるので変位ポテンシャルで表わすと式(8.54)より

$$v(r, z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\}$$

となる。Fourier cosine変換とLaplace変換を用いれば

$$\bar{v}^c = \frac{P}{\rho p^2} + p \xi \bar{\phi}^s + \frac{p}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{\phi}^c)$$

である。これを次のように書きかえる。

$$\bar{v}^c = \frac{P}{\rho} \frac{1}{(p^2 + \xi^2 C_L^2)} - \frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)} \frac{P \xi^2 N}{\mu \alpha^2 D} \quad (8.77)$$

$$\text{ここに} \quad N = (\beta^2 - \xi^2) J_0(r \alpha) J_1(a \beta) - 2 \alpha \beta J_0(r \beta) J_1(a \alpha) \quad (8.78)$$

そして D は式(8.76)で与えられるものである。

8.5.2 逆変換 この逆変換が本解析の主要な仕事になる。形式的には

Laplace変換は

$$v^c = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \bar{v}^c e^{pt} dp \quad (8.79)$$

線荷重や点荷重を受ける層の応答に対しては複素 p 面における積分評価はコーシーの留数定理を応用することによってなされる。その積分路は左半面内で原点から無限長の半径を持った半円によって閉じたものである。式(8.77)の分子と分母に β を乗じ、それぞれの Bessel 関数を無限級数におきかえれば α と β について偶数乗の形になる。したがって α と β に根号が付いていても複素 p 面内には分岐点は存在しない。無限遠弧上では Bessel 関数が大きな変数にたいする漸近形によって置き換えられる。無限遠極限ではその結果円弧上の積分値が 0 になる。したがって元の積分は左半面内にある留数和に $2\pi i$ を乗じたものに等しい。式(8.77)の右辺の二つの項それぞれに極 $p = \pm \xi C_L$ がある。しかし、これらの極による留数は互いに打ち消し合う。また残りの極は式(8.76)で定義された関数 $D(p, \xi)$ の値を 0 とする p 面上の点である。まず $p = i\omega$ と置いてみれば方程式 $D(p, \xi) = 0$ は棒の縦振動に対する周波数方程式(6.131)と同形になる。よって式(8.79)の被積分関数は任意の ξ に対し $p = i\omega_n$ によって定められる p 面の虚軸上に沿う無限個の極を持っている。ここに関数 $\omega_n(\xi)$ は棒の縦波の角周波数である。これらの留数からの寄与を考えれば、 v^0 に関する次式を得る。

$$v^0 = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{P}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} 2i \xi^2 M_n(\omega_n, \xi) \sin(\omega_n t) \quad (8.80)$$

ここに

$$M_n(\omega_n, \xi) = \left(\frac{1}{\alpha^2} \frac{N}{\partial D / \partial p} \right)_{p=i\omega_n} \quad (8.81)$$

この関数は ξ について偶である。Fourier cosine 逆変換を用いて

$$v = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \frac{P}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} I_n \quad (8.82)$$

ここに

$$I_n = -\frac{4i}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 M_n(\omega_n, \xi) \sin(\omega_n t) \cos(\xi z) d\xi \quad (8.83)$$

層に対する問題と同様に式(8.82)の積分は解析的手法によって厳密に評価することは、すぐにはできない。しかしながら停留位相法によって十分満足のゆく近似解を得ることができる。

8.5.3 長時間解 ここでは十分に時間の経過した後における物体点の速度を求める事を考えてみる。さて、式(8.82)にあらわれる積分は

$$I_n = \frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 M_n(\omega_n, \xi) \mathbf{I} \{ \exp[i(\xi z - \omega_n t)] - \exp[i(\xi z + \omega_n t)] \} d\xi \quad (8.84)$$

無次元時間 $C_L t/a$ の大きな値に対して停留位相法により上式の近似評価する。8.3 節に示した様に周波数スペクトルのそれぞれの分岐による値は高々 $(C_L t/a)^{-1/2}$ のオーダーである。ただし $(C_L t/a)^{-1/3}$ のオーダーとなる群速度の停留位置 $x/C_L t$ を除く。その他の I_n に与える値は ξ 軸上の極によるものである。しかしながら $\partial D / \partial p$ が実数の ξ にたいしては 0 点を持たないということが第 8.3 節で示した型の変数によって示すことができる。棒に対し 0 とならない $\partial D / \partial p$ の変数が Skalak^(*) によって与えられている。しかしながら $\partial D / \partial p$ の 0 となる値は ξ 軸上の極に対して生じるポテンシャルだけとは限らない。本問題ではたまたま最低次モードの寄与に対し ω_1 が $\xi=0$ の近傍で ξ に比例する。従って分母に α^2 の項が存在することにより $\xi=0$ で一位の極になりうる。また最低次モードに対する $\xi=0$ 点は、停留位相点でもあり停留群速度点でもある。このように条件が組み合わさって時間的に減衰しにくい応答への特別な寄与が生まれる。これらはおおかた以前に引用した Skalak の研究に順じた方法により求められる。式(6.135)に従えば ξ の小さな値に対し最低次縦振動モードの角周波数は

$$\omega_1 = C_b \xi - \gamma \xi^3 \quad (8.85)$$

C_b は棒波速度で

$$C_b = (E/\rho)^{1/2} \quad (8.86)$$

γ は

$$\gamma = (1/4) v^2 a^2 C_b \quad (8.87)$$

である。 $M_1(\omega_1, \xi)$ に

$\omega_1 = C_b \xi$ を代入し、次の極限を考える。

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 M_1(\omega_1, \xi) = (1/2) i \mu C_b^2 / (\lambda C_b) \quad (8.88)$$

I_1 に対する本質的な寄与は ξ を微小数として $\xi < \epsilon$ に対する式(8.84)の積分範囲の極限をとることによって得られる。

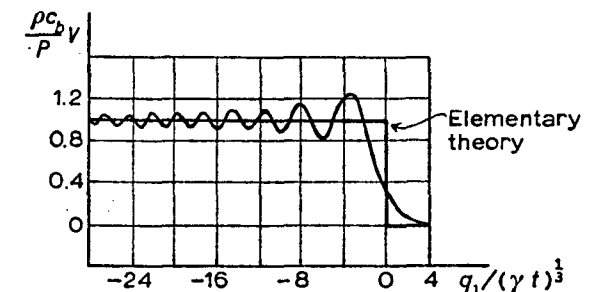


図 8.6 $z = C_b t$ 近辺の物体点速度

(*) R. Skalak, Jour. Appl. Mech., 24 (1957) p.59,

$$I_1 = -\frac{\mu C_b^2}{\pi \lambda C_b} \mathbf{I} \int_0^{+\varepsilon} \{ \exp[i(\xi z - \omega_1 t)] - \exp[i(\xi z + \omega_1 t)] \} d\xi / \xi \quad (8.89)$$

これらの積分の上限を再び ∞ に広げる。なぜならば、これによって加えられた積分が $(C_b t/a)^{-1/2}$ のオーダーだからである。つづいて式(8.85)の第一項の $\omega_1 = C_b \xi$ を代入すれば積分評価ができて初等理論にもとづいて次の解を得る。

$$v(z, t) = [P/(C_b \rho)] H(C_b t - z) \quad (8.90)$$

より近似度をあげたものは ω_1 に対する式(8.85)を用いることによって、得られ次の形になる。

$$I_1 = -\frac{\mu C_b^2}{\pi \lambda C_b} [J_1 + J_2]$$

$$\text{ここに } J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin[\xi(z - C_b t) + \gamma \xi^3 t] \frac{1}{\xi} d\xi,$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin[-\xi(z - C_b t) + \gamma \xi^3 t] \frac{1}{\xi} d\xi,$$

積分変数変換により、これらの積分は

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin[q_1 \eta + \eta^3/3] \frac{1}{\eta} d\eta, \quad (8.91)$$

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin[q_2 \eta + \eta^3/3] \frac{1}{\eta} d\eta, \quad (8.92)$$

$$\text{ここに } q_1 = (z - C_b t)/(3\gamma t)^{1/3}, \quad q_2 = -(z + C_b t)/(3\gamma t)^{1/3}.$$

式(8.91)(8.92)の形より、次のAiry積分 $Ai(q)$ の表示をもちいる。

$$Ai(q) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(q\eta + \eta^3/3) d\eta$$

$$\text{従って } J_1 = \int_0^{q_1} Ai(s) ds + (1/6), \quad J_2 = \int_0^{q_2} Ai(s) ds + (1/6),$$

となる。1/6は q_1 または $q_2=0$ の時の J_1, J_2 の値としてあらわれる。 t の大きなときは $-2/3$ に近づくので初等解 $v=P/\rho C_b$ を得る。 t の小さな値では積分値は0になる。従って波頭 $z=C_b t$ のある距離範囲の前方と後方では改良近似値は初等理論によるものと一致する。数値解を図8.8に示し、波頭 $z=C_b t$ の近辺で物体点の速度は連続的に徐々に立ちあがる。 (Chap. 8 end)

【問 8.1】長さ L の棒を考える。 $x=0$ の端が固定され、他端 $x=L$ に荷重 $p(t)$ が作用するとすれば、棒を支配する波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{C_b^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \text{ただし } C_b^2 = E/\rho$$

である。初期静止の条件のもとに、片側 Laplace変換された変位 $\bar{u}(x, p)$ を求めれば

$$\bar{u}(x, p) = \frac{\bar{p}(p)}{E A} \frac{C_b}{p} \left\{ \frac{\exp(px/C_b) - \exp(-px/C_b)}{\exp(px/C_b) + \exp(-px/C_b)} \right\}$$

となることを示せ。これを次の級数展開

$$[1 + \exp(-2pL/C_b)]^{-1} = 1 - \exp(-2pL/C_b) + \exp(-4pL/C_b) - \dots$$

によって各項ごとに逆変換しようとするれば、それぞれの項は現象上どのような意味あいをもっているか。また、一方、 p 面の複素積分によって

$$\frac{1}{p} \frac{\sinh(px/C_b)}{\cosh(px/C_b)}$$

を Laplace逆変換する方法によるならば $u(x, t)$ はどのように求まるか。そしてその解の物理現象上の意味あいを説明せよ。

【問 8.2】Timoshenko梁の運動を支配する方程式は(6.150)(6.151)である。特性を決定する式を求め、特性曲線に沿った微分方程式を導け。

【問 8.3】 $z=0$ の断面に変位分布の与えられる半径 a の半無限長弾性円柱($0 \leq z < \infty$)を考える。その周方向変位の分布を $v(r, 0, t) = (r^2/a) \sin(\omega t)$ として、定常応答状態の周方向変位を求めよ。ただし側面は自由面とする。

【問 8.4】前問の円柱は $z=0$ の端面で軸対称境界条件

$$\tau_z(r, 0, t) = \tau_0 \sin \omega t; \quad u(r, 0, t) = 0$$

が与えられた時、どのような応答となるか。定常状態の変位分布を求めよ。

【問 8.5】厚さ $2h$ の弾性層が面外線荷重を急激に受ける時の境界条件として

$$y=0 \text{ で } \tau_{yz} = T_0 \delta(x) H(t); \quad y=-2h \text{ で } \tau_{yz} = 0$$

そして初期静止の条件を与えたときの応答を考える。

片側 Laplace変換と両側 Laplace変換をそれぞれ時間と x 座標に適用して \bar{w}^* めよ。そのままの \bar{w}^* にCagniard-de Hoop法が使えないことを確かめよ。

p が十分大きいとして \bar{w}^* の分母の指数関数を、問 8.1と同様に展開形に置き換え、項別にCagniard-de Hoop法を適用して逆変換をせよ。その各項の物理的な意味はなにか。

【問 8.6】前問の解は時間の大きいときには適しない。そこで、座標原点を層の中央面にとり、問題を対称問題と反対称問題に分割して再検討する。片側 Laplace 変換と Fourier 指数変換をそれぞれ時間と x 座標にほどこして \bar{w}^* を求めよ。そして複素積分によって Laplace 逆変換を考えよ。最低次モードからの寄与を考えて、Fourier 逆変換形の積分を評価せよ。

【問 8.7】三層から成るサンドイッチ積層がある。その芯材層と表面層の厚さをそれぞれ $2h$ と a とする。端面 ($x=0$) に $\tau_{xz} = \tau_0 H(t)$ の面外せん断応力が作用し、上下両面 $y = \pm(a+h)$ が自由であるとして、この層の応答を問題 6.5 の結果を参考にして調べよ。そして x の大きいときの $y = \pm h$ における界面応力 τ_{yz} を求めよ。

【問 8.8】半径 a の無限に長い円柱がある。その側面に θ に無関係なリング状のネジリ線荷重が働くとして次の様な境界条件

$$r = a \quad \text{で} \quad \tau_{r\theta} = T_0 \delta(z) H(t) \quad \tau_{rz} = \tau_{rr} = 0$$

と初期静止条件を与えたとき

〔a〕円柱の過渡応答を級数和の形で求めよ。初項は容易に評価出来るから求めよ。残りの項は積分の級数和のままよい。

〔b〕長さ $|z|=L$ の有限円柱とすれば、〔a〕の解はどの時間範囲まで有効か。もし $z = \pm L$ で固定されているならば任意時間において成り立つ解を作るためには〔a〕の結果をどのように用いたらよいか。

【問 8.9】半径 a の無限に長い円柱がある。その側面に θ に無関係な垂直表面荷重が部分的に働き 次の様な境界条件

$$r = a: \quad |z| < b \quad \text{で} \quad \tau_{rr} = \tau_0 H(t)$$

$$|z| > b \quad \text{で} \quad \tau_{rr} = 0$$

$$-\infty < z < \infty \quad \text{で} \quad \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0$$

となる時、 z の大きい位置の物体点速度 $\partial w(r, z, t) / \partial t$ を求めよ。

【問 8.10】厚さ $2h$ の半無限長弾性単層がある。 $y = \pm h$ の両面が自由であり $x = 0$ の端面に次のような拘束があるとき

$$\tau_x(0, y, z, t) = T_0 \delta(z) H(t)$$

$$v(0, y, z, t) = w(0, y, z, t) = 0$$

初期静止条件のもとで、 x の十分大きい場所の物体点速度 $\partial v(x, y, 0, t) / \partial t$ を求めよ。

第9章

亀裂による弾性波の回折

9.1 混合境界値問題

一般的に言えば混合境界値問題とは互いに他を補う境界領域上でそれぞれ異なった型の境界条件を与える問題である。たとえば境界 S を持つ空間体 B に対し

$$\text{部分境界 } S_1 \text{ 上で } u_i = U_i(\mathbf{x}, t) \quad (9.1)$$

$$\text{残りの境界 } S - S_1 \text{ 上で } n_{ij} \tau_{ji} = t_i(\mathbf{x}, t) \quad (9.2)$$

と条件が与えられることによって定義される。この種の多くの問題はかなり高度な数学的取扱いを必要とする。前章で扱った弾性波解析の標準的な手法はそのまま用いることはできない。そのための別の解法の一つとして積分方程式による方法がある。

弾性問題を例に挙げれば、表面 S に働く（接線もしくは垂直な）点荷重によって物体内部に生ずる弾性場が求められていれば、式(9.1)(9.2)で与えられる混合境界値問題の変位解は、 $S - S_1$ 上でわかっている応力ベクトルと S_1 上の未知の応力ベクトルによって積分表示することができる。この積分表示と境界条件(9.1)のあたえられた変位より S_1 上に作用する未知の応力ベクトルをもとめるための積分方程式が導かれる。この積分方程式を解いて得られる応力ベクトルを積分表示解に代入すれば変位場がもとめられる。

残念ながら最も簡単な場合を除いて動弾性混合境界値問題に現れる積分方程式を解くのは難しいことが多いが、物体が半空間を占め、かつ互いに他を補う境界面が S_1 と $S - S_1$ の半平面のときのある場合において、その積分方程式系はWiener-Hopfの技法を併用する積分変換法によって解ける。

混合境界値問題として定式化される動弾性問題の例として、剛体の急速な押し込みや亀裂による弾性波の回折などがあるが、本章では半無限長亀裂による平面衝撃波の回折現象を主眼に述べる。この問題はWiener-Hopfの技法により首尾よく解ける。

波の介在物による散乱現象は亀裂だけでなく円柱や球に対しても解析が試みられている。^(*)

9.2 面外せん断運動

最も簡単な動弾性混合境界値問題は半無限空間の面外せん断運動に関するものである。これらの運動は二次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \quad (9.3)$$

に支配される。ここに

$$s = C_T t, \quad C_T = (\mu / \rho)^{1/2} \quad (9.4)$$

そして $w(x, y, s)$ は xy 面に垂直な変位である。このような波動場において、恒等的に0とならない応力は

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{と} \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9.5a, b)$$

である。さて次の混合境界条件を考える。

$$y = 0, \quad x < 0 \quad \text{で} \quad \tau_{yz} = \tau(x, s) \quad (9.6)$$

$$y = 0, \quad x \geq 0 \quad \text{で} \quad w = 0 \quad (9.7)$$

これらの境界条件によって設定される問題は、 $y \geq 0$ を占める半空間の表面で片側半面 ($x \geq 0$) にわたって変位が拘束され残りの半面 ($x < 0$) で応力ベクトルが規定されるものとし、さらに半空間が初期静止しているものとする。

本節で式(9.3)から(9.7)によって定義される問題はNeumannの境界条件^(2*)に対するGreen関数を用いて解かれる。ここでのGreen関数とは z に独立な面外せん断力が境界 $y=0$ 上の位置 $x=x_0$ において時刻 $s=s_0$ のデルタ関数によって与えられるときの解で、時刻 t で位置 x, y に生ずる変位の応答を表わす。この変位場を $G(x-x_0, y; s-s_0)$ のように表記する。

^(2*)C.-C.Mow, Y.-H.Pao, "The diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations", Report R-482-PR, The Rand Corporation(1971)

9.2.1 Green 関数 Green 関数は斉次初期条件と次の境界条件に対する式(9.3)の解である。

$$y = 0 : \tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \delta(x-x_0) \delta(s-s_0) \quad (9.8)$$

境界条件式(9.8)は時刻 $s=s_0$ で $x=x_0$ に作用する集中インパルス面外せん断荷重を表わしている。もともと静止していた半空間に対しては式(9.8)によって生ずる変位場は容易に導かれて

$$G(x-x_0, y; s-s_0) = -\frac{1}{\pi \mu R} H\{(s-s_0) - [(x-x_0)^2 + y^2]^{1/2}\} \quad (9.9)$$

ここに $H\{\}$ はステップ関数であり、また R は次の置き換えである。

$$R = [(s-s_0)^2 - (x-x_0)^2 - y^2]^{1/2} \quad (9.10)$$

式(9.9)は $x=x_0, y=0$ から生ずる円柱波で、波頭の様相を図9.1に示す。位置 \bar{x}, \bar{y} に到着するのは

$[(\bar{x}-x_0)^2 + \bar{y}^2]^{1/2} = \bar{s} - s_0$ の時である。逆に時刻 $s=\bar{s}$ の位置 \bar{x}, \bar{y} に対する依存領域は \bar{x}, \bar{y} を中心とする半径 $\bar{s} - s_0$ の円になる。時刻 $s=\bar{s}$ のとき $s=s_0$ に作用する外乱はそれらがその円内に作用するときに限って \bar{x}, \bar{y} における場の変数に影響を及ぼす。

\bar{x}, \bar{y} と \bar{s} で表わされる時空間での依存領域は一般的表現で次式で定義される円錐となるのが容易にわかるだろう。

$$(\bar{s} - s) - [(\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2]^{1/2} \geq 0; \quad \bar{s} \geq s \geq 0 \quad (9.11)$$

その円錐は図9.2に示されている。

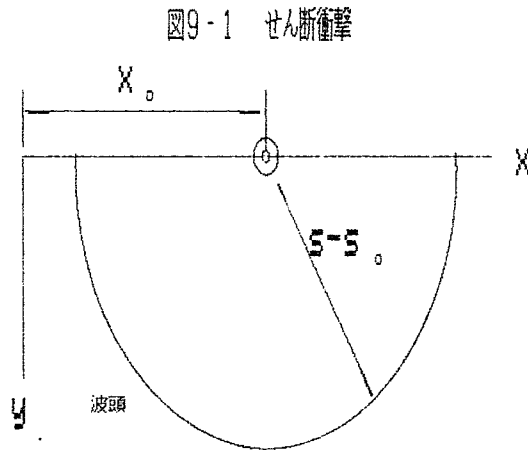


図9-1 せん断衝撃

$$y=0 \text{の表面応力が} \quad \tau_{yz} = \tau(x, s) \quad (9.12)$$

となる時、 $y \geq 0$ の半空間における変位は

$$w(x, y, s) = -\frac{1}{\pi \mu} \iint_A \frac{\tau(x_0, s_0)}{R} dx_0 ds_0 \quad (9.13)$$

の積分表示で与えられる。ただし R は式(9.10)で与えられるものである。

A は円錐を与える式(9.11)の内側にあたる xs 面の面積である。

$y > 0$ に対しては円錐と xs 面との交差曲線は双曲形である。図9.3にはその交差曲線と x 軸とに囲まれた断面積の xs 面への投影を示す。式(9.13)の積分は影を付けた面積にわたるものである。すなわち

$$w(x, y, s) = -\frac{1}{\pi \mu} \int_0^{s-y} ds_0 \int_{x-x^*}^{x+x^*} \frac{\tau(x_0, s_0)}{R} dx_0 \quad (9.14)$$

ただし

$x^* = [(s-s_0)^2 - y^2]^{1/2}$ 表面に働く応力が影を付けた面積に渡って一様である特別な場合を考える。

$$\tau(x, s) = \tau_0 f(s)$$

とおけば x_0 の積分で π が出て

$$w(x, y, s) = -\frac{1}{\mu} \int_0^{s-y} f(s_0) ds_0 \quad (9.15)$$

これは正に運動そのものが物体内部に伝播する平面波にほかならない。

第二の例として、表面に作用する応力が $\tau_{yz} = H(-x) f(s)$ となる場合である。 x が正の場所の応答を求めるとすれば、図9.3を参考にして

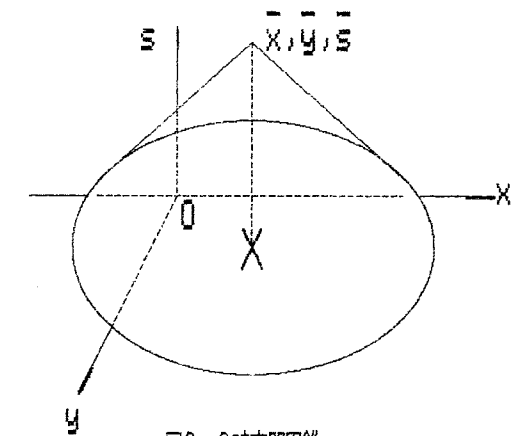


図9-2 時空間円錐

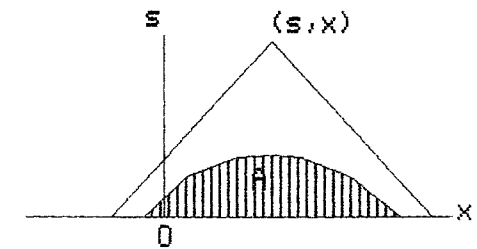


図9-3 円錐断面の投影

$$w(x,y,s) = -\frac{1}{\pi \mu} \int_0^{s-r} f(s_0) ds_0 \int_{x-x^*}^0 \frac{1}{R} dx_0 \quad (9.16)$$

ここに $r^2=x^2+y^2$ である。 x_0 による積分は容易に求まり

$$w(x,y,s) = \frac{1}{\pi \mu} \int_0^{s-r} f(s_0) \left\{ \sin^{-1}(x/x^*) - \frac{\pi}{2} \right\} ds_0 \quad (9.17)$$

外荷重の時間依存が δ 関数状と考えられるときは、 $f(t) = \tau_0 \delta(t)$ とおいて積分する。極座標 $x=r \cos \theta, y=r \sin \theta$ を導入して $s=C_T t$ の関係を用いると

$$w(r, \theta, t) = \frac{C_T \tau_0}{\pi \mu} \left\{ \sin^{-1} \left[r \cos \theta / (C_T^2 t^2 - r^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \right] - \frac{\pi}{2} \right\} H(C_T t - r) \quad (9.18)$$

となり $0 < \theta < \pi/2$ の範囲で成り立つ。明らかに変位波は円柱波である。 $\pi/2 < \theta < \pi$ の領域でも円柱波が生じ、さらに平面波の存在が検証できる。その波形パターンを図9.4 にしめす。円柱波は表面荷重分布が不連続であるために生ずる。変位解(9.18)を用いて、せん断応力を算出すれば $0 < \theta < \pi/2$ のとき

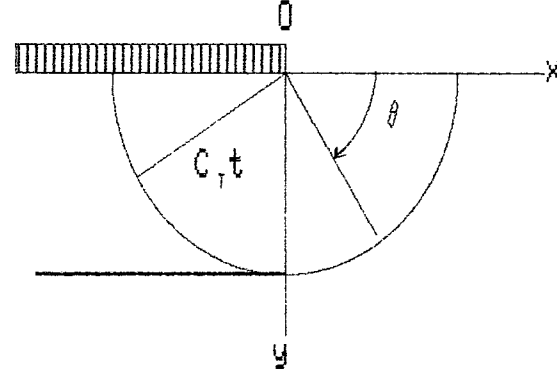


図9-4 波形パターン

$$\tau_{\theta z} / \tau_0 = -\frac{C_T}{\pi} \frac{(C_T^2 t^2 - r^2)^{1/2} \sin \theta}{C_T^2 t^2 - r^2 \sin^2 \theta} H(C_T t - r) \quad (9.19)$$

この応力は θ を $\pi/2$ に近づけると、波頭で2乗平方根の特異性を持っている。

9.2.2 混合境界値問題 式(9.6)(9.7)の混合条件にもどって考える。

$y=0, x \geq 0$ における応力分布がわからないから積分(9.13)をそのまま求めることは出来ない。しかしその積分表示から $y=0, x \geq 0$ における未知応力を解くための積分方程式が導かれる。 $y=0$ に対する式(9.13)の積分領域Aは、円錐の頂点がxs面上にくることから図9.5 に点線で示す三角形となる。いま $x \geq 0$ における未知応力を

$$y=0, x \geq 0 ; \tau_{\theta z} = \sigma(x,s) \quad (9.20)$$

と記述すれば $y=0, \bar{x} \geq 0, \bar{s} \geq 0$ で変位が生じない式(9.7)の条件より $\sigma(x,s)$ に対する次の積分方程式を得る。 $\bar{s} \geq 0, \bar{x} \geq 0$ において

$$\iint_{A_1} \frac{\tau(x,s)}{[(\bar{s}-s)^2 - (\bar{x}-x)^2]^{1/2}} dx ds + \iint_{A_2} \frac{\sigma(x,s)}{[(\bar{s}-s)^2 - (\bar{x}-x)^2]^{1/2}} dx ds = 0 \quad (9.21)$$

領域 A_1 と A_2 は図9.5 に示した。

$s=x$ の線は円柱波波頭を表わしxs面上の上半面の擾乱を受けている領域と受けていない領域を分ける。

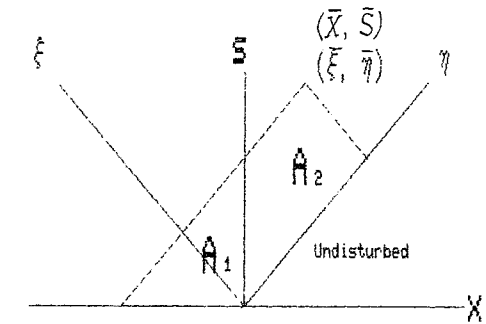


図9-5 影響領域

積分方程式(9.21)はxs面に

$$\xi = (s-x)/2^{1/2} \quad \eta = (s+x)/2^{1/2} \quad (9.22 \text{ a, b})$$

の特性座標を導入すれば取扱いが非常に簡単になる。式(9.21)

$$\text{の分母が } (\bar{s}-s)^2 - (\bar{x}-x)^2 = 2(\bar{\eta}-\xi)(\bar{\eta}-\eta) \quad (9.23)$$

のごとく変数分離できるからである。図9.5 で示されている点 \bar{x}, \bar{s} もしくは $\bar{\xi}, \bar{\eta}$ に対する積分方程式(9.21)は式(9.22 a, b)(9.23)を用いれば

$$\int_0^{\bar{\xi}} \frac{1}{(\bar{\xi}-\xi)^{1/2}} d\xi \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\tau(\xi, \eta)}{(\bar{\eta}-\eta)^{1/2}} d\eta + \int_0^{\bar{\xi}} \frac{1}{(\bar{\xi}-\xi)^{1/2}} d\xi \int_{\xi}^{\bar{\eta}} \frac{\sigma(\xi, \eta)}{(\bar{\eta}-\eta)^{1/2}} d\eta = 0 \quad (9.24)$$

と書きかえられる。 $\tau(\xi, \eta)$ は式(9.6) で与えられているから前式は明らかに次式を満たしさえすればよい。

$$\int_{\xi}^{\bar{\eta}} \frac{\sigma(\xi, \eta)}{(\bar{\eta}-\eta)^{1/2}} d\eta = -\int_{-\xi}^{\xi} \frac{\tau(\xi, \eta)}{(\bar{\eta}-\eta)^{1/2}} d\eta \quad (9.25)$$

式(9.25)は右辺が既知で未知関数 $\sigma(\xi, \eta)$ を求めるためのアーベル型の

積分方程式で解析的に解くことができる。両辺に $(\xi - \bar{\eta})^{-1/2}$ を掛けて $\bar{\eta}$ に渡って積分すると

$$\int_{\xi}^{\xi} \frac{d\bar{\eta}}{(\xi - \bar{\eta})^{1/2}} \int_{\xi}^{\bar{\eta}} \frac{\sigma(\xi, \eta)}{(\bar{\eta} - \eta)^{1/2}} d\eta$$

$$= - \int_{\xi}^{\xi} \frac{d\bar{\eta}}{(\xi - \bar{\eta})^{1/2}} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\tau(\xi, \eta)}{(\bar{\eta} - \eta)^{1/2}} d\eta$$

積分順序を交換して積分すれば

$$\sigma(\xi, \eta) = - \frac{1}{\pi(\eta - \xi)^{1/2}} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\tau(\xi, U)}{\eta - U} (\xi - U)^{1/2} dU \quad (9.26)^{(*)}$$

式(9.26)は $\xi \leq \eta$ (物理域では $0 \leq x \leq C_1 t$) における応力を示している。

正の時間に対して一定で、かつ x に関して一様な作用力を掘り下げて考えてみる。すなわち

$$\tau(x, s) = \tau_0 H(s) \quad \text{または} \quad \tau(\xi, \eta) = \tau_0 \quad (9.27)$$

式(9.26)の積分は

$$\sigma(\xi, \eta) = - \frac{2\tau_0}{\pi} \left\{ \left(\frac{2\xi}{\eta - \xi} \right)^{1/2} - \tan^{-1} \left(\frac{2\xi}{\eta - \xi} \right)^{1/2} \right\}$$

x, s 表示では

$$\sigma(x, s) = - \frac{2\tau_0}{\pi} \left\{ \left(\frac{s-x}{x} \right)^{1/2} - \tan^{-1} \left(\frac{s-x}{x} \right)^{1/2} \right\} \quad (9.28)$$

ただしこの式は $x \leq s$ で用いる。非常に小さな x にたいし $(x)^{-1/2}$ の特異性を示し

$$\sigma(x, t) \sim - \frac{2\tau_0}{\pi} \left(\frac{C_1 t}{x} \right)^{1/2} \quad (9.29)$$

最終的な変位解は式(9.27)(9.28)を積分表示式(9.13)に入れば得られる。

境界条件(9.27)と(9.7)は、また半無限長亀裂による無限体中の二つの面外せん断波の回折問題にも関係している。その一つは面外せん断により無限体中に突然、半無限亀裂が出来ることによって生ずる衝撃波に関するもので、もう一つはその亀裂に平行な波頭を有する平面波の半無限亀裂による回折に関する問題である。

(*) 358頁参照

本節では境界の半無限部分上に条件の与えられる時の二次元境界値問題を解く方法を議論した。この方法は境界条件が境界の有限部分に与えられる問題にも拡張できる。しかしながら二次元問題でも面内波動に関しては複雑になるので別法の Wiener-Hopf の技法として知られた方法を議論しよう。

9.3 Wiener-Hopf 技法

一般形が

$$f(x) + \int_0^{\infty} k(x-\eta) f(\eta) d\eta = g(x); \quad 0 \leq x < \infty \quad (9.30)$$

の積分方程式を解くために工夫された巧妙な手法である。式(9.30)の積分核 $k(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で定義される。関数 $g(x)$ は $0 \leq x < \infty$ で定義されるが $-\infty < x < 0$ では定義されない。関数 $f(x)$ は $-\infty < x < 0$ に対して恒等的に 0 であり $0 \leq x < \infty$ に対しては未知の関数である。解法には 7.2 節で議論した両側 Laplace 変換を用いる。ことに式(9.30)を解くにあたって次に述べるたたみこみの定理が役に立つ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi x) dx \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\eta) f(\eta) d\eta = k^* f^* \quad (9.31)$$

ここに k^* と f^* は、それぞれ $f(x), g(x)$ の両側 Laplace 変換で ξ の関数である。いま、次の定義をする。

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & ; (x \geq 0) \\ 0 & ; (x < 0) \end{cases} \quad (9.32)$$

$$h_-(x) = \begin{cases} 0 & ; (x \geq 0) \\ h(x) & ; (x < 0) \end{cases} \quad (9.33)$$

もし x のすべての範囲 ($-\infty < x < +\infty$) で式(9.30)の積分方程式が定義されているとすれば、それを解くのは困難ではない。そのため x の範囲を広げ式(9.30)を

$$f_+(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\eta) f_+(\eta) d\eta = g_+(x) + h_-(x) \quad (9.34)$$

と書きかえると好都合である。 $x \geq 0$ に対しては式(9.34)は式(9.30)となる。

$$x < 0 \text{ では } \int_{-\infty}^{\infty} k(x-\eta) f_+(\eta) d\eta = h_-(x) \quad (9.35)$$

x の範囲を拡張したためもう一つの未知関数 $h_-(x)$ が新たに入ってしまうが $k(x)$ などの関数がある弱い制限条件を満たすときには形式的に式(9.34)が両側 Laplace 変換法によって直接的に解くことができる。

γ は $k(x)\exp(-\gamma x)$ を $-\infty < x < +\infty$ の範囲で絶対可積分にする実数として求まるとしよう。また $0 < x < +\infty$ で $f_+(x)\exp(-\gamma x)$ と $g_+(x)\exp(-\gamma x)$ とが絶対可積分であり、 $-\infty < x < 0$ で $h_-(x)\exp(-\gamma x)$ が絶対可積分であるとすれば次の変換が定義できる。

$$k^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\xi x) k(x) dx \quad (9.36)$$

$$f^*(\xi) = \int_0^{\infty} \exp(-\xi x) f_+(x) dx \quad (9.37)$$

$$g^*(\xi) = \int_0^{\infty} \exp(-\xi x) g_+(x) dx \quad (9.38)$$

$$h^*(\xi) = \int_{-\infty}^0 \exp(-\xi x) h_-(x) dx \quad (9.39)$$

7.2 節の議論に基づけば $\text{Re}(\xi) = \gamma$ で $k^*(\xi)$ は正則である。さらに $f^*(\xi)$ と $g^*(\xi)$ は $\text{Re}(\xi) > \gamma$ で正則であり $h^*(\xi)$ は $\text{Re}(\xi) < \gamma$ で正則である。そして、たたみこみの定理を用いれば $\text{Re}(\xi) = \gamma$ の線上で式(9.34)は

$$f^* + k^* f^* = g^* + h^* \quad (9.40)$$

式(9.35)から明らかなように h^* が f^* に依存しているので何んの進展もないように思えるかもしれないが h^* を具体的に分からなくとも Wiener-Hopf の技法を用いれば f^* を求めることができる。

$1 + k^*(\xi) = 0$ は $\text{Re}(\xi) = \gamma$ の線上で根がないものとして次の節で述べるようにある弱い条件下で $1 + k^*(\xi)$ を因数分解する。すなわち

$$1 + k^* = m^* m^{*-1} \quad (9.41)$$

の形にする。ここに m^* と $(m^*)^{-1}$ は $\text{Re}(\xi) = \gamma$ の線上で有界であり $\text{Re}(\xi) > \gamma$ で正則である。また m^* と $(m^*)^{-1}$ も $\text{Re}(\xi) = \gamma$ の線上で有界であり $\text{Re}(\xi) < \gamma$ で正則である。したがって式(9.40)は

$$m^* f^* = \frac{g^*}{m^*} + \frac{h^*}{m^*} \quad (9.42)$$

と書換られる。引き続き g^*/m^* の項は次のように分解できる。

$$g^*/m^* = n^* + n^{*-1} \quad (9.43)$$

ここに n^* と n^{*-1} はそれぞれ $\text{Re}(\xi) > \gamma$ と $\text{Re}(\xi) < \gamma$ で正則である。式(9.43)を式(9.42)に代入すれば $\text{Re}(\xi) = \gamma$ 上で

$$m^* f^* - n^* = (h^*/m^*) + n^{*-1} \quad (9.44)$$

を得る。そこで $e^*(\xi) = m^* f^* / n^*$

$$e^*(\xi) = h^*/m^* + n^{*-1} \quad (9.46)$$

を定義すれば e^* と e^{*-1} はそれぞれ $\text{Re}(\xi) > \gamma$ と $\text{Re}(\xi) < \gamma$ で正則でありまた $\text{Re}(\xi) = \gamma$ 上で連続で互いに等しい。関数解析に基いて e^* は e^{*-1} の解析接続と考られる。したがって e^* と e^{*-1} は ξ 面のあらゆるところで正則な一つの整関数 $e^*(\xi)$ を表わしている。さて、次に、『 $e^*(\xi)$ が整関数であり、 $|e^*(\xi)|$ が複素面のすべての ξ に対して有界ならば、 $e^*(\xi)$ は定数である。』という Liouville の定理を用いる。その定数を決定するには、 ξ の特定の値を選び e^* または e^{*-1} を求めればよい。たとえば $|\xi| \rightarrow \infty$ としたとき $e^* = O(1)$ になることが示せれば、この定理よりその定数は 0 となる。したがって、この場合には式(9.45)から $f^*(\xi) = n^*/m^*$ (9.47) となる。式(9.32)と式(9.37)の定義を思い起こせば式(9.47)より関数 $f(\xi)$ は両側 Laplace 逆変換によって求まる。

以上に説明した積分方程式(9.30)の解法手順をまとめれば次の様になる。

- (1) 積分方程式の定義域を $-\infty < x < \infty$ に広げる。
- (2) 両側 Laplace 変換をする。
- (3) 解析接続領域 (オーバーラップした帯状領域) を決める。
- (4) 因数分解 $1 + k^* = m^* m^{*-1}$ をして $m^* f^* = (g^*/m^*) + (h^*/m^*)$ の形を作る。
- (5) $g^*/m^* = n^* + n^{*-1}$ のようにそれぞれの領域で正則な項に分けて $m^* f^* + n^* = (h^*/m^*) + n^{*-1}$ の形にする。
- (6) Liouville の定理より、領域を越えて等しい整関数は定数。従って、たとえば、 x の非常に小さな値に対する $f(x)$ の挙動より定数が求まる。このように物理的条件を考慮して決める事が多い。
- (7) 両側 Laplace 逆変換して解を求める。

一般にこの技法を用いるとき、最も大きな仕事となるのは因数に分解するところである。この段階において正則な二つの領域のオーバーラップは、必ずしも必要ではなくそれぞれの領域の境界線として $\text{Re}(\xi)=\gamma$ を共有していると考えればよい。また $|\xi| \rightarrow \infty$ で $O(|\xi|^{-1/2})$ ならばその関数が有界である必要もない。Louvilleの定理を利用するにあたり、このような条件の緩和が許される。

9.4 関数の分割

Wiener-Hopf の技法を用いる解法で難しい点は、多くの場合、隣接する半平面のそれぞれで正則な成分に関数を分割することである。式(9.41)と(9.43)のような分割は非常に簡単な問題では視察によって出来ることもあるが、その一般的な方法を考えておく必要があろう。

9.4.1 一般的方法 いくぶん一般的な条件下で

$$L(\xi) = L_-(\xi) + L_+(\xi) \quad (9.48)$$

の形に分割することが、 ξ 面における複素積分を用いて出来る。この二つに分割された関数は帯領域で一致させる必要はなく、ただ二つの半平面の隣接する境界直線 $\text{Re}(\xi)=\gamma$ に沿ってのみ一致が確認出来ればよい。

さて、関数 $L(\xi)$ が $p > 0$ の時

$$L(\xi) = O(|\xi|^{-p}); \quad |\xi| \rightarrow \infty \quad (9.49)$$

を満たすとしよう。そして次式で L_+ と L_- を定義する。

$$L_+(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{L(z)}{z-\xi} dz; \quad \text{Re}(\xi) > \gamma \quad (9.50)$$

$$L_-(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{L(z)}{z-\xi} dz; \quad \text{Re}(\xi) < \gamma \quad (9.51)$$

これらの複素積分は $\text{Re}(\xi) \approx \gamma$ のもとで絶対収束するものとする。それぞれの半平面で閉じた積分回路を考え、式(9.49)とジョルダンの補助定理を用いれば $L_+(\xi)$ と $L_-(\xi)$ はそれぞれ $\text{Re}(\xi) > \gamma$ と $\text{Re}(\xi) < \gamma$ で正則であることは明らかである。また $\text{Re}(\xi) = \gamma$ 上の点 $\xi_0 = \gamma + i\omega_0$ では次式で定義する。

$$L_+(\xi_0) = \lim_{\xi \rightarrow^R \xi_0} L_+(\xi), \quad L_-(\xi_0) = \lim_{\xi \rightarrow^L \xi_0} L_-(\xi) \quad (9.52)(9.53)$$

ただし \rightarrow^R と \rightarrow^L はそれぞれ右半面と左半面での極限移行を表わす。

$$\text{このとき} \quad L(\xi_0) = L_+(\xi_0) + L_-(\xi_0) \quad (9.54)$$

の成立を示そう。これは式(9.52)(9.53)の極限を実際に行ってなされる。

もし、 $\Omega_1 < \omega_0 < \Omega_2$ ならば

$$\begin{aligned} L_+(\xi_0) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\Omega_1} \frac{L(z)}{z-\xi_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+i\Omega_2}^{\gamma+i\infty} \frac{L(z)}{z-\xi_0} dz \\ & - \frac{1}{2\pi i} \lim \int_{\gamma+i\Omega_1}^{\gamma+i\Omega_2} \frac{L(z)}{z-\xi} dz \end{aligned} \quad (9.55)$$

さらに

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \lim \int_{\gamma+i\Omega_1}^{\gamma+i\Omega_2} \frac{L(z)}{z-\xi} dz = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+i\Omega_1}^{\gamma+i\Omega_2} \frac{L(z)-L(\xi_0)}{z-\xi_0} dz \\ & - \frac{L(\xi_0)}{2\pi i} \lim \int_{\gamma+i\Omega_1}^{\gamma+i\Omega_2} \frac{dz}{z-\xi} \end{aligned} \quad (9.56)$$

いずれも \lim は ξ の ξ_0 への極限移行を表わす。もし ξ が ξ_0 に右半面で近づくなれば前式の右辺第2項は

$$-\frac{L(\xi_0)}{2\pi i} \lim \int_{\gamma+i\Omega_1}^{\gamma+i\Omega_2} \frac{dz}{z-\xi} = \frac{L(\xi_0)}{2} - \frac{1}{2\pi i} \text{Pr} \int_{\gamma+i\Omega_1}^{\gamma+i\Omega_2} \frac{L(z)}{z-\xi} dz \quad (9.57)$$

Prは積分の主値を取ることを示す。次に(9.56)(9.57)を(9.55)に入れ、 Ω_1 と Ω_2 を ω_0 に近付けて行くと

$$L_+(\xi_0) = \frac{L(\xi_0)}{2} - \frac{1}{2\pi i} \text{Pr} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{L(z)}{z-\xi_0} dz \quad (9.58)$$

同様な方法で

$$L_-(\xi_0) = \frac{L(\xi_0)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \text{Pr} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{L(z)}{z-\xi_0} dz \quad (9.59)$$

これら二つの式はPlemeljの方程式の特殊な場合にあたる。二つの式を加え合わせれば式(9.54)となる。

次に $\text{Re}(\xi) = \gamma$ 上での分割

$$K(\xi) = K_+(\xi)K_-(\xi) \quad (9.60)$$

を考える。ただし $K(\xi)$ は $\text{Re}(\xi) = \gamma$ 上で零点を持たない。ここで

$$\ln K(\xi) = \ln K_+(\xi) + \ln K_-(\xi) \quad (9.61)$$

と書き K_+ と K_- がそれぞれの半平面領域で零点を持たなければ対応する領域で $\ln K_+$ と $\ln K_-$ の各々は正則である。したがって $\ln K$ が式(9.49)を満たすならば $K(\xi)$ の積への分割は $\ln K(\xi)$ の和への分割に等しい。

このほか、複素面で積分をせずに因数を決める近似的な手法も考えられる。それは関数 $K(\xi)$ を簡単な $K'(\xi)$ で置き換える方法によるもので $K'(\xi)$ には $K(\xi)$ と同一の一般的特性を示すが労せず分割できるものを選ぶ。

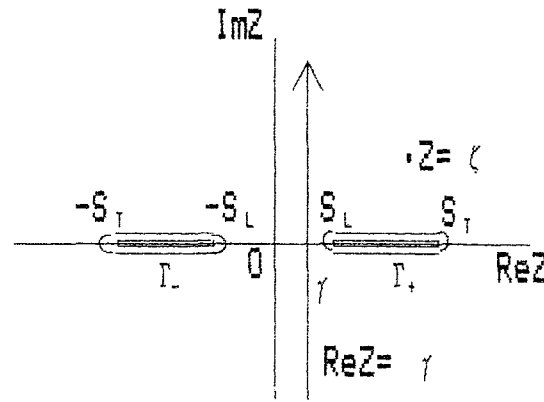


図9-6 z面上の分岐線

9.4.2 レーレー関数の分割例 動弾性問題に Wiener-Hopf の手法を応用するさいに、よく表われる関数の一つであるレーレー関数

$$R(\xi) = (s_T^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2(s_L^2 - \xi^2)^{1/2}(s_T^2 - \xi^2)^{1/2} \quad (9.62)$$

を複素 ξ 面の線あるいは帯領域で因数分解しなければならないことが多い。しかし関数 $\ln R(\xi)$ は条件(9.49)を満足しない。そのため $R(\xi)$ のかわりに

$$K(\xi) = \frac{(s_T^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2(s_L^2 - \xi^2)^{1/2}(s_T^2 - \xi^2)^{1/2}}{2(s_T^2 - s_L^2)(s_R^2 - \xi^2)} \quad (9.63)$$

とおけば $K(\xi)$ は 0 点をもたず、また $|\xi| \rightarrow \infty$ のとき $K(\xi) = 1 + O(\xi^{-2})$ である。したがって

$$\ln K_+(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\ln K(z)}{z-\xi} dz \quad ; \quad \text{Re}(\xi) > \gamma \quad (9.64)$$

$$\ln K_-(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\ln K(z)}{z-\xi} dz \quad ; \quad \text{Re}(\xi) < \gamma \quad (9.65)$$

図9.6 に示したように $\text{Im}(z) = 0$ で $s_L < |\text{Re}(z)| < s_T$ に沿う分岐線を入れ対数関数を一価関数にする。そして積分の主値を取る。

(*) 次頁参照

もし ξ が実数でなければ、式(9.64)(9.65)の積分は分岐線を囲むループ Γ_+ と Γ_- に変形されよう。そして

$$\ln K_+(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{s_L}^{s_T} \tan^{-1} \left(\frac{4z^2(z^2 - s_L^2)^{1/2}(s_T^2 - z^2)^{1/2}}{(s_T^2 - 2z^2)^2} \right) \frac{dz}{z-\xi} \quad (9.66)$$

一方、 $K_-(\xi)$ は $K_-(\xi) = K_+(-\xi)$ の関係より求まる。点 ξ を z 面の分岐線上側からあるいは下側から接近させれば経路 Γ_+ もしくは Γ_- は ξ の下側あるいは上側へ凹まねばならない。したがって K_+ または K_- を定義する積分は明らかに双方とも同時に特異性を持つことはない。よって、このような例外的な場合も主値を考えることなく $K_+(\xi) = K(\xi)/K_-(\xi)$ を用いて求めることが出来よう。ただし特異積分にならないような K 関数を分母に選ぶものとする。

(***) 次頁参照

(*) 式(9.63)の成り立ち

$|\xi| \gg 1$ のときの漸近形を考れば $R(\xi)$ は

$$\begin{aligned} R(\xi) &\approx 4\xi^4 - 4s_T^2\xi^2 - 4\xi^4 \left(1 - \frac{s_L^2}{2\xi^2}\right) \left(1 - \frac{s_T^2}{2\xi^2}\right) \\ &= -4s_T^2\xi^2 + 2s_T^2\xi^2 + 2s_L^2\xi^2 \\ &= 2\xi^2(s_L^2 - s_T^2) \end{aligned}$$

また零点を取除くために $R(\xi) = 0$ の根 $\pm s_R$ で割った形を与える。

すなわち

$$K(\xi) = \frac{(s_T^2 - 2\xi^2)^2 + 4\xi^2(s_L^2 - \xi^2)^{1/2}(s_T^2 - \xi^2)^{1/2}}{2(s_T^2 - s_L^2)(s_R^2 - \xi^2)}$$

を $R(\xi)$ のかわりに考える。そうすると

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} K(\xi) = 1$$

となり、またどこにも零点がない。 $R(\xi) = 0$ の根 $\pm s_R$ 以外の根は

存在しない。あつとすれば無縁根である。

(*)式(9.66)の誘導

まず Γ_+ の周りの積分を考える。式(9.64)より

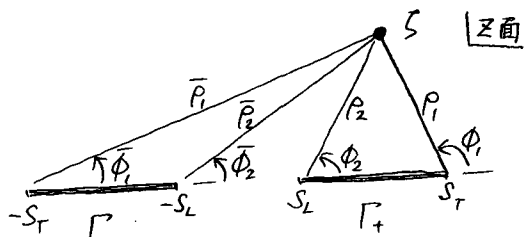
$$\ln K_+ = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{1}{z-s} \ln \left[\frac{(S_T^2 - 2z^2)^2 + 4z^2(S_L^2 - z^2)^{1/2}(S_T^2 - z^2)^{1/2}}{2(S_T^2 - S_L^2)(S_R^2 - z^2)} \right] dz$$

そこで右図のFのような分岐点を中心とする

極座標系を導入する。

$$(S_T^2 - z^2)^{1/2} = \sqrt{\bar{\rho}_1 \rho_1} e^{i(\bar{\phi}_1 + \phi_1)/2}$$

$$(S_L^2 - z^2)^{1/2} = \sqrt{\bar{\rho}_2 \rho_2} e^{i(\bar{\phi}_2 + \phi_2)/2}$$



$$\begin{cases} \bar{\rho}_1 \rho_1 = (S_T + x)(S_T - x) = (S_T^2 - x^2) \\ \bar{\phi}_1 + \phi_1 = \pi \\ \bar{\rho}_2 \rho_2 = (S_L + x)(x - S_L) = (x^2 - S_L^2) \\ \bar{\phi}_2 + \phi_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} \text{上側, } \tau \\ (S_T^2 - z^2)^{1/2} = i(S_T^2 - z^2)^{1/2} \\ (S_L^2 - z^2)^{1/2} = (x^2 - S_L^2)^{1/2} \end{cases}$$

$$\Gamma_- \text{ の下側 } z \text{ は } \begin{cases} \bar{\phi}_1 + \phi_1 = -\pi, \bar{\phi}_2 + \phi_2 = 0 \\ (S_T^2 - z^2)^{1/2} = -(S_T^2 - z^2)^{1/2} \\ (S_L^2 - z^2)^{1/2} = (x^2 - S_L^2)^{1/2} \end{cases} \begin{cases} \text{下側, } \tau \\ (S_T^2 - z^2)^{1/2} = -i(S_T^2 - z^2)^{1/2} \\ (S_L^2 - z^2)^{1/2} = (x^2 - S_L^2)^{1/2} \end{cases}$$

以上より

$$\ln K_+ = -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_L}^{S_T} \frac{1}{x-s} \ln \left[\frac{(S_T^2 - 2x^2)^2 + 4x^2 i (x^2 - S_L^2)^{1/2} (S_T^2 - x^2)^{1/2}}{2(S_T^2 - S_L^2)(S_R^2 - x^2)} \right] dx$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{S_T}^{S_L} \frac{1}{x-s} \ln \left[\frac{(S_T^2 - 2x^2)^2 - 4x^2 i (x^2 - S_L^2)^{1/2} (S_T^2 - x^2)^{1/2}}{2(S_T^2 - S_L^2)(S_R^2 - x^2)} \right] dx$$

被積分関数の分母が同じで積分方向が逆になっているから打ち消し合い、分子のみ残る。

$$\ln K_+ = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{S_L}^{S_T} \frac{1}{x-s} \ln \left| \frac{(S_T^2 - 2x^2)^2 + 4x^2 i (x^2 - S_L^2)^{1/2} (S_T^2 - x^2)^{1/2}}{2(S_T^2 - S_L^2)(S_R^2 - x^2)} \right| dx \right.$$

$$+ \int_{S_L}^{S_T} \frac{1}{x-s} i \arg \left[\frac{(S_T^2 - 2x^2)^2 + 4x^2 i (x^2 - S_L^2)^{1/2} (S_T^2 - x^2)^{1/2}}{2(S_T^2 - S_L^2)(S_R^2 - x^2)} \right] dx$$

$$- \int_{S_T}^{S_L} \frac{1}{x-s} \ln \left| \frac{(S_T^2 - 2x^2)^2 - 4x^2 i (x^2 - S_L^2)^{1/2} (S_T^2 - x^2)^{1/2}}{2(S_T^2 - S_L^2)(S_R^2 - x^2)} \right| dx$$

$$\left. - \int_{S_T}^{S_L} \frac{1}{x-s} i \arg \left[\frac{(S_T^2 - 2x^2)^2 - 4x^2 i (x^2 - S_L^2)^{1/2} (S_T^2 - x^2)^{1/2}}{2(S_T^2 - S_L^2)(S_R^2 - x^2)} \right] dx \right\}$$

$$\ln K_+ = -\frac{1}{2\pi i} \int_{S_L}^{S_T} \frac{1}{x-s} \left\{ i \arctan \left[\frac{4x^2 (x^2 - S_L^2)^{1/2} (S_T^2 - x^2)^{1/2}}{(S_T^2 - 2x^2)^2} \right] - \arctan \left[\frac{-4x^2 (x^2 - S_L^2)^{1/2} (S_T^2 - x^2)^{1/2}}{(S_T^2 - 2x^2)^2} \right] \right\} dx$$

→ (9.66)

9.2.2. 補遺: F-ベル型積分方程式の解

(A) $\int_{\xi}^{\eta} \frac{\sigma(\xi, \eta)}{\sqrt{\eta-\eta}} d\eta = -\int_{-\xi}^{\xi} \frac{\tau(\xi, \eta)}{\sqrt{\eta-\eta}} d\eta$ を $\sigma(\xi, \eta)$ について解け。

$$\int_{\xi}^{\xi} \frac{d\eta}{\sqrt{\xi-\eta}} \int_{\xi}^{\eta} \frac{\sigma(\xi, \eta)}{\sqrt{\eta-\eta}} d\eta = -\int_{\xi}^{\xi} \frac{d\eta}{\sqrt{\xi-\eta}} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\tau(\xi, \eta)}{\sqrt{\eta-\eta}} d\eta$$

$$\int_{\xi}^{\xi} d\eta \int_{\xi}^{\xi} \frac{\sigma(\xi, \eta)}{\sqrt{\xi-\eta}} \frac{1}{\sqrt{\eta-\eta}} d\eta = -\int_{\xi}^{\xi} \frac{d\eta}{\sqrt{\xi-\eta}} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\tau(\xi, \eta)}{\sqrt{\eta-\eta}} d\eta$$

$$\pi \int_{\xi}^{\xi} \sigma(\xi, \eta) d\eta = -\int_{\xi}^{\xi} \frac{d\eta}{\sqrt{\xi-\eta}} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\tau(\xi, \eta)}{\sqrt{\eta-\eta}} d\eta = -\int_{-\xi}^{\xi} \tau(\xi, \eta) d\eta \int_{\xi}^{\xi} \frac{d\eta}{\sqrt{\xi-\eta} \sqrt{\eta-\eta}}$$

$$= -\int_{-\xi}^{\xi} \tau(\xi, \eta) d\eta \cdot 2 \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{\eta-\eta}{\xi-\eta}} \right) \right]_{\xi}^{\xi}$$

よって $\pi \int_{\xi}^{\xi} \sigma(\xi, \eta) d\eta = -2 \int_{-\xi}^{\xi} \tau(\xi, \eta) d\eta \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{\xi-\eta}{\xi-\xi}} \right\}$

両辺を ξ で微分すると

$$\pi \cdot \sigma(\xi, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{\xi-\xi}} \int_{-\xi}^{\xi} \frac{\tau(\xi, \eta) \sqrt{\xi-\eta}}{\xi-\eta} d\eta$$

$\xi \rightarrow \eta, \eta \rightarrow u$ におきかえると式(9.26)が導出される。

(B) $f(x) = \int_a^x \frac{u(\xi)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} d\xi, (a \leq x < \infty)$ を $u(\xi)$ について解け。

次の公式を利用する。 $B(\cdot, \cdot)$ はベータ関数であるとて

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi \quad (\text{公式集 I, 222頁})$$

上式で $x \rightarrow \left(\frac{\xi^2 - x^2}{x^2 - \xi^2}\right), (\xi > x)$ とおくと次の $\int_{\xi}^{\xi} \frac{x dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2} \sqrt{x^2 - \xi^2}} = \frac{\pi}{2} \dots (a)$

$\frac{d}{dx} f(x)$ は連続関数であるとす。 したがって式(a)の両辺に $u(\xi)$ を乗じ区間 $[a, \xi]$ で ξ について積分し、 $\phi(x) = \int^x u(\xi) d\xi$ とおけば

$$\int_a^{\xi} d\xi \int_{\xi}^{\xi} \frac{u(\xi) \cdot x}{\sqrt{\xi^2 - x^2} \sqrt{x^2 - \xi^2}} dx = \frac{\pi}{2} \{ \phi(\xi) - \phi(a) \} \dots (b)$$

フーリエの積分順序変換公式により

$$\int_a^{\xi} \frac{x}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} dx \int_a^x \frac{u(\xi)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} d\xi = \frac{\pi}{2} \{ \phi(\xi) - \phi(a) \} \dots (c)$$

もし解があれば与式から

$$\int_a^z \frac{x f(x)}{\sqrt{z^2-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \int_a^z u(\xi) d\xi \quad \dots\dots (d)$$

両辺を z で微分して

$$u(z) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dz} \int_a^z \frac{x f(x)}{\sqrt{z^2-x^2}} dx \quad \dots\dots (e)$$

また $h(z) = \int_a^z \frac{x f(x)}{\sqrt{z^2-x^2}} dx \quad \dots\dots (f)$

とおけば $u(z) = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} h(z)$ であるから与式より

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_a^x \left\{ \frac{\partial}{\partial z} h(z) \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{x^2-\xi^2}} \quad \dots\dots (g)$$

が得られる。以上をまとめると式(e)より

$$f(x) = \int_a^x \frac{u(\xi)}{\sqrt{x^2-\xi^2}} d\xi \quad \text{に対して} \quad u(\xi) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{d\xi} \int_a^\xi \frac{x f(x)}{\sqrt{\xi^2-x^2}} dx \quad \dots\dots (h)$$

また式(f)(g)より関数 $h(z)$ を $f(x)$ に、 $f(x)$ を $u(\xi)$ に置きかえれば

$$f(x) = \int_a^x \frac{\xi u(\xi)}{\sqrt{x^2-\xi^2}} d\xi \quad \text{に対して} \quad u(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_a^\xi \frac{1}{\sqrt{\xi^2-x^2}} \left\{ \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right\} dx \quad \dots\dots (i)$$

9.5 水平偏向せん断波の回折

平面波が厚さのない半無限長介在物（スリット）によって回折されるときに生じる波動はWiener-Hopf の技法とCagniard-de Hoop法を併用する積分変換法によって巧妙に解析することが出来る。本節で半無限長スリットによる水平に偏った平面せん断波の回折を調べてみよう。入射変位波として

$$w^+(x,y,t) = G(t - s_T x \cos \alpha - s_T y \sin \alpha) \quad (9.67)$$

を考える。ここに

$$G(t) = H(t) \int_0^t g(s) ds \quad (9.68)$$

式(9.68)で $H(\)$ はヘビサイドのステップ関数を示し α は波面に立てた法線と x 軸とのなす角で、また $s_T = 1/C_T$ は横波のスローネスである。波頭がスリットの先端に当たる瞬間を $t=0$ とする。図9.7 は $t < 0$ の波頭状態を示す。入射角 α は $0 < \alpha < \pi/2$ の範囲に限定する。明らかにこの回折現象は

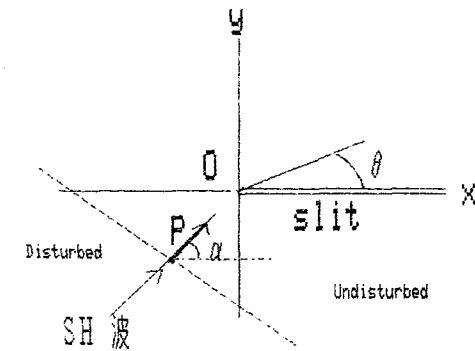


図9-7 座標系と入射波

入射波もスリットも z 座標に独立だから二次元である。もし $y=0, x > 0$ にスリットが無ければ入射波は $y=0$ 面に次の様なせん断応力を生じさせるはずである。

$$\tau_{yz} = -\mu s_T \sin \alpha g(t - s_T x \cos \alpha) H(t - s_T x \cos \alpha) \quad (9.69)$$

回折問題に対する解は、式(9.69)に等しくかつ符号を逆転させたせん断力がスリットの両岸 $y=\pm 0, x > 0$ に作用した時の媒体内に生じる波動を、入射波の場に重ね合わせるにより得られる。この重ね合わせによりスリット面の応力自由条件が満足される。重ね合わせるせん断力がスリットの両岸で大きさが等しく符号が反対だからこれによって生ずる波動は $y=0$ 面に関して反対称であり、 z 方向変位は $y=0, x \leq 0$ で 0 である。従って、この対称性より半平面 $y \geq 0$ を考えれば十分である。重ね合わせられるべき波動は $y=0$ で次の条件を満たさなければならない。

$$x > 0 ; \tau_{yz} = \mu s_T \sin \alpha g(t - s_T x \cos \alpha) H(t - s_T x \cos \alpha) \quad (9.70)$$

$$x \leq 0 ; w = 0 \quad (9.71)$$

場を支配する偏微分方程式は

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = s_T^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (9.72)$$

で初期条件は $w(x, y, 0) = \partial w(x, y, 0) / \partial t = 0$ である。式(9.70)~(9.72)は混合境界値問題を定めている。

境界条件式(9.70)と(9.71)は次のように書きかえられる。

$$y = 0, -\infty < x < \infty \quad \tau_{yz} = \tau_- + \tau_+ \quad (9.73)$$

$$w = w_+ \quad (9.74)$$

ただし、式(9.32)と(9.33)による表記法を用いている。すなわち式(9.70)から

$$\tau_+ = \mu s_T \sin \alpha g(t - s_T x \cos \alpha) H(t - s_T x \cos \alpha) H(x) \quad (9.75)$$

時間についての片側ラプラス変換式(7.20)を適用し、 x について両側ラプラス変換式(7.15)を用いれば、式(9.72)は常微分方程式となる。 $y \geq 0$ に対して有効なその式の解は

$$\bar{w}^* = A(p, \xi) \exp[-\{s_T^2 p^2 - \xi^2\}^{1/2} y] \quad (9.76)$$

である。 $A(p, \xi)$ は未知関数である。境界条件(9.73)と(9.74)は

$$\bar{\tau}_{yz}^* = \bar{\tau}_-^* + \bar{\tau}_+^* \quad (9.77)$$

$$\bar{w}^* = \bar{w}_+^* \quad (9.78)$$

に変換され、ここに $\bar{\tau}_+^*$ は式(9.75)より

$$\bar{\tau}_+^* = \frac{\mu s_T \bar{g}(p) \sin \alpha}{\xi + s_T p \cos \alpha} \quad (9.79)$$

式(9.76)と(9.78)より $y=0$ で $A(p, \xi) = \bar{w}_+^*$ を得るから、式(9.76)から得られる $\bar{\tau}_{yz}^*$ を式(9.77)に代入すれば

$$-\mu \{s_T^2 p^2 - \xi^2\}^{1/2} \bar{w}_+^* = \bar{\tau}_-^* + \bar{\tau}_+^* \quad (9.80)$$

これは明らかに式(9.40)の形になっている。そのため通常のWiener-Hopfの取扱いにより $A(p, \xi)$ の表式が導ける。まず、 ξ 面で $\bar{\tau}_+^*$ の解析的な挙動について見てみよう。境界条件(9.70)(9.71)に対する平面 $y=0, x < 0$ 上の応答解はスローネス s_T で伝播する円柱波が到来するまで静止の状態である。すなわち、ある一定の十分な時間 t_1 が経過するまで乱されないで、ある位置 $x_1 < 0$ に対

する $\tau_{yz}(x, 0, t)$ の応答を考えれば、そのラプラス変換形は次のようなる。

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{yz}(x_1, 0, p) &= \int_{t_1}^{\infty} \exp(-pt) \tau_{yz}(x_1, 0, t) dt \\ &= \exp(-pt_1) \int_0^{\infty} \exp(-ps) \tau_{yz}(x_1, 0, s+t_1) ds \end{aligned} \quad (9.81)$$

ここに、 $t_1 = -s_T x_1$ は位置 $y=0, x=x_1 < 0$ に最初の擾乱が到来する時刻である。式(9.81)から $\bar{\tau}_{yz}$ は $x \rightarrow -\infty$ にするにつれ

$$\bar{\tau}_{yz}(x, 0, p) \sim \exp(ps_T x) \quad (9.82)$$

の漸近挙動を示す。 $x_1 < 0$ で考えたから式(9.73)より、これは $\bar{\tau}_-$ の漸近挙動を表わしている。したがって両側ラプラス積分の存在する条件より $\bar{\tau}_+^*$ は半平面 $\text{Re}(\xi) < s_T p$ において正則であることが分かる。一方、 $y=0, x=x_2 > 0$ の位置にある物体点は $t_2 = s_T x_2 \cos \alpha$ の時刻まで擾乱を受けないことが幾何学的に明白であらうから、 \bar{w}_+^* は $x \rightarrow \infty$ で $O(\exp[-ps_T x \cos \alpha])$ となる。これは \bar{w}_+^* の正則領域として $\text{Re}(\xi) > -s_T p \cos \alpha$ をとることができることを意味している。

式(9.80)にもどって $\{s_T^2 p^2 - \xi^2\}^{1/2}$ を因数分解すれば、因数は $(s_T p - \xi)^{1/2}$ と $(s_T p + \xi)^{1/2}$ になって、それぞれ $\xi < s_T p$ と $\xi > -s_T p$ の半平面で正則である。よって、式(9.80)は

$$-\mu (s_T p + \xi)^{1/2} \bar{w}_+^* = \frac{\bar{\tau}_-^*}{(s_T p - \xi)^{1/2}} + \frac{\bar{\tau}_+^*}{(s_T p - \xi)^{1/2}} \quad (9.83)$$

と書きかえられる。ところで分母の根号が $\text{Re}(\xi) < s_T p$ で正則であるのにたいし、 $\bar{\tau}_+^*$ が式(9.79)より $\text{Re}(\xi) > -s_T p \cos \alpha$ で正則になるから、式(9.83)の右辺第2項を分割する必要がある。そこで次の分割を利用する。

$$\frac{s_T p (1 + \cos \alpha)}{(\xi + s_T p \cos \alpha)(s_T p - \xi)^{1/2}} = \frac{(s_T p - \xi)^{1/2}}{\xi + s_T p \cos \alpha} + \frac{1}{(s_T p - \xi)^{1/2}}$$

右辺の最初の項は $\xi = -s_T p \cos \alpha$ の極を除き $\xi < +s_T p$ で正則であるがこの極は

$$\begin{aligned} \frac{(s_T p - \xi)^{1/2}}{\xi + s_T p \cos \alpha} &= \frac{(s_T p - \xi)^{1/2} - (s_T p)^{1/2} (1 + \cos \alpha)^{1/2}}{\xi + s_T p \cos \alpha} \\ &\quad + \frac{(s_T p)^{1/2} (1 + \cos \alpha)^{1/2}}{\xi + s_T p \cos \alpha} \end{aligned}$$

と書けば取り除くことが出来る。結局、式(9.83)は次のように整理できる。

$$\begin{aligned}
& - \mu (s_T p + \xi)^{1/2} \bar{w}^* - \frac{\mu s_T \bar{g}(p) \sin \alpha}{(s_T p)^{1/2} (1 + \cos \alpha)^{1/2}} \frac{1}{\xi + s_T p \cos \alpha} \\
& = \frac{\mu s_T \bar{g}(p) \sin \alpha}{s_T p (1 + \cos \alpha)} \left(\frac{(s_T p - \xi)^{1/2} - (s_T p)^{1/2} (1 + \cos \alpha)^{1/2}}{\xi + s_T p \cos \alpha} + \frac{1}{(s_T p - \xi)^{1/2}} \right) \\
& \quad + \frac{\bar{e}^*}{(s_T p - \xi)^{1/2}} \quad (9.84)
\end{aligned}$$

式(9.84)の右辺は $\text{Re}(\xi) > -s_T p \cos \alpha$ で正則であり、右辺は $\text{Re}(\xi) < s_T p$ で正則である。重なり合う帯域で等しいことから式(9.84)の両辺は一つの有界な整関数を表わしている。これを $e(\xi)$ とする。Liouville の定理より $e(\xi)$ は定数である。その定数の値は $|\xi| \rightarrow \infty$ とした時、 $e(\xi)$ に関する次数条件より求められる。これは $x=0$ 近傍の場の量の状態に依存している。たとえば応力は式(9.29)からわかるように $x=0$ 近傍で $1/2$ 乗の特異性を示すことが知られている。境界条件(9.73)を参照すれば、この結果は $x \rightarrow 0^-$ にするにしたがって $\bar{e}(x) = 0 (|x|^{-1/2})$ となることを意味していることがわかる。

片側ラプラス変換に対するアーベルの定理より (式(7.24)(7.25)を見よ)

$|\xi| \rightarrow \infty$ に従って \bar{e}^* は $O(|\xi|^{-1/2})$ となることが結論づけられる。よって整関数 $e(\xi)$ は恒等的に 0 となり式(9.84)の左辺より \bar{w}^* について解くことが出来る。 $A(p, \xi) = \bar{w}^*$ だから

$$A(p, \xi) = - \frac{s_T^{1/2} \bar{g}(p) \sin \alpha}{p^{1/2} (1 + \cos \alpha)^{1/2}} \frac{1}{(s_T p + \xi)^{1/2} (\xi + s_T p \cos \alpha)} \quad (9.85)$$

両側ラプラス変換の逆変換式(7.16)を用いて $\bar{w}(x, y, p)$ は(9.76)より

$$\bar{w}(x, y, p) = - \frac{\bar{g}(p)}{p} \bar{W}(x, y, p) \quad (9.86)$$

ただし

$$\bar{W} = \frac{1}{2\pi i} \frac{(s_T p)^{1/2} \sin \alpha}{(1 + \cos \alpha)^{1/2}} \int_{\xi_1 - i}^{\xi_1 + i} \frac{\exp[\xi x - (s_T^2 p^2 - \xi^2)^{1/2} y]}{(s_T p + \xi)^{1/2} (\xi + s_T p \cos \alpha)} d\xi \quad (9.87)$$

式(9.87)は $y \geq 0$ で成り立ち、積分路の $\text{Re}(\xi) = \xi_1$ は帯領域

$$-s_T p \cos \alpha < \xi_1 < s_T p$$

に限定される。片側ラプラス変換に対するコンボリューション定理から w は、 W と $\bar{g}(p) / p$ のラプラス逆変換とのコンボリューションとして表わせる。

式(9.87)にCagniard-de Hoop法を適用し、逆変換を考える。第7.9節で議論した手順に従って $\xi = p\eta$ の置き換えをすれば

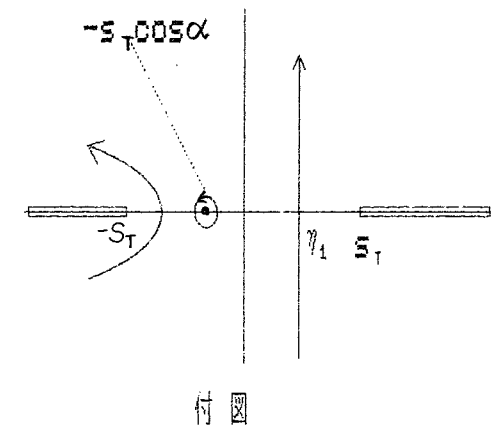
$$\bar{W} = \frac{1}{2\pi i} \frac{s_T^{1/2} \sin \alpha}{(1 + \cos \alpha)^{1/2}} \int_{\eta_1 - i}^{\eta_1 + i} \frac{\exp\{-p[(s_T^2 - \eta^2)^{1/2} y - \eta x]\}}{(s_T + \eta)^{1/2} (\eta + s_T \cos \alpha)} d\eta \quad (9.88)$$

η 面内の特異性は $\eta = -s_T \cos \alpha$ の一位の極と $\eta = \pm s_T$ の分岐点である。次に、 $\text{Re}(\eta) = \eta_1$ の積分路を片側ラプラス変換形の積分となる経路に変形する。その経路は式(7.176)より

$$\eta_{T \pm} = - \frac{t}{r} \cos \theta \pm i \left(\frac{t^2}{r^2} - s_T^2 \right)^{1/2} \sin \theta \quad (9.89)$$

として与えられる。ここに r と θ はそれぞれ式(7.168)(7.169)で定義されるものである。

$s_T r < t < \infty$ の時、式(9.89)は実軸と常に分岐点 $\eta = -s_T$ と $\eta = +s_T$ の間で交差する様な双曲線を表わす。したがって、分岐線に沿う図7.2(b)のような付加積分経路をとる必要はない。一方、 θ の範囲が $0 \leq \theta < \alpha$ の場合は、極



$\eta = -s_T \cos \alpha$ の寄与を考えねばならない。その極の寄与は留数計算より

$$\bar{W} = \exp[-ps_T(x \cos \alpha + y \sin \alpha)] \quad (9.90)$$

式(9.86)(9.90)から対応する変位波のラプラス逆変換は

$$w(x, y, t) = -H(T) \int_0^T g(v) dv \quad (9.91)$$

ここに

$$T = t - s_T x \cos \alpha - s_T y \sin \alpha$$

式(9.91)は入射波と同形で符号の反転した平面波である。したがって、影の領域 $0 \leq \theta < \alpha$ では入射波がこの波によって打ち消される。

式(9.89)によって定まる積分経路による寄与は円柱波に対応している。その経路は実軸にたいして対称で、また p と t ともに実数なのでその円柱波は

上添文字cをつけて書けば、次のようになる。

$$\bar{W}^c = \frac{1}{\pi(1+\cos\alpha)^{1/2}} \int_{s_{1r}}^{\infty} \frac{e^{-pt}}{s_{1r}} \operatorname{Im} \left(\frac{\partial \eta_{1+} / \partial t}{(s_{1r} + \eta_{1+})^{1/2} (\eta_{1+} + s_{1r} \cos\alpha)} \right) dt \quad (9.92)$$

ここで

$$\frac{\partial \eta_{1+} / \partial t}{(s_{1r}^2 - \eta_{1+}^2)^{1/2}} = \frac{i}{(t^2 - s_{1r}^2)^{1/2}} \quad (9.93)$$

の関係を用いれば式(9.92)は更に簡単になり

$$\bar{W}^c = \frac{s_{1r}^{1/2} \sin\alpha}{\pi(1+\cos\alpha)^{1/2}} \int_{s_{1r}}^{\infty} \frac{e^{-pt}}{(t^2 - s_{1r}^2)^{1/2}} \operatorname{Re} \left(\frac{(s_{1r} - \eta_{1+})^{1/2}}{(\eta_{1+} + s_{1r} \cos\alpha)} \right) dt$$

よって

$$W^c(x,y,t) = \frac{s_{1r}^{1/2} (1-\cos\alpha)^{1/2}}{\pi(t^2 - s_{1r}^2)^{1/2}} \operatorname{Re} \left(\frac{(s_{1r} - \eta_{1+})^{1/2}}{(\eta_{1+} + s_{1r} \cos\alpha)} \right) H(t-s_{1r})$$

前式に式(9.89)を入れると

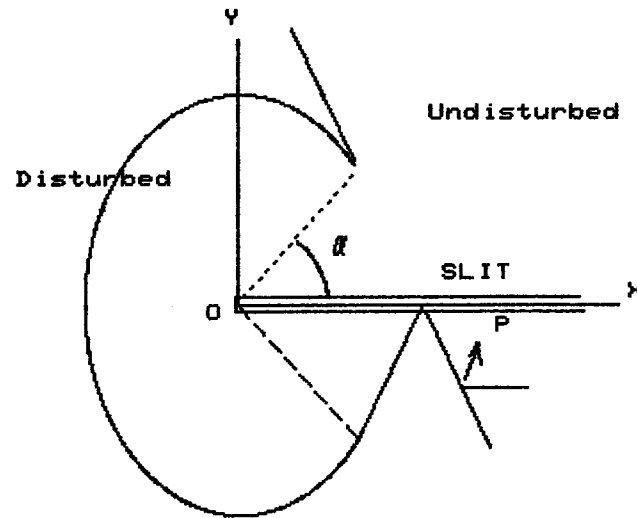


図9-8 回折波

$$W^c(x,y,t) = \frac{-1}{\pi} \left(\frac{s_{1r}}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{SA}{t-s_{1r}CA} + \frac{SB}{t-s_{1r}CB} \right) \frac{H(t-s_{1r})}{(t-s_{1r})^{1/2}} \quad (9.94)$$

ここに $SA = \sin [(\alpha - \theta)/2]$, $SB = \sin [(\alpha + \theta)/2]$
 $CA = \cos (\alpha - \theta)$, $CB = \cos (\alpha - \theta)$
 ただし $0 \leq \theta \leq \pi$ である。式(9.86)(9.68)より対応する変位は

$$w^d(x,y,t) = - \int_{s_{1r}}^t G(t-s) W^c(x,y,s) ds \quad (9.95)$$

ここにG(t)は式(9.68)で定義したものである。式(9.95)を回折波と呼ぶ。0からπまでのθに対する完全な解は、次のようになる。

$$0 \leq \theta < \alpha; \quad w(x,y,t) = w^d(x,y,t)$$

$$\alpha < \theta \leq \pi; \quad w(x,y,t) = w^i(x,y,t) + w^d(x,y,t)$$

wⁱとw^dは、それぞれ式(9.67)(9.95)で定義される。領域π ≤ θ ≤ 2πにおける解も同様な方法で得られる。時間が t ≥ 0 の時の波頭模様を図9.8に示す。

さて、亀裂先端の応力特異性を調べてみよう。その特異性は式(9.95)で与えられる回折波によるものである。r → 0 の極限を考えれば、せん断応力 τ_{0z} は次のようになることが分かっている。(*)

$$\tau_{0z} = \frac{\mu \partial w}{r \partial \theta} = \frac{\mu}{\pi} \left(\frac{s_{1r}}{2r} \right)^{1/2} \left[\cos \left(\frac{\alpha + \theta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha - \theta}{2} \right) \right] F(t) \quad (9.96)$$

ここに

$$F(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{G(t-\tau) - G(t)}{\tau^{3/2}} d\tau - \frac{G(t)}{\tau^{1/2}} \quad (9.97)$$

rの値の小さいところでは、この応力は r^{-1/2} の特異性を持っている。このように先端で応力の特異性が生ずることは破壊力学上重要で、一般に応力拡大係数の大きさが脆性亀裂の進展に対するクライテリオンとなると考えられている。その応力拡大係数とは、長さ2aの亀裂の先端近傍の応力を表現する時、次のKによって定義されるものである。

$$K = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\pi r}{a} \right)^{1/2} |\tau_{0z}|$$

さて、式(9.68)の関数 g(v) が次の形の特別な場合となる時を考えてみよう。

$$g(v) = \frac{\tau_0}{\mu} C_{\tau}$$

(*) Handelman, G.H. & Rubinfeld, L.A., Jour. Appl. Mech. 36(1969), p.873

これはステップ応力波が入射する場合にあたり、対応する関数 $F(t)$ は

$$F(t) = -2 \frac{\tau_0}{\mu} t^{1/2} C_T$$

で、式(9.96)に対する応力拡大係数は

$$K = 2\tau_0 \left[\frac{C_T t}{2\pi a} \right]^{1/2} \left[\cos \left(\frac{\alpha + \theta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\alpha - \theta}{2} \right) \right]$$

となる。この応力拡大係数は時間とともに増大している。もし、亀裂長さ $2a$ が有限であるならば、応力拡大係数は反対側の亀裂先端からの回折波が到来するまで増加する。ステップ応力波入射の場合、動的応力拡大係数は対応する静的な問題の応力拡大係数に比べて $(4/\pi)-1$ ほど大きくなること示される^(*)したがって、亀裂の進展は負荷をゆっくりかけたときに起らなくとも、急激にかけて波動を生じさせれば負荷の大きさは同じでも亀裂進展して破壊に至る可能性が大きくなる。

9.6 縦波の回折

9.6.1 定式化 半無限長スリットによる平面縦波の回折は Wiener-Hopf 技法と Cagniard-de Hoop 法を併用する積分変換によって首尾よく解析できるもう一つの問題である。入射波が

$$u^i(x, y, t) = G(t - s_L x \cos \alpha - s_L y \sin \alpha) \cos \alpha \quad (9.98)$$

$$v^i(x, y, t) = G(t - s_L x \cos \alpha - s_L y \sin \alpha) \sin \alpha \quad (9.99)$$

によって表わせるとしよう。ここに

$$G(t) = H(t) \int_0^t g(s) ds \quad (9.100)$$

式(9.100)で $H(\cdot)$ はヘビサイドのステップ関数で α は x 軸と波頭法線のなす角で、また $s_L = 1/C_L$ は縦波のスローネスである。ここで角 α を $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ に限定する。時刻 $t=0$ 以前の波頭の位置は図9.7 に示したようになる。その入射縦波の回折によって生ずる波動は $y=0$ 平面に関して対称な成分と反対称な成分に対する解の重ね合わせになっている。その二つの問題に対する境界条件は

〔対称問題〕 $y=0, x > 0; \tau_y = (\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha) s_L H(t - s_L x \cos \alpha) \times g(t - s_L x \cos \alpha) \quad (9.101)$

$$y=0, x \leq 0; v = 0 \quad (9.102)$$

$$y=0, -\infty < x < \infty; \tau_{yx} = 0 \quad (9.103)$$

〔反対称問題〕 $y=0, x > 0; \tau_{yx} = \mu s_L \sin 2\alpha H(t - s_L x \cos \alpha) g(t - s_L x \cos \alpha) \quad (9.104)$

$$y=0, x \leq 0; u = 0 \quad (9.105)$$

$$y=0, -\infty < x < \infty; \tau_y = 0 \quad (9.106)$$

^(*) Achenbach, J.D. Int. Jour. Engng. Sci., 8(1970), p.947

入射波による応力を亀裂面で消去するため、式(9.101)(9.103)(9.104)(9.106)の重ね合わせを考える。このとき式(9.101)～(9.106)によって定義される問題の初期条件は

$$u(x, y, 0) = \dot{u}(x, y, 0) = v(x, y, 0) = \dot{v}(x, y, 0) \equiv 0 \quad (9.107)$$

である。この対称、反対称の境界値初期値問題は二次元問題である。この問題は変位ポテンシャル ϕ と ψ を用いて定式化され解かれる。関係する式は第7.7節の式(7.106)～(7.113)に述べられている。過渡問題の解は時間と空間変数 x のそれぞれに片側ラプラス変換、両側ラプラス変換を適用して得られる。この変換は Cagniard-de Hoop 法によって逆変換されることを予想し、第7.11節の両側ラプラス変換対(7.182)(7.183)を用いる。半空間 $y \geq 0$ で $\bar{\phi}^*$ と $\bar{\psi}^*$ に対して用いる表示式は

$$\bar{\phi}^* = \bar{\Phi}(p, \gamma) e^{-p\gamma_L y} \quad (9.108)$$

$$\bar{\psi}^* = \bar{\Psi}(p, \gamma) e^{-p\gamma_T y} \quad (9.109)$$

$$\text{ここに } \gamma_L = (S_L^2 - \gamma^2)^{1/2}, \quad \gamma_T = (S_T^2 - \gamma^2)^{1/2} \quad (9.110a, b)$$

変位と応力の対応する変換は第7.11節の式(7.187)～(7.191)に与えられている。

9.6.2 Wiener-Hopf 技法の応用 まず最初の段階で、対称と反対称の問題の解を誘導するため、 x の全域の $y=0$ においてそれぞれ未知関数対 $\bar{\tau}_{y-}$ 、 \bar{v}_+ と $\bar{\tau}_{y+}$ 、 \bar{u}_+ を導入することによって境界条件を定める。時間に関する片側ラプラス変換と x に関する両側ラプラス変換を用いれば境界条件(9.101)～(9.103)は次式になる。

$$y=0, -\infty < x < \infty; \quad \bar{\tau}_y^* = \bar{\tau}_{y-}^* + \bar{\tau}_{y+}^* \quad (9.111)$$

$$\bar{v}^* = \bar{v}_+^* \quad (9.112)$$

$$\bar{\tau}_{yx}^* = 0 \quad (9.113)$$

ここに $\bar{\tau}_{y+}^*$ は式(9.101)より

$$\bar{\tau}_{y+}^* = \frac{(\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha) \cdot S_L}{\gamma + S_L \cos \alpha} \frac{\bar{g}(p)}{p} \quad (9.114)$$

同様に境界条件(9.104)～(9.106)は次式になる。

$$y=0, -\infty < x < \infty; \quad \bar{\tau}_{yx}^* = \bar{\tau}_{yx-}^* + \bar{\tau}_{yx+}^* \quad (9.115)$$

$$\bar{u}^* = \bar{u}_+^* \quad (9.116)$$

$$\bar{\tau}_y^* = 0 \quad (9.117)$$

$$\text{ここに } \bar{\tau}_{yx+}^* = \frac{\mu S_L \sin 2\alpha}{\gamma + S_L \cos \alpha} \frac{\bar{g}(p)}{p} \quad (9.118)$$

前節で示した議論と同様、 $\bar{\tau}_{y-}^*$ と $\bar{\tau}_{yx-}^*$ が $\text{Re}(\gamma) < S_L$ の半平面で正則であり、また \bar{v}_+^* と \bar{u}_+^* が $\text{Re}(\gamma) > -S_L \cos \alpha$ の半平面で正則であることがわかる。境界条件式(9.111)～(9.113)に関して式(9.108)(9.109)を用いれば4つの未知関数 $\bar{\Phi}_s(p, \gamma)$ 、 $\bar{\Psi}_s(p, \gamma)$ 、 $\bar{\tau}_y^*$ 、 \bar{v}_+^* に対する3つの式を得る。ここに下添字 s は対称問題に対して用いている。式(9.112)(9.113)より $\bar{\Phi}_s(p, \gamma)$ と $\bar{\Psi}_s(p, \gamma)$ は次の形になる。

$$\bar{\Phi}_s(p, \gamma) = -\frac{S_T^2 - 2\gamma^2}{p S_T^2 \gamma_L} \bar{v}_+^* \quad (9.119)$$

$$\bar{\Psi}_s(p, \gamma) = -\frac{2\gamma}{p S_T^2} \bar{v}_+^* \quad (9.120)$$

そして残りの方程式は $\bar{\tau}_{y-}^*$ と \bar{v}_+^* に関する次のWiener-Hopf方程式になる。

$$2\mu p \frac{S_T^2 - S_L^2}{S_T^2} \frac{\gamma^2 S_R^2}{\gamma_L} K(\gamma) \bar{v}_+^* = \bar{\tau}_{y-}^* + \bar{\tau}_{y+}^* \quad (9.121)$$

$$\text{ここに } K(\gamma) = -\frac{(S_T^2 - 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2 \gamma_L(\gamma) \gamma_T(\gamma)}{2(S_T^2 - S_L^2)(\gamma^2 - S_R^2)} \quad (9.122)$$

前式の分子は第5章の式(5.96)から分かるようにレーレー表面波のスローネスに対する関数 $R(\gamma)$ と分かるだろう。方程式 $R(\gamma)=0$ の根は C_R をレーレー波速度

として $S_R = \pm 1/C_R$ である。

同様な方法で、式(9.115)-(9.117)より4つの未知関数 $\Phi_a(p, \eta)$, $\Psi_a(p, \eta)$, \bar{t}_{yx-}^* , \bar{u}_+^* に対する3つの式を得る。ここに下添字 a は反対称問題を示すのに用いている。関数 $\Phi_a(p, \eta)$ と $\Psi_a(p, \eta)$ は(9.116)(9.117)より \bar{u}_+^* によって表わすことができ

$$\Phi_a(p, \eta) = \frac{2\eta}{pS_T^2} \bar{u}_+^* \quad (9.123)$$

$$\Psi_a(p, \eta) = -\frac{S_T^2 - 2\eta^2}{pS_T^2 \gamma_T} \bar{u}_+^* \quad (9.124)$$

そして残りの(9.115)は次式によって \bar{u}_+^* と \bar{t}_{yx-}^* を結び付ける。

$$2\mu p \frac{S_T^2 - S_L^2}{S_T^2} \frac{\eta^2 - S_R^2}{\gamma_T} K(\eta) \bar{u}_+^* = \bar{t}_{yx-}^* + \bar{t}_{yx+}^* \quad (9.125)$$

ここに $K(\eta)$ は式(9.122)によって与えられている。Wiener-Hopf 方程式の(9.121)と(9.125)は $-S_L \cos \alpha < \text{Re}(\eta) < S_L$ によって定まる帯状領域内で成り立つ。

これらの方程式の解を求めるための第一段階として $K(\eta)$ を因数分解する。

$$K(\eta) = K_+(\eta) K_-(\eta) \quad (9.126)$$

ここに $K_+(\eta)$ とその逆数は $\text{Re}(\eta) > -S_L$ で正則であり、また $K_-(\eta)$ とその逆数は $\text{Re}(\eta) < S_L$ で正則である。 $K_+(\eta)$ と $K_-(\eta)$ の具体的な表式は第9.4節で導びいた。また $\gamma_L(\eta)$ の分解は

$$\gamma_L(\eta) = \gamma_{L+} \gamma_{L-} \quad (9.127)$$

ここに $\gamma_{L+} = (S_L + \eta)^{1/2}$, $\gamma_{L-} = (S_L - \eta)^{1/2}$ (9.128a, b)
式(9.121)は次の様に書ける。

$$2\mu p \frac{S_T^2 - S_L^2}{S_T^2} \frac{\eta + S_R}{\gamma_{L+}} K_+ \bar{u}_+^* = \frac{\gamma_{L-} \bar{t}_{y-}^*}{(\eta - S_R) K_-} + \frac{\gamma_{L-} \bar{t}_{y+}^*}{(\eta - S_R) K_-} \quad (9.129)$$

ここで $\gamma_{L-} \bar{t}_{y+}^* / K_-$ の項の分割が残っている。式(9.114)を用いることにより

$$\frac{\gamma_{L-} \bar{t}_{y+}^*}{(\eta - S_R) K_-} = \frac{(\eta + 2\mu \sin^2 \alpha) S_L}{\eta + S_L \cos \alpha} \frac{\bar{f}(p)}{p} \left\{ \frac{\gamma_{L-}}{(\eta - S_R) K_-} - L \right\} + \frac{(\eta + 2\mu \sin^2 \alpha) S_L \bar{f}(p)}{(\eta + S_L \cos \alpha) p} \quad (9.130)$$

$$\text{ここに } L = \frac{\gamma_{L-}(\eta)}{(\eta - S_R) K_-(\eta)} \Big|_{\eta = -S_L \cos \alpha} \quad (9.131)$$

かくして L は η に独立である。式(9.129)は次の形に表わせるだろう。

$$\begin{aligned} 2\mu p \frac{S_T^2 - S_L^2}{S_T^2} \frac{\eta + S_R}{\gamma_{L+}} K_+ \bar{u}_+^* &= \frac{(\eta + 2\mu \sin^2 \alpha) S_L \bar{f}(p)}{(\eta + S_L \cos \alpha) p} L \\ &= \frac{\gamma_{L-} \bar{t}_{y-}^*}{(\eta - S_R) K_-} + \frac{(\eta + 2\mu \sin^2 \alpha) S_L \bar{f}(p)}{(\eta + S_L \cos \alpha) p} \left[\frac{\gamma_{L-}}{(\eta - S_R) K_-} - L \right] \end{aligned} \quad (9.132)$$

この式の左辺は $\text{Re}(\eta) > -S_L \cos \alpha$ で正則であり、一方右辺は $\text{Re}(\eta) < S_L$ で正則である。同様に式(9.125)は次の様になる。

$$\begin{aligned} 2\mu p \frac{S_T^2 - S_L^2}{S_T^2} \frac{\eta + S_R}{\gamma_{L+}} K_+ \bar{u}_+^* &= \frac{\mu S_L \sin 2\alpha \cdot \bar{f}(p)}{(\eta + S_L \cos \alpha) p} M \\ &= \frac{\gamma_{T-} \bar{t}_{yx-}^*}{(\eta - S_R) K_-} + \frac{\mu S_L \sin 2\alpha \cdot \bar{f}(p)}{(\eta + S_L \cos \alpha) p} \left[\frac{\gamma_{T-}}{(\eta - S_R) K_-} - M \right] \end{aligned} \quad (9.133)$$

$$\text{ここに } M = \frac{\gamma_{T-}(\eta)}{(\eta - S_R) K_-(\eta)} \Big|_{\eta = -S_L \cos \alpha} \quad (9.134)$$

そこで、いつもの考えに従って解を書き出せば

$$\bar{u}_+^* = \frac{\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha}{2\mu} \left(\frac{S_L S_T^2}{S_T^2 - S_L^2} \right) \frac{\bar{f}(p)}{p^2} \left(\frac{\gamma_{L+}}{\eta + S_R} \right) \frac{L}{\eta + S_L \cos \alpha} \left(\frac{1}{K_+} \right) \quad (9.135)$$

$$\bar{u}_+^* = \frac{S_L S_T^2 \sin 2\alpha}{2(S_T^2 - S_L^2)} \left(\frac{\bar{f}(p)}{p^2} \right) \frac{\gamma_{T+}}{\eta + S_R} \left(\frac{M}{\eta + S_L \cos \alpha} \right) \frac{1}{K_+} \quad (9.136)$$

従って、4つの関数 $\Phi_s, \Psi_s, \Phi_a, \Psi_a$ は式(9.119)(9.120)(9.123)(9.124)から与えられる。

9.6.3 逆変換 Cagniard-de Hoop法によって逆変換出来る。応力成分

$\tau_y(x, y, t)$ を得るために、いくつかの演算を示す。応力の変換形は

$$\bar{\tau}_y^* = (\bar{\tau}_y^*)_s + (\bar{\tau}_y^*)_a \quad (9.137)$$

ここに添字 s と a は、それぞれ対称成分と反対称成分を示す。(7.190)(9.108)(9.109)(9.119)(9.120)を用いることによって

$$(\bar{T}_y^*)_s = \frac{\mu \bar{g}(p)}{p} [\Lambda_{Ls} e^{-p\gamma_L y} + \Lambda_{Ts} e^{-p\gamma_T y}] \quad (9.138)$$

と書ける。ここに

$$\Lambda_{Ls} = - \frac{(S_T^2 - 2\gamma^2)^2}{S_T^2 \gamma_L} \frac{p^2}{\bar{g}(p)} \bar{v}_+^* \quad (9.139)$$

$$\Lambda_{Ts} = - \frac{4\gamma^2 \gamma_T}{S_T^2} \frac{p^2}{\bar{g}(p)} \bar{v}_+^* \quad (9.140)$$

反対称成分に対応する式は

$$(\bar{T}_y^*)_a = \frac{\mu \bar{g}(p)}{p} [\Lambda_{La} e^{-p\gamma_L y} + \Lambda_{Ta} e^{-p\gamma_T y}] \quad (9.141)$$

ここに
$$\Lambda_{La} = \frac{2\gamma(S_T^2 - 2\gamma^2)}{S_T^2} \frac{p^2}{\bar{g}(p)} \bar{u}_+^* \quad (9.142)$$

$$\Lambda_{Ta} = -\Lambda_{La} \quad (9.143)$$

両側ラプラス変換の逆変換積分(7.183)の適用により $\bar{T}_y(x, y, p)$ の形は

$$\bar{T}_y = \mu \bar{g}(p) (\bar{I}_L + \bar{I}_T) \quad (9.144)$$

ここに

$$\bar{I}_L = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} (\Lambda_{Ls} + \Lambda_{La}) e^{-p(\gamma_L y - \gamma x)} d\gamma \quad (9.145)$$

$$\bar{I}_T = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} (\Lambda_{Ts} + \Lambda_{Ta}) e^{-p(\gamma_T y - \gamma x)} d\gamma \quad (9.146)$$

Cagniard-de Hoop法のいつもの手順に従って被積分関数の指数関数が $e^{-\gamma z}$ の形を取るように複素 γ 面の経路を求める。図7.11に示したように、このような経路は式(9.145)の積分にたいして

$$\gamma = \gamma_{L\pm}(x, \theta, t) = -\frac{t}{l} \cos\theta \pm i \left(\frac{t^2}{l^2} - S_L^2 \right)^{1/2} \sin\theta \quad (9.147)$$

によって与えられる。ここに、この時 $S_T l \leq t < \infty$ である。また式(9.146)の積分に対しては

$$\gamma = \gamma_{T\pm}(x, \theta, t) = -\frac{t}{l} \cos\theta \pm i \left(\frac{t^2}{l^2} - S_T^2 \right)^{1/2} \sin\theta \quad (9.148)$$

によって与えられる。ここに、この時 $S_T l \leq t < \infty$ である。式(9.147)と式(9.148)のそれぞれは共に二つの双曲線のうち、一つの分岐を与える。 $\gamma_{L\pm}$ と $\gamma_{T\pm}$ によって定まる積分路については第7.11節に幾分詳しく述べてある。

式(9.139)(9.140)(9.142)(9.143)を調べることにより関数 $\Lambda_{Ls}, \Lambda_{Ts}, \Lambda_{La}, \Lambda_{Ta}$ は $|\zeta| \rightarrow \infty$ にするにしたがい漸近的に $\zeta^{1/2}$ の挙動をすることが明らかになる。よって留数定理とJordanの補助定理より、式(9.145)(9.146)の逆変換積分を、それぞれ双曲線経路 $\gamma_{L\pm}$ と $\gamma_{T\pm}$ に沿う積分と、積分経路の変形のさいに横切る極に対する留数との和に置き換えられる。

まず、式(9.145)を考えよう。双曲線(9.147)と実軸との交点が常に $\gamma = -S_L$ と $\gamma = S_L$ との間にあるから分岐線に伴って生ずる煩雑さはないが積分路の変形のさいに $\gamma = -S_L \cos\alpha$ にある極の寄与を $\cos\theta > \cos\alpha$ の時(すなわち $0 \leq \theta \leq \pi$ ならば $\theta < \alpha$ の時)に考えねばならない。

$$\bar{I}_L = \int_{S_L l}^{\infty} \mathcal{D}_L(x, \theta, t) e^{-pt} dt + R_L \quad (9.149)$$

ただし
$$\mathcal{D}_L = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ [\Lambda_{Ls} + \Lambda_{La}]_{\gamma = \gamma_{L+}} \frac{\partial \gamma_{L+}}{\partial t} \right\} \quad (9.150)$$

であるから極 R_L からの寄与は

$$\theta < \alpha; \quad R_L = \left[(\gamma + S_L \cos\alpha) (\Lambda_{Ls} + \Lambda_{La}) \right]_{\gamma = -S_L \cos\alpha} e^{-p S_L (y \sin\alpha + x \cos\alpha)} \quad (9.151)$$

$$\theta > \alpha; \quad R_L = 0 \quad (9.152)$$

式(9.146)の積分に立ち帰ると $\gamma_{T\pm}$ によって定まる双曲線の頂点 $\gamma = -S_T \cos\theta$ が、丁度7.11節と同様に、分岐点 $\gamma = \pm S_L$ の間にあるか否かという問題が生ずる。式(9.138)-(9.143)によって定まる関数は右半平面で正則だから、左半平面の分岐線に関して取扱えばよい。これは $\cos^{-1}(S_L/S_T) \leq \theta \leq 0$ に対しては $\gamma = S_L$ より出る分岐線を迂回しなければならないことを意味している。

$0 \leq \theta \leq \cos^{-1}(S_L/S_T)$ の時

$$\bar{I}_T = \int_{t_{TL}}^{S_T l} \mathcal{D}_{TL}(x, \theta, t) e^{-pt} dt + \int_{S_T l}^{\infty} \mathcal{D}_T(x, \theta, t) e^{-pt} dt + R_T \quad (9.153)$$

ここに t_{TL} は式(7.203)によって定められ

$$\mathcal{D}_{TL} = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ [\Lambda_{TS} + \Lambda_{TA}] \eta = \eta_{TL} \frac{\partial \eta_{TL}}{\partial t} \right\} \quad (9.154)$$

$$\mathcal{D}_T = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ [\Lambda_{TS} + \Lambda_{TA}] \eta = \eta_{T+} \frac{\partial \eta_{T+}}{\partial t} \right\} \quad (9.155)$$

そして極からの寄与は

$$\theta < \alpha ; R_T = [(\eta + S_L \cos \alpha)(\Lambda_{TS} + \Lambda_{TA})]_{\eta = -S_L \cos \alpha} e^{-p S_L (y \sin \alpha + x \cos \alpha)} \quad (9.156)$$

$$\theta > \alpha ; R_T = 0$$

式(9.151)(9.156)の寄与の和より

$$R = R_T + R_L = \frac{(\lambda + 2\mu \sin^2 \alpha) S_L}{\mu} e^{-p S_L (y \sin \alpha + x \cos \alpha)} \quad (9.157)$$

$\theta \geq \cos^{-1}(S_L/S_T)$ に対して

$$\bar{I}_T = \int_{S_T}^{\infty} \mathcal{D}_T(x, \theta, t) e^{-pt} dt \quad (9.158)$$

ここに \mathcal{D}_T は式(9.155)によって与えられる。

式(9.150)(9.154)(9.155)(9.157)そして(9.158)の片側ラプラス変換の逆変換は視察によって得られる。したがって、式(9.144)より応力 τ_y はこれらの結果と関数 $g(t)$ とのコンボリューション積分として得られる。式(9.150)は回折縦波を、式(9.155)(9.158)は回折横波を与える。第7.11節と同様に式(9.155)は先頭波(Head Wave)である。そして式(9.157)はスリットの影領域で入射波と打ち消しあう成分となっている。 $y \leq 0$ に対するこの成分は鏡映関係によって得られる。波頭の模様を図9.9に示した。短時間範囲における応答を考えるならば、以上の解析は有限長亀裂による回折に拡張できる。たとえばThauとLuの報告(*)に見られる。彼等によれば亀裂先端の応力は特異性を有し、ステップ応力波に対する応力拡大係数は静的なそれよりも約30%大きくなる。

(End of 9 Chap.)

(*) Thau, S.A. and Lu, T.-H., I.J.Solid.Structs, Vol.7(1971),p.731.

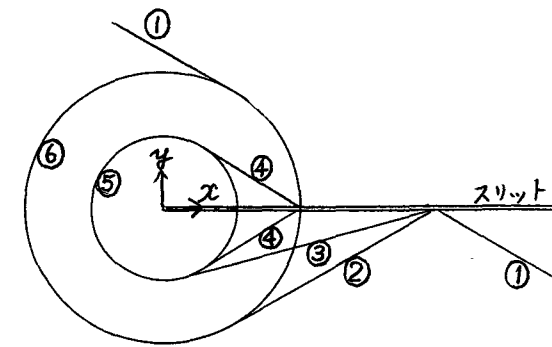


図9.9 スリットによるP-波の回折; ①入射P波, ②反射P波 ③反射S波 ④先頭波, ⑤回折S波, ⑥回折S波

第9章 問題

【9.1】 $x > 0, y = \pm 0, |z| < \infty$ によって定まる半無限長スリットを有する無限体を考える。そのスリット面には次のような面外せん断力が作用している。

$$0 < x \leq a, y = \pm 0 ; \tau_{yz} = \tau_0 H(t)$$

$$a < x < \infty, y = \pm 0 ; \tau_{yz} = 0$$

$$0 < x < \infty, y = \pm 0 ; \tau_y = \tau_{yx} = 0$$

媒体は初期静止しているものとして、 $y = 0$ の面のせん断応力 τ_{yz} に対する積分方程式をグリーン関数法によって導け。そして積分方程式を解け。

$|x|$ が非常に小さいときの応力特異性を説明せよ。

【9.2】 半無限体の半表面 $y = 0, x \leq 0$ が剛固定され残りの半表面 $y = 0, x > 0$ が応力自由であると

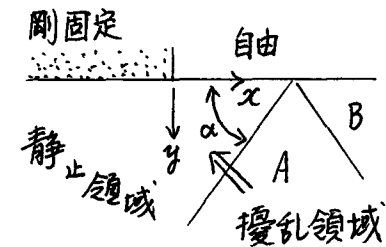
する。この時、図のように入射と反射の過渡波が自由面に沿って伝播する。入射変位波が水平偏向し次の一般形をとるとする。

$$w_i(x, y, t) = H(c_1 t + r) \int_0^{c_1 t + r} g(v) dv$$

$$\text{ただし } r = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

である。このとき

(a) 領域Bにおける変位を求めよ。



問題図

(b) $t=0$ で $x=0$, $y=0$ の点に波が到来するとし、 $t>0$ における $y=0$ 面の応力 τ_{yz} をグリーン関数法で求めよ。

(c) $y=0$ 面の応力特異性を求めよ。

【9. 3】領域 $0 \leq x < \infty$ で関数 $f(x)$ は次の積分方程式を満足する。

$$f(x) + 4 \int_0^{\infty} e^{-|x-\eta|} f(\eta) d\eta = e^{-x}, \quad 0 \leq x < \infty$$

Wiener-Hopf の技法で $f(x)$ を求めよ。

【9. 4】無限体中に $x \geq 0$, $y=0$, $-\infty < z < \infty$ に変位を拘束する半無限長剛スクリーンがある。 $t=0$ のしき式(9.67)の形の水平偏向せん断波が、そのスクリーンに入射するとき積分変換法により $w(x, y, t)$ を求めよ。

【9. 5】半無限長スリットによる平面SV波の回折を考える。その入射波の波頭がスリットに平行 すなわち

$$u^i(x, y, t) = G(t - S_T y), \quad v^i = w^i = 0$$

ただし $G(t) = H(t) \int_0^t g(s) ds$

のときスリット面のせん断応力 τ_{yx} を求めよ。

(本章終り)