

弹性波动力学

大 好 直

秋田大学教授

(工学資源学部機械工学科)

目 次

1. はじめに	(1)	5. 近似理論	(65)
波の伝わる速度(1)、		弾性層の板近似について(65)、	
境界に沿う波(3)		板のたわみ運動に対する古典理論(66)、	
2. 無限弾性体中の波動	(4)	板のたわみ運動の横せん断と回転慣性の効果を考える理論(67)、	
運動方程式(4)、		薄板の伸縮運動と Mindlin の厚板の理論式(69)、	
波動方程式とその解(6)、		分散性波動の伝播による遠方場の近似応答(停留位相法)(71)、	
膨張波とせん断波(9)		停留位相法の補追(77)、	
3. 半無限弾性体中の波動	(12)	漸近展開による積分評価(79)、	
自由境界面における弾性波の反射(12)、		最急降下法(81)	
異種弾性体の接合境界における反射・透過・屈折(20)、		6. 調和変動荷重を受ける弾性体	(85)
全反射(23)、		周期的に分布する荷重の強制調和振動(85)、	
入射膨張波の反射・屈折の数値例(25)、		球形空洞内の周期的変動圧による応答(91)、	
レーレー波(27)、		円柱空洞内の周期的変動圧による応答(95)、	
異方性非対称面に沿って伝わるレーレー波(33)、		往復動荷重による半無限体の応答(97)、	
ストーンレー波(39)		7. 移動荷重を受ける弾性体	(105)
4. 弾性導波体中の波動	(43)	半無限体中の移動点荷重(105)、	
導波現象とは(43)、		半無限体表面の移動点荷重(114)、	
弾性層内を伝わるSH波(44)、		半無限体表面の移動線荷重(118)、	
SH波によって層内を伝わるエネルギー(49)、		円孔縁の回転移動荷重(126)	
群速度(51)、		8. 衝撃荷重を受ける弾性体	(130)
ラブ波(53)、		一様な衝撃圧をうける半無限体(130)、	
弾性層内を伝わる面内変形の波(57)、		有限幅せん断衝撃を受ける半無限体(132)、	
レーレー・ラムの周波数スペクトル(60)、		有限厚平板端の保護材の衝撃応答(141)、	
周波数スペクトル曲線の幾何学的物理的考察(63)		衝撃内圧の球形空洞(145)、	
		端面ねじり衝撃を受ける弾性円柱(147)	

弾性波動力学

大好 直(秋田学)

1. はじめに

古典的な弾性問題の取扱いは、主として静的な釣合状態にある時の変形や応力状態を考えたが、この取扱いは弾性体が衝撃荷重などの外力を受けてからある一定時間経過した後で工学的に十分正しいものとなる。しかし機械の高性能化や構造物の高度化にともない設計条件が厳しくなるにつれ静的平衡状態に至るまでの過渡的応答を把握することが必要になって来っており、固体における機械的波動の解明や解析手法の進展とともに注目されて来ている。たとえば非破壊検査の一つであるアコースティック・エミッションによる法の実験解析の理論的裏付けなど動弾性力学のカバーする専門分野は極めて多岐にわたっている。

さて過渡的現象を調べる時は、物体が質量を持っているため、慣性効果によって生ずる応力波(または圧力波)のような波動の存在を考えなければならない。すなわち、これらの波は、物体中を有限の速度で伝わるので平衡するまで時間がかかると考えればよい。身近な例をあげれば、夏の夜空を彩る花火を遠くで観れば咲き終わったあとに打上げる音を聞くことがある。この時間的遅れは空気中を伝わる圧力波(音)が有限の速さで伝わって来るためである。固体中を伝わる弾性波も同様に、伝ば(播)には時間を要する。この様な擾乱の伝ばは力学的に位相を定義することができるが、位相の定義できない拡散現象などは波動とはいわない。

1.1. 波の伝わる速度 今、密度 ρ 、体積弾性係数 K の流体中を伝わる波の速度は、その流体の運動方程式より導かれ断熱変化のもとでは

$$(K/\rho)^{1/2} \quad (1)$$

* 静水圧の Δp 上昇に対し体積 V のものが ΔV だけ変化し、 K は $\Delta p = -K \Delta V/V$ の比例係数で定義される。

によって与えられることが知られている。たとえば 20°C の乾燥空気中では約 344 m/sec であるし、 20°C の水では約 1483 m/sec である。この波が伝わることのできるのは、すべて変形に対してせん断応力が無視できる場合である。では変形によってせん断応力の無視できない弾性体の場合はどうであろうか。後で述べるように、均質な無限等方性弾性体の場合、二種類の弾性波が伝ばしうる。それは G を横弾性係数(せん断係数)、また λ, ν, E のそれぞれをラメの定数、ポアソン比、縦弾性係数とすれば

$$C_L = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} \quad \text{または} \quad = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad (2)$$

の速度で伝わる膨張波と

$$C_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \text{または} \quad = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} \quad (3)$$

の速度で伝わるせん断波である。鋼を例にとり、これら2つの波の伝ば速度を計算してみよう。 $E = 206 \text{ GPa}^*$ {約 21000 kgf/mm^2 }、 $G = 81 \text{ GPa}$ {約 8300 kgf/mm^2 }、 $\nu = 0.27$ 、 $\rho = 7.9 \text{ g/cm}^3$ の諸量を用いると

$$C_L = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} = \sqrt{\frac{0.73 \times 206 \times 10^9}{1.27 \times 0.46 \times 7.9 \times 10^3}} \text{ m/s} = 5.7 \text{ km/s} \quad (4)$$

$$C_T = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}} = \sqrt{\frac{206 \times 10^9}{2 \times 1.27 \times 7.9 \times 10^3}} \text{ m/s} = 3.2 \text{ km/s} \quad (5)$$

となる。これらの計算においては単位をそろえて計算することに注意されたい。二つの波は膨張変形が伝わる位相速度と、せん断変形の伝わる位相速度であるが均質等方弾性体の場合、それぞれの体積要素の運動方向を調べれば伝ば方向に対して、各々順に平行、直交するので前者を縦波、後者を横波という。この運動方向の一致あるいは直交現象は一般の異方性体では成立しない。従ってこのような場合には擬縦波あるいは擬横波と呼んで区別し、位相速度の速い方が前者である。

(quasi-transverse wave)

* 1 GPa (ギガパスカル) = $10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$, $1 \text{ kgf/mm}^2 = 9.8 \text{ MPa}$

1. 2. 境界に沿う波 弾性体が衝撃的に外荷重を受けて変形するとき、ふつう、縦波と横波の両方が生ずる。たとえ理想的な負荷のために一つのみの波しか生じなくとも、その波が弾性体の表面や接合面などの境界にあたると、一般に両方の波が反射して来る。これらの現象は後述するが境界での条件を満足するように反射波を考えることによって説明することができる。そのため、境界の存在により、縦波と横波の組合せを考えることは自然であり、その組合せの結果として境界に沿って伝はする特別の波がある。その一つに自由な弾性体表面に沿う Rayleigh 波がある。その振幅は表面からの深さに関して指数関数的に減衰している自由表面波であり、体積要素は二次元平面内で長円(だ円)を描く運動をし、伝は速度は縦波や横波のそれよりも遅い。この他に表層のある弾性体では、その表層に沿ってせん断変形の伝はする Love 波や、二つの異種弾性体の境界面に沿う Stoneley 波など特別に名付けられた自由波がある。いずれも、これらの波は系の固有値問題としてその性質が明らかにされる。

動的な弾性体の変形や応力の状態を解明するには、このような外荷重に無関係に存在する波があることを考慮して進めることが必要である。このことは動荷重による弾性体の応答を定性的に説明する裏付となるからである。(もちろん変位量や応力値などを定量的に決定づけるものは外荷重の大きさであり分布状態である。)したがって衝撃的な負荷にしろ 移動荷重にしろ そのような境界値問題を解く上で、その系の固有値問題によって帰結される事柄を理解することは非常に大切である。

2. 無限弾性体中の波動

2. 1. 運動方程式 微小な体積要素を切出し その釣合いを考えることにより運動方程式を導いてみよう。図1のように $dx \times dy \times dz$ の直方体とすると各面に作用する平均の力のうち x の正方向に作用するものは

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz, \quad \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dy dx, \quad \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz$$

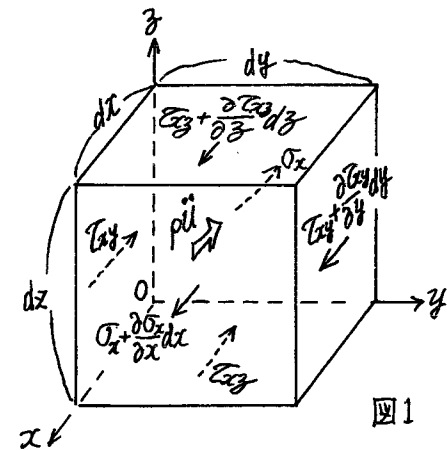
一方、負の方向に作用するものは

$$\sigma_x dy dz, \quad \tau_{xz} dy dx, \quad \tau_{xy} dx dz$$

と慣性による力

$$\left(\rho dx dy dz\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

である。この直方体が平衡状態を保っているならば x 方向の釣合いより、次式が成り立たなければならない。



$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dy dx + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dx dz = \sigma_x dy dz + \tau_{xz} dy dx + \tau_{xy} dx dz + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx dy dz$$

上式を整理すれば

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{6}$$

が得られる。同様に y 方向、 z 方向の釣合いから

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{7}$$

(6), (7), (8) 式は、古典弾性理論における平衡方程式(釣合いの式)^(体積力)で物体力を消去し、右辺に慣性項を考慮した式となっている。すなわち運動方程式と平衡方程式とは同じレベルのもので、一般に慣性項を考慮した場合に運動方程式と呼んでいる。(6), (7), (8) 式は応力成分によって表わしたもので材料固有の性質(構成関係)は考慮されていない。そこでこれを考慮するためには応力-ひずみ関係式^{*}を用いて、ひずみ成分表示に書きかえればよい。さらに解の適合性を保証するための一つの方法として変位とひずみの(幾何学的)関係^{**}を用いて、変位成分表示を求めればよい。等方性体に対する結果を示せば運動方程式は、結局、次の様になる。^{***}

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u \quad (9)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w \quad (11)$$

$$\text{ここに} \quad e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \text{(ラプラス演算子)}$$

$$* \quad \sigma_x = \lambda e + 2G e_x, \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G e_y, \quad \tau_{yz} = G \gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G e_z, \quad \tau_{zx} = G \gamma_{zx}$$

$$** \quad e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

^{***} 直交異方性体(orthotropic solid)の場合についても考えてみよう。

2.2. 波動方程式とその解　ここで、数学的準備として波動方程式の取扱いとその解の意味する事柄について述べておく。波動方程式とは、次の形の微分方程式である。

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = C^2 \nabla^2 \alpha \quad (\text{一般形}) \quad (12)$$

α は、ある物理量で変位、速度、応力、などなんでもよい。 t は時間、 C は定数、 ∇^2 はラプラス演算子で

$$\nabla^2 \alpha = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \quad ; \text{ 直角座標系} \quad (13)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2} \quad ; \text{ 円柱座標系} \quad (14)$$

$$= \frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \phi^2} + \cot \phi \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + \frac{1}{\sin^2 \phi} \cdot \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \theta^2} \right) \quad ; \text{ 球座標系} \quad (15)$$

である。今、簡単のために式(12)の特別な場合として

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (16)$$

を解いてみよう。 $ct = y$ とおいて変換すれば

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \quad (17)$$

$$\text{さらに} \quad \xi = x + y, \quad \eta = x - y \quad (18)$$

と変数変換を行うと、結局

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (19)$$

が得られる。式(18)のように実数変数の変換によって式(19)の形に導くことができる場合、式(16)は双曲型偏微分方程式と分類され、式(18)に従う (x, ct) 面上の2つの曲線群を特性曲線と言う。また、式(19)は式(16)の標準型と言う。式(19)を解くと

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = f(\xi) \quad (20)$$

さらに $f(\xi)$ は ξ の任意関数であるから $F(\xi)$ がその関数の原関数と考えれば

$$\alpha = F(\xi) + G(\eta) \quad (21)$$

$G(\eta)$ は η の任意関数。さて ξ, η をもとにもとせば

$$\alpha = F(x+ct) + G(x-ct) \quad (22)$$

念のため式(22)を式(16)に代入してみると解となって(満足していることがわかる

この様に、任意関数を2つ含んだ二階偏微分方程式(16)の解を、その一般解という。解(22)について言えば“ $F(x+ct)$ は物理的に、時間経過とともに x が減少する(負の)方向に伝播する波を、 $G(x-ct)$ は逆に x が増加する(正の)方向に伝播する波を表わしている。すなわち $\alpha = G(x-ct)$ について考えれば” $t \rightarrow t+\Delta t$, $x \rightarrow x+\Delta x$ と変化を与えたとき

$$G(x-ct) = G(x+\Delta x - c(t+\Delta t)) \quad (23)$$

が成立つためには

$$\Delta x - c\Delta t = 0 \quad (24)$$

でなければならない。この場合、 Δt の時間経過すれば、距離 $\Delta x = c\Delta t$ だけ x の増加した位置で同じ α の値(位相の等しい)をもった波が現われる。これより $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ は波の伝播速度を意味することがわかる。(下図参照)

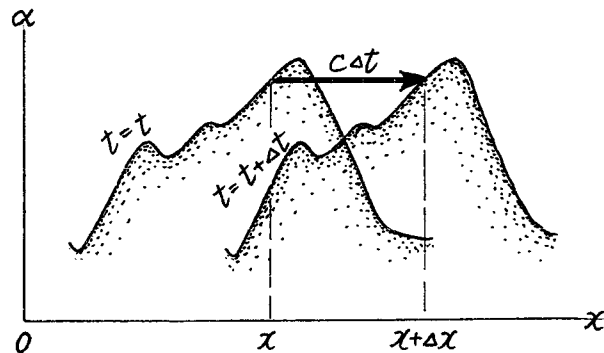


図 2

波形は、任意関数 F と G が具体的にある関数として与えられて、はじめて定まるもので初期条件、あるいは境界条件を考慮する初期値問題や境界値問題として解くことにより決定される。そこで初期条件

$$\alpha(x, 0) = \varphi(x), \quad \left[\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right]_{t=0} = \psi(x) \quad (25)$$

を満たす解を求めてみる。式(22)より

$$\alpha(x, t) = F(x+ct) + G(x-ct), \quad \frac{\partial \alpha}{\partial t}(x, t) = cF'(x+ct) - cG'(x-ct)$$

したがって、式(25)が満たされるためには

$$F(x) + G(x) = \varphi(x), \quad F'(x) - G'(x) = \frac{\psi(x)}{c} \quad (26)$$

式(26)の2式を積分して

$$F(x) - G(x) = \int^x \frac{\psi(\bar{x})}{c} d\bar{x} \quad (27)$$

上式と式(26)の1式より

$$F(x) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi(x) + \int^x \frac{\psi(\bar{x})}{c} d\bar{x} \right\}, \quad G(x) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi(x) - \int^x \frac{\psi(\bar{x})}{c} d\bar{x} \right\}, \quad (28)$$

これらの式で x は任意であったから x を $x+ct$ または $x-ct$ とし、式(22)に代入すれば

$$\alpha(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \varphi(x+ct) + \varphi(x-ct) \right\} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(\bar{x}) d\bar{x} \quad (29)$$

を得る。これを波動におけるストークスの公式と呼んでいる。

ある1点を波源とし波動が周囲に広がって伝播する点対称問題を考えよう。この時の波面は球面であり対称性より半径 r のみに依存し、式(15)の表示を利用すれば波動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \alpha}{\partial r} \right) \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial^2 (r\alpha)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (r\alpha)}{\partial r^2} \quad (30)$$

したがって $\alpha = \frac{1}{r} \left\{ F(r+ct) + G(r-ct) \right\}$ (31)

が解となる。ここに $F(\cdot)$ は無限遠から座標原点に収束して来る球面波を示し、 $G(\cdot)$ は原点から無限遠に向って広がる球面波を示す。 α の振幅は r に反比例する。

2.3. 膨張波とせん断波 式(9)(10)(11)の両辺をそれぞれ x, y, z で微分して加えあわせると

$$\rho \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 e \quad (32)$$

これは、前述の波動方程式の形であり、体積要素の膨張 e が速度

$$\sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$$

で伝はることを示している。次に式(10)(11)のそれぞれを x と y で微分し、後者から前者を引けば e は消えて

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \nabla^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (33)$$

となる。ここで $\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ (34)

とおけば ω_x は x 軸まわりの体積要素の回転成分を示す。式(33)は

$$\rho \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2} = G \nabla^2 \omega_x \quad (35)$$

の波動方程式形になる。したがって回転 ω_x は速度

$$\sqrt{G/\rho}$$

で伝はる波となっている。 y 軸、および z 軸まわりの回転成分 ω_y, ω_z についても式(35)の形に導けるので、やはり伝はる速度は $\sqrt{G/\rho}$ で与えられる。

さて、もし膨張成分 e がなければ式(9)は

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \nabla^2 u \quad (36)$$

であるから、回転成分の伝はる速度と一致し、せん断変形に関する波となる。

一方、回転成分がない時には、変位成分を

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (37)$$

とおけば、 $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ にできるので、この変位ポテンシャル ϕ を用いて

$$e = \nabla^2 \phi, \quad \frac{\partial e}{\partial x} = \nabla^2 u \quad (38)$$

であるから、式(9)は

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2G) \nabla^2 u \quad (39)$$

となる。したがって、伝はる速度は $\sqrt{(\lambda + 2G)/\rho}$ となり、膨張 e の伝はる速度に一致する。以上のごとく弾性体内を伝はる波には、二種類の伝はる速度を有する波がある。そこで回転のとみなわない膨張波の速度を $C_L (= \sqrt{(\lambda + 2G)/\rho})$ 、膨張をとみなさないせん断波の速度を $C_T (= \sqrt{G/\rho})$ とする。

次にこれらの波が伝わる時の体積要素の運動方向について考えてみよう。

いま、平面波が x 軸と平行方向に伝はるとする。等方性体であれば、この仮定は一般性を失わない。さらに伝はる速度を C とすれば、変位 u, v, w はただ一つのパラメータ $\psi = x - Ct$ の関数となり

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2}$$

y および z に関する導関数はすべて 0 となる。 u, v, w の ψ による 2 階微分をそれぞれ u'', v'', w'' で表わすと、(9)(10)(11)は

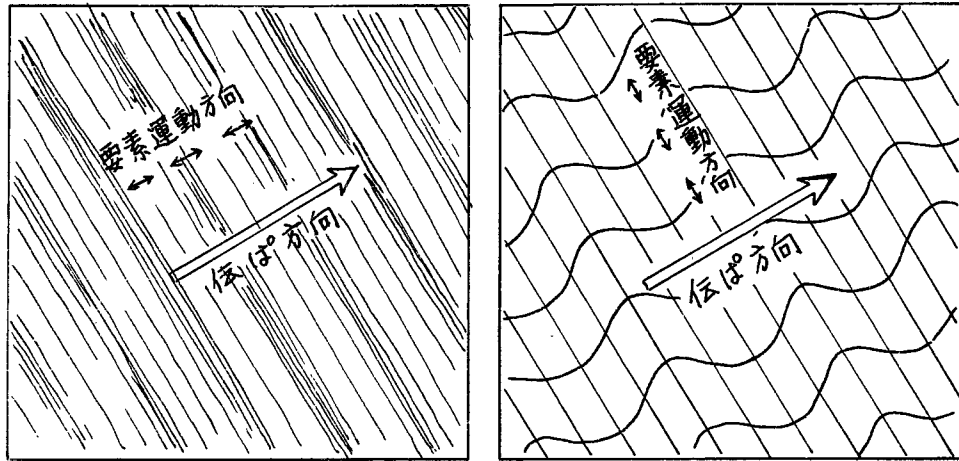
$$\rho C^2 u'' = (\lambda + 2G) u'', \quad \rho C^2 v'' = G v'', \quad \rho C^2 w'' = G w'' \quad (40)$$

を得る。これら変位成分の導関数 u'', v'', w'' に関する方程式を同時に満足させる意味のある解は二通りしかない。それは、

$$\textcircled{1} \quad C^2 = (\lambda + 2G)/\rho \quad \text{であって} \quad v'' = w'' = 0 \quad \text{の時}$$

$$\textcircled{2} \quad C^2 = G/\rho \quad \text{であって} \quad u'' = 0 \quad \text{の時}$$

最初の仮定で x 軸方向が伝はる方向にとったから、 $\textcircled{1}$ の場合はその方向と体積要素の運動方向 (u は x 方向変位!) と一致している。 $\textcircled{2}$ の場合は伝はる方向と体積要素の運動方向が直交しており、波面(位相面)と平行になる。



(a) 要素は伸縮する。(縦波) (b) 要素はせん断変形する。(横波)

(図3) 各要素の平衡位置からの変位ベクトルを考え、同じ大きさのベクトルとなる要素を結んでゆくと伝ば方向に直交する平面ができる(均質等方性の場合)。この面は波動の位相面に一致する。(平面波)*

これらのようすは図3に示した。せん断波の速度は、その弾性体の密度 ρ と横弾性係数 G にのみ依存したが、膨張波は $\sqrt{(\lambda+2G)/\rho}$ で与えられた。一見、体積ひずみ係数 K と ρ のみに依存するように思われるが $K=\lambda+\frac{2}{3}G$ であるから $\sqrt{K/\rho}=\sqrt{(\lambda+\frac{2}{3}G)/\rho}$ となって $\sqrt{(\lambda+2G)/\rho}$ と異っている。従って固体における膨張波速度は体積ひずみ係数のほかに横弾性係数にも依存し伝ばにさいしては弾性体が単に圧縮だけを受けているのではなく、圧縮とせん断の両方を受けていることに注意しなければならない。

* 図3は振幅について平面波を説明したものであるが、「位相面が平面となる波」という定義が一般性を有する。例をあげれば後述する表面波は振幅が深さによって異なるけれども位相面は平面となり平面波の一つとなる。

† 位相面上の振幅が等振幅とならない平面波を不均一平面波、また変位ベクトルが位相面と平行にも直交もしないものは—— // ——異方性平面波である。

3. 半無限弾性体中の波動

これまで述べて来た無限弾性体中の波の性質は、当然、半無限弾性体であろうとさらに有限体であろうと成立するものであるが境界があるために生ずる別の波の性質を考えてみよう。前述した膨張波もしくはせん断波が異った媒体の接合境界に入射すると反射(reflection)と屈折(refraction)の現象が見られる*。また一種の波しか入射しないのに一般に四つの波が生じて来るという現象がある** もし反射する境界が半無限長もしくは有限長の場合は波の散乱(scattering)や回折(diffraction)現象もある。

3.1. 自由境界面における弾性波の反射 最初に、平面膨張波が何の外力も作用していない自由表面に入射し、反射する場合を考える。波動が存在すれば変位や応力が生ずるが、この自由表面においては垂直応力 σ_x とせん断応力 τ_{xy} は0でなければならない。そこでこのような状態を実現させるために、境界面を波源とする新しい波が生じていると考え、入射波による変位成分や応力成分にこの新しい波による変位成分や応力成分を重ね合わせる。この新しい波が反射波である。

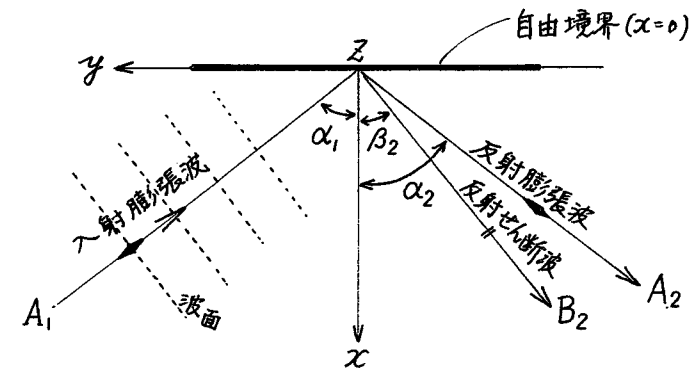


図4. 膨張波の自由表面における反射

* 一方の媒体がなく真空の時は媒体側での反射のみ起る。

** 一方の媒体がなく真空の時は二つの波が生ずる。

入射する平面膨張波の伝播方向を xy 面において x 軸と α_1 の角であるとす。自由境界面は yz 面 ($x=0$) とする。(図4)。いま波面に垂直な変位をもつ単一の調和波を

$$\Phi_1 = A_1 \sin(pt + f_1 x + g_1 y) \quad \text{[入射膨張波]} \quad (41)$$

によって考える。 A_1 は入射波の振幅であり、 f_1 と g_1 は

$$f_1 = \frac{p \cos \alpha_1}{C_L}, \quad g_1 = \frac{p \sin \alpha_1}{C_L} \quad (42)$$

である。式(41)を $\Phi_1 = A_1 \sin \left\{ \frac{p}{C_L} [C_L t + (\cos \alpha_1 \cdot x + \sin \alpha_1 \cdot y)] \right\}$ の形に書きなおしてみればわかるように 方向余弦 ($\cos \alpha_1, \sin \alpha_1$) をもった平面波が時間とともに、速度 C_L で x, y 座標の負の方向に伝播する波である。いま、この波による x と y 方向の変位を u_1, v_1 とするならば 縦波であることを注意して

$$u_1 = \Phi_1 \cos \alpha_1, \quad v_1 = \Phi_1 \sin \alpha_1 \quad (43)$$

次に、膨張波が x 軸と α_2 の角度で反射し、縦波である膨張波を仮定すれば

$$\Phi_2 = A_2 \sin(pt - f_2 x + g_2 y + \delta_1) \quad \text{[反射膨張波]} \quad (44)$$

ここに $f_2 = \frac{p \cos \alpha_2}{C_L}, \quad g_2 = \frac{p \sin \alpha_2}{C_L}, \quad \delta_1$; 反射による位相変化, (45)

式(44)において A_2, α_2, δ_1 は未知数であるとする。この反射波によって生ずる変位 u_2, v_2 は

$$u_2 = -\Phi_2 \cos \alpha_2, \quad v_2 = \Phi_2 \sin \alpha_2 \quad (46)$$

式(43)と式(46)の変位成分を重ね合せて、応力成分の和が境界 ($x=0$) で $\sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0$ となるように A_2, α_2, δ_1 を考える。応力と変位の関係

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (47)$$

に $u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2$ を考慮して式(43)(46)を入れれば、ホ-式より

$$\begin{aligned} \sigma_x = & [\lambda(f_1 \cos \alpha_1 + g_1 \sin \alpha_1) + 2G f_1 \cos \alpha_1] \Phi_1' \\ & + [\lambda(f_2 \cos \alpha_2 + g_2 \sin \alpha_2) + 2G f_2 \cos \alpha_2] \Phi_2' \end{aligned} \quad (48)$$

$$\text{ここに} \quad \Phi_1' = A_1 \cos(pt + f_1 x + g_1 y) \quad (49)$$

$$\Phi_2' = A_2 \cos(pt - f_2 x + g_2 y + \delta_1) \quad (50)$$

式(42)(45)を代入して

$$\sigma_x = \frac{p}{C_L} [(\lambda + 2G \cos^2 \alpha_1) \Phi_1' + (\lambda + 2G \cos^2 \alpha_2) \Phi_2'] \quad (51)$$

表面 ($x=0$) で $\sigma_x = 0$ とならなければならぬから

$$A_1 (\lambda + 2G \cos^2 \alpha_1) \cos(pt + g_1 y) + A_2 (\lambda + 2G \cos^2 \alpha_2) \cos(pt + g_2 y + \delta_1) = 0. \quad (52)$$

上式がすべての y と t に関して成立しなければならない。その条件は

$$\left. \begin{aligned} \text{①} \quad & g_1 = g_2 \\ \text{②} \quad & \delta_1 = 0 \text{ で } A_1 = -A_2 \text{ (または } \delta_1 = \pi \text{ で } A_1 = A_2) \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

が同時に成り立つことである。①は膨張波の入射角 α_1 と膨張波の反射角 α_2 が等しくなることを示し、②は自由境界で反射時に位相が逆転 (π だけずれる) することを示している。

次に表面 ($x=0$) で $\tau_{xy} = 0$ を成立させる条件が式(53)と同等になるかを考える。式(47)のホ-式に u, v を入れると

$$\tau_{xy} = G \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Phi_1 \sin \alpha_1 + \Phi_2 \sin \alpha_2) + \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_1 \cos \alpha_1 - \Phi_2 \cos \alpha_2) \right] \quad (54)$$

したがって $x=0$ では

$$\tau_{xy} = \frac{pG}{C_L} [A_1 \sin 2\alpha_1 \cdot \cos(pt + g_1 y) - A_2 \sin 2\alpha_2 \cdot \cos(pt + g_2 y)] \quad (55)$$

式(55)は式(53)の条件 ($\alpha_1 = \alpha_2, A_1 = -A_2$) によって恒等的に 0 にすることはできない。すなわち、単一の反射波のみで自由表面の境界条件 $\sigma_x = \tau_{xy} = 0$ を満たすことは不可能である。そこでもう一つの波、せん断波も反射波として生じていると考えてみる。

$$\Psi_2 = B_2 \sin(pt - f_3 x + g_3 y + \delta_2) \quad \text{[反射せん断波]} \quad (56)$$

ここに $f_3 = \frac{p \cos \beta_2}{C_T}, \quad g_3 = \frac{p \sin \beta_2}{C_T}, \quad \delta_2$; 位相変化, β_2 ; 反射角 (57)

式(56)の Ψ_2 は横波とすると、生ずる x, y 方向変位 u_3, v_3 は

$$u_3 = \Psi_2 \sin \beta_2, \quad v_3 = \Psi_2 \cos \beta_2 \quad (58)$$

表面(x=0)で $\tau_{xy}=0$ より $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ (59)

ここに $u = u_1 + u_2 + u_3$, $v = v_1 + v_2 + v_3$ である。したがって式(59)は
 $(f_1 \sin \alpha_1 + g_1 \cos \alpha_1) \Phi_1' - (f_2 \sin \alpha_2 + g_2 \cos \alpha_2) \Phi_2' - (f_3 \cos \beta_2 - g_3 \sin \beta_2) \Psi_2' = 0$, (60)
 さらに $f_1, f_2, \dots, \Phi_1', \dots$ などを具体的に代入して整理すれば

$$\frac{A_1}{C_L} \sin 2\alpha_1 \cos(pt + g_1 y) - \frac{A_2}{C_L} \sin 2\alpha_2 \cos(pt + g_2 y + \delta_1) - \frac{B_2}{C_T} \cos 2\beta_2 \cos(pt + g_3 y + \delta_2) = 0, \quad (61)$$

式(61)がすべての y について成立するのは $g_1 = g_2 = g_3$ とした時であるから

$$\frac{\sin \alpha_1}{C_L} = \frac{\sin \alpha_2}{C_L} = \frac{\sin \beta_2}{C_T} \quad (62)$$

すなわち 膨張波は $\alpha_1 = \alpha_2$ で入射角と反射角が等しく、せん断波は ^{の反射波}速度比に依存している。
 $\frac{C_L}{C_T} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2}$ (63)

式(61)において $\delta_1 = \delta_2 = 0$ とおき A_2 と B_2 の符号に注意して式(63)を代入すれば

$$(\tau_{xy})_{x=0} = 0 \rightarrow 2(A_1 - A_2) \cos \alpha_1 \sin \beta_2 - B_2 \cos 2\beta_2 = 0 \quad (64)$$

さて、 $x=0$ で $\sigma_x = 0$ を満たすかを調べる。

$$\sigma_x = (\lambda + 2G) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y} \quad (65)$$

であるから $u = u_1 + u_2 + u_3$, $v = v_1 + v_2 + v_3$ とし、 $x=0$ を代入すると

$$\sigma_x = \frac{A_1}{C_L} (\lambda + 2G \cos^2 \alpha_1) \cos(pt + g_1 y) + \frac{A_2}{C_L} (\lambda + 2G \cos^2 \alpha_2) \cos(pt + g_2 y + \delta_1) - \frac{B_2}{C_T} (G \sin 2\beta_2) \cos(pt + g_3 y + \delta_2) \quad (66)$$

$\tau_{xy}=0$ の条件をあわせる時に用いた関係 $g_1 = g_2 = g_3$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ を式(66)にもあてはめてみれば、すべての y, t について $\sigma_x = 0$ とするのは

$$(A_1 + A_2)(\lambda + 2G \cos^2 \alpha_1) - B_2 \frac{C_L}{C_T} G \sin 2\beta_2 = 0 \quad (67)$$

が成立つ時である。いま、この式を

$$\frac{\lambda + 2G}{G} = \frac{C_L^2}{C_T^2} = \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \beta_2} \quad (68)$$

の関係を用いて書きかえると

$$(\sigma_x)_{x=0} = 0 \rightarrow (A_1 + A_2) \cos 2\beta_2 \sin \alpha_1 - B_2 \sin \beta_2 \sin 2\beta_2 = 0 \quad (69)$$

従って式(64)と式(69)を満たす時の Φ_2 と Ψ_2 を反射波として採用すれば自由表面の条件は、すべて成立つ。式(64)(69)は入射波振幅 A_1 と反射波振幅 A_2, B_2 の関係を定めるもので、任意の振動数(または任意の ρ) の調和波に対して成立するので任意の波形の波についても適用できる。図5はポアソン比 $\nu = \frac{1}{3}$ (すなわち $C_L = 2C_T$) の時、反射波振幅の入射波振幅に対する比の値を、入射角によってどのようになるかを図示したものである。振幅 B_2 は入射角 α_1 が約 48° で最大となり、 A_1 よりも大きい。また A_2 は約 65° の時最小である。垂直入射($\alpha_1 = 0$) の時、反射せん断波は生じない($B_2 = 0$)。

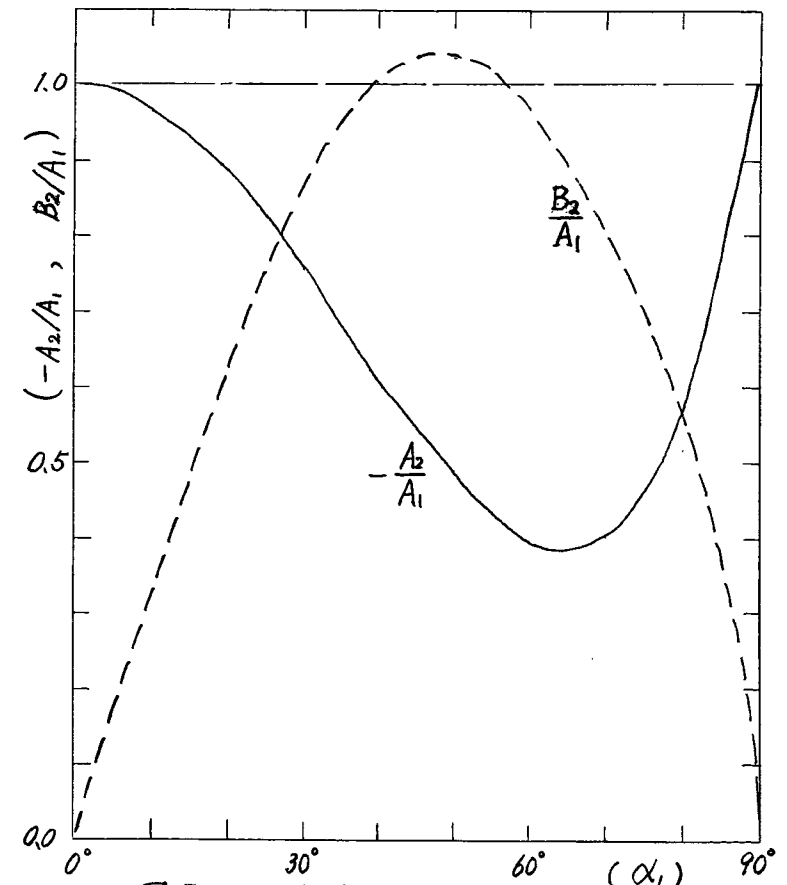


図5 ; 反射波振幅の入射角による変化

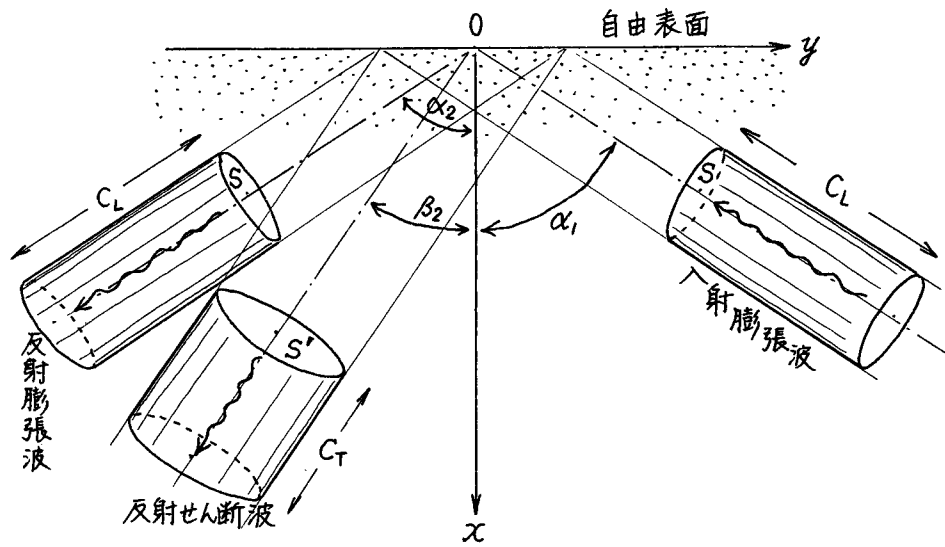


図6：反射する時のエネルギー収支

境界面は自由表面であるから、外力によるエネルギーの受入れはない。したがって入射波のみならずエネルギーと反射波がもたらすエネルギーは等しくなりエネルギーの保存則が成立するはずである。このことを確かめてみよう。

いま、入射膨張波歪 [式(41)]が単位時間に自由境界面にもたらすエネルギー E_1 は次のようになる。

$$E_1 = \frac{1}{2} \rho C_L S (A_1 p)^2 \quad (70)$$

この成立ちについて便宜的に一自由度振動によって類推すればよい。図7のような

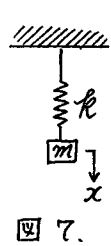


図7.

系が振動している時、系のもつエネルギーを考えると $E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$ となる。ただし x は平衡状態からの変位とする。第一項が運動エネルギー、第二項がポテンシャルエネルギーである。いま、 $A \sin pt$ の調和振動であったとすると $\dot{x} = A p \cos pt$ である。系のエネルギーは不変であるから $x=0$ となった時、すべてのポテンシャルエネルギーが運動エネルギーになったと考えられるから \dot{x} が最大の時と考え $\dot{x} = A p$

すなわち $E = \frac{1}{2} m (A p)^2$ 故に、図6に示したエネルギー束をとりまく管内のエネルギーは式(70)で与えられると類推できる。厳密には連続体力学的取扱いによって与えることができる。式(70)で S は管の断面積である。同様に、反射膨張波歪 [式(44)] と、反射せん断波歪 [式(58)] について単位時間に自由境界から持ち去られるエネルギーをそれぞれ E_2, E_3 とすれば

$$E_2 = \frac{1}{2} \rho C_L S (A_2 p)^2, \quad E_3 = \frac{1}{2} \rho C_T S' (B_2 p)^2 \quad (71a, b)$$

したがって $\Delta E = E_1 - (E_2 + E_3)$ が0になることを示せばよい。式(62)より

$$C_T = C_L \frac{\sin \beta_2}{\sin \alpha_1} \quad (72a)$$

また、図6に示す幾何学的関係より

$$S' = S \frac{\cos \beta_2}{\cos \alpha_1} \quad (72b)$$

これら C_T と S' を式(71b)に入れ、さらに ΔE を求めると

$$\Delta E = \frac{1}{2} \rho C_L S p^2 \left[(A_1^2 - A_2^2) - B_2^2 \frac{\sin \beta_2 \cdot \cos \beta_2}{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1} \right] \quad (73)$$

それぞれの振幅間の関係、式(64)(69)より

$$A_1 - A_2 = \frac{1}{2} B_2 \frac{\cos 2\beta_2}{\cos \alpha_1 \cdot \sin \beta_2} \quad (74a)$$

$$A_1 + A_2 = B_2 \frac{\sin \beta_2 \cdot \sin 2\beta_2}{\cos 2\beta_2 \cdot \sin \alpha_1} \quad (74b)$$

$$\text{したがって } A_1^2 - A_2^2 = B_2^2 \frac{\sin \beta_2 \cdot \cos \beta_2}{\sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_1} \quad (74c)$$

これを、式(73)に入れば明らかに $\Delta E = 0$ となる。

以上のことから、エネルギー保存則が成立し図5のせん断波の振幅が、入射の振幅より大きくなることは不自然でないことが裏付けされた。

問題

[1] $\psi_1 = B_1 \cdot \sin(pt + f_4x + g_4y)$ はどのような波を与えるか。ただし $f_4 = \frac{p \cos \beta_1}{C_T}$, $g_4 = \frac{p \sin \beta_1}{C_T}$ とし、横波とする。

[2] 入射角を β_1 , 反射膨張波の反射角を α_2 とすると次の関係が成立することを示せ。

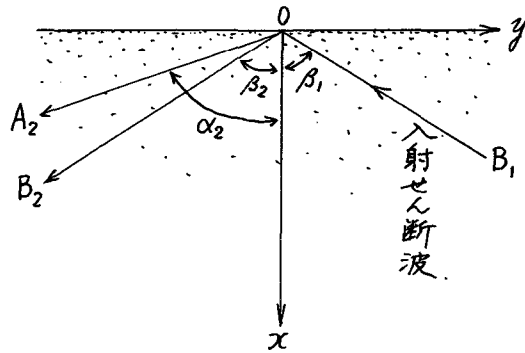
$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_1} = \frac{C_L}{C_T}$$

ただし入射波はせん断波とする。次に入射振幅を B_1 , 反射膨張波の振幅を A_2 , 反射せん断波の振幅を B_2 とすると次の関係が成立することを示せ。

$$(B_1 + B_2) \sin 2\beta_1 \cdot \sin \beta_1 - A_2 \sin \alpha_2 \cdot \cos 2\beta_1 = 0$$

$$(B_1 - B_2) \cos 2\beta_1 - 2A_2 \sin \beta_1 \cdot \cos \alpha_2 = 0$$

これをもとにして、入射振幅 B_1 に対するそれぞれの反射波の振幅 A_2, B_2 を求め図5にならうてグラフを描け。またそのグラフから、せん断波の反射について、どのようなことが言えるか。



[3] y-z面を半無限体の自由境界面とするとき、z方向のみの変位成分 w をもつせん断波 $\chi_1 = C_1 \sin(pt + f_5x + g_5y)$ が入射角 γ_1 で入射するとき、これと同種類の反射波しか生じないことを示せ。このような波をSH波 (horizontally polarized shear wave) と言う。これまでに取扱って来たせん断波はz方向運動のない横波でSV波 (vertically polarized shear wave) と言って区別する。これに対し膨張波をP波と言っている。

3.2. 異種弾性体の接合境界における反射と透過屈折 この節では、はじめから図8のように二つの反射波と二つの屈折波が生ずるものとして考えよう。

この時、それぞれの波によって生ずる成分の合成されたものは接合境界で、次の条件を満足しなければならない。

- (i) 境界に垂直な方向の変位が連続。
- (ii) 境界の接線方向の変位が連続。
- (iii) 境界に垂直な方向の応力が連続。
- (iv) 境界の接線方向の応力が連続。

3.1節では自由境界であったため(iii)(iv)の応力が0という条件のみであったが二つの異った弾性体の完全接合を考える場合はこのように4つの条件となる。

すなわち、

$$(i) \sum u_a = \sum u_e \quad (75)$$

$$(ii) \left. \begin{aligned} \sum v_a &= \sum v_e \\ \sum w_a &= \sum w_e \end{aligned} \right\} (76)$$

$$(iii) \sum (\sigma_x)_a = \sum (\sigma_x)_e$$

または

$$\sum (\lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x})_a = \sum (\lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x})_e \quad (77)$$

$$(iv) \sum (\tau_{xy})_a = \sum (\tau_{xy})_e$$

$$\sum (\tau_{xz})_a = \sum (\tau_{xz})_e$$

または

$$\sum [G (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})]_a = \sum [G (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})]_e$$

$$\sum [G (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})]_a = \sum [G (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})]_e \quad (78)$$

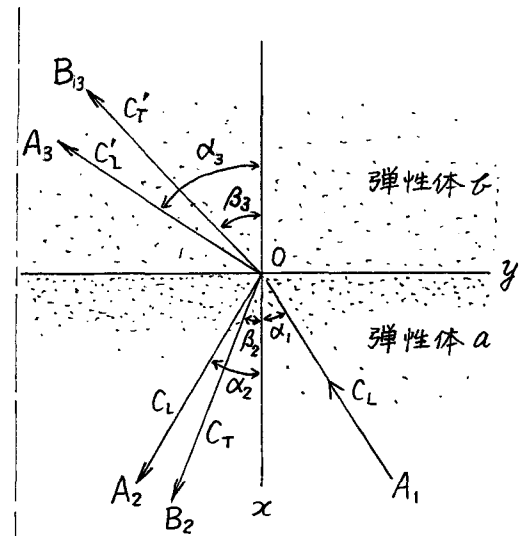


図8; 入射膨張波の反射と透過屈折

ただし記号 \sum はそれぞれの成分の総和を示し、たとえば $\sum u_a$ は入射波、反射膨張波、反射せん断波による変位 u の弾性体 a における総和を示す。4つの条件(i)~(iv)は、それぞれの屈折及び反射波の角度が次の関係になる時に満たされる。

$$\frac{\sin \alpha_1}{C_L} = \frac{\sin \alpha_2}{C_L} = \frac{\sin \beta_2}{C_T} = \frac{\sin \alpha_3}{C_L} = \frac{\sin \beta_3}{C_T} \quad (79)$$

分母は、それぞれ波の位相速度で 図 8 に記入してある。また振幅の関係は

$$(A_1 - A_2) \cos \alpha_1 + B_2 \sin \beta_2 - A_3 \cos \alpha_3 - B_3 \sin \beta_3 = 0, \quad (80)$$

$$(A_1 + A_2) \sin \alpha_1 + B_2 \cos \beta_2 - A_3 \sin \alpha_3 + B_3 \cos \beta_3 = 0, \quad (81)$$

$$(A_1 + A_2) C_L \cos 2\beta_2 - B_2 C_T \sin 2\beta_2 - A_3 C_L' \left(\frac{\rho_c}{\rho_a}\right) \cos 2\beta_3 - B_3 C_T' \left(\frac{\rho_c}{\rho_a}\right) \sin 2\beta_3 = 0, \quad (82)$$

$$\rho_a C_T^2 \left[(A_1 - A_2) \sin 2\alpha_1 - B_2 \left(\frac{C_L}{C_T}\right) \cos 2\beta_2 \right] - \rho_c C_T'^2 \left[A_3 \left(\frac{C_L}{C_L'}\right) \sin 2\alpha_3 - B_3 \left(\frac{C_L}{C_T'}\right) \cos 2\beta_3 \right] = 0, \quad (83)$$

でなければならない。 ρ_a, ρ_c はそれぞれの弾性体の密度である。ここで z 方向の変位 w とせん断応力 τ_{xz} との境界における連続性は平面ひずみ問題として考えているので自動的に満足されている。全部で 5 種類の波であるから (80)-(83) の 4 本の式より、入射波の振幅 A_1 が与えられれば、 A_1 に対する比がわかるから、すべての波の振幅が定まる。

いま、特別な場合として境界に膨張波が垂直に入射する場合 ($\alpha_1 = 0$) を考えてみよう。このとき

$$B_2 = B_3 = 0 \quad (\text{すなわち、せん断波が生じない}) \quad (84)$$

$$A_2 = A_1 (\rho_c C_L' - \rho_a C_L) / (\rho_c C_L' + \rho_a C_L) \quad (85)$$

$$A_3 = A_1 (2\rho_a C_L) / (\rho_c C_L' + \rho_a C_L) \quad (86)$$

の関係を得る。式(85)より反射応力波の大きさは $\rho_c C_L' - \rho_a C_L$ の値に依存している。したがって二つの弾性体が等しい場合には $\rho_c C_L' = \rho_a C_L$ で $A_2 = 0$ となり反射波は生じない。このように媒体の密度 ρ と波の伝ば速度 C との積は波の強さに関係しており ρC をその物体が持っている固有インピーダンス (characteristic impedance) と言う。もし、

$$(\rho C)_a < (\rho C)_c$$

であるならば、反射波成分による振幅は入射波による振幅と同符号であるが反射波によって伝ば方向が変わるので位相が π だけ変化する。

$$\text{逆に、} \quad (\rho C)_a > (\rho C)_c$$

の時は振幅の符号が変わり、位相は不変である。入射せん断波に対しても、反射、屈折の方向および振幅の大きさを論ずることができる。ここで注意したいのはせん断波であっても SH 波 (19 頁の [3] 参照) の場合には、境界の存在によっても SV 波や P 波が生じない。

問 題

- [1] 固有インピーダンスによって自由境界における反射波の位相変化を説明せよ。
- [2] 異種弾性体の接合境界における反射、透過屈折現象を SH 波または SV 波が入射する時に対して考え、波の方向および振幅を説明せよ。

3.3 全反射 反射現象に関する次の関係式 [Snellの公式]

$$\frac{\sin \alpha_1}{C_L} = \frac{\sin \alpha_2}{C_L} = \frac{\sin \beta_2}{C_T} = \frac{\sin \alpha_2'}{C_L'} = \frac{\sin \beta_2'}{C_T'} \quad (87)$$

が実変数の範囲で満される時について考えたが、入射角と、それぞれの媒質中の音速との関係から、常に満されるとは限らない。入射波の伝ば速度が反射あるいは屈折波の速度より遅い時には、反射あるいは屈折角をちょうど 90° にする入射角が存在し、これより大きい入射角では式(87)は実数の範囲で成立たなくなり、今までは様相の異った現象となる。すなわち、幾何光学でも知られている全反射現象をひき起す。自由面に横波が入射する場合には $\sqrt{G/(\lambda+2G)}$ よりも $\sin \beta_1$ が大きな値になる時に起る。異種弾性境界に入射する波に対しても屈折波に対する臨界入射角が存在し、 C_L' が C_L よりも大きい時には、 $\sin \alpha_1$ の値が C_L/C_L' よりも小さい場合に限って第二媒体中に屈折膨張波を生ずる。

全反射状態を複素数を導入して調べてみる。自由境界に平面調和振動の横波が入射し、その伝ば方向は xy 面に平行とし、要素の運動は xy 面内とする。この時、入射角と反射角との関係は

$$\frac{\sin \alpha_2'}{\sin \beta_1'} = \frac{C_L}{C_T} = \left(\frac{\lambda+2G}{G} \right)^{1/2} \quad (88)$$

入射波、反射波、それぞれの位相面に平行な変位を Ψ_1' , Ψ_2' , Φ_2' とすれば

$$\Psi_1' = \text{Re} \{ B_1 \exp[i(pt + f_1'x + g_1'y)] \} \quad (89)$$

$$\Psi_2' = \text{Re} \{ B_2 \exp[i(pt - f_1'x + g_1'y + \delta_1)] \} \quad (90)$$

$$\Phi_2' = \text{Re} \{ A_2 \exp[i(pt - f_2'x + g_2'y + \delta_2)] \} \quad (91)$$

ここに $\text{Re}\{\}$ は実部をとることを示し、また次の置換えをしている。

$$\left. \begin{aligned} f_1' &= p(\cos \beta_1')/C_T, & f_2' &= p(\cos \alpha_2')/C_L \\ g_1' &= p(\sin \beta_1')/C_T, & g_2' &= p(\sin \alpha_2')/C_L \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

さて、もし $\sin \beta_1' > (C_T/C_L)$ であって $\sin \alpha_2' > 1$ となるならば $\cos \alpha_2'$ は純虚数となり、式(92)の f_2' は $-im$ となる。ただし m は

$$m = \left(\frac{p}{C_L} \right) \left\{ \left(\frac{C_L}{C_T} \right)^2 \sin^2 \beta_1' - 1 \right\}^{1/2} \quad (93)$$

従って

$$\Phi_2' = A_2 e^{-mx} \cos(pt + g_2'y) \quad (94)$$

の形になる。これは境界から隔るにつれ振幅が指数

関数的に減衰する波で表面波の様相を示し、位相は x 座標に無関係となり、表面が境界面と直交する。反射横波の振幅は入射波の振幅に等しく ($B_1 = B_2$)。また境界条件を満足させるための位相変化 δ_1 は β_1 と C_L/C_T の関数となり、もはや 0 や π となるのは特殊な場合のみとなる。全反射しない時は、振幅比は波長に無関係であったが、する時は波長(または波形)依存性があり、解析はより複雑となる。また、指数関数的に減衰する波は表面から離れる方向にエネルギーを持去ることを示さないから、入射波のエネルギーは残りの減衰しない平面波に分けられて行く。

以上、反射、透過(屈折)波についてまとめると以下の様なことが計算結果よりわかる。

- ① 垂直入射(入射角 0) の時には、異種の波は反射波にも屈折波にも生じない。
- ② 不連続面で起される異種の波は、同種の波に比べて一般に振幅が小さい。
- ③ 同種の波の振幅は、射出角が大きくなるとある一定値に近づき、その値は両方の物質の性質によって定まる。射出角とは入射角の余角
- ④ 上記の場合、硬い媒質から軟い方に屈折して入って行く波の振幅は、入射波のそれより大きくなり、逆の場合には小さくなる。
- ⑤ P および SH 波が伝ば速度のはやい媒質から遅い媒質に入射する場合を除き、入射角によっては全反射が起る。
- ⑥ 全反射時には一種の表面波が生じ、波の位相が変化する。
- ⑦ 全反射の起るあたりで、屈折波の振幅は非常に大きくなる。

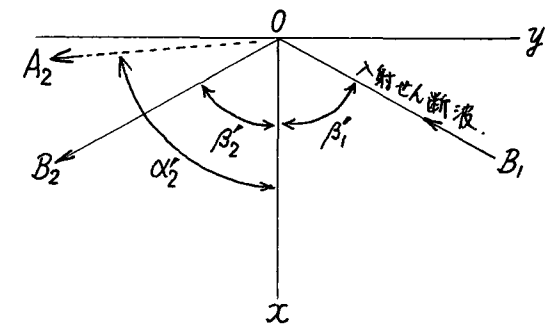


図9; 自由表面からの全反射。

3.4 入射膨張波の反射・屈折の数値例 数値計算に用いる諸量を

次のようにとる。
 $\rho^{(II)} : \rho^{(I)} = 1 : 1.093 = 0.915$
 $G^{(II)} : G^{(I)} = 0.61 : 1 = 1/1.639$
 ポアソン比 $\nu^{(II)} = \nu^{(I)} = 0.25$

また記号は、 e ；射出角（入射角の余角）

- A_2, B_2, A_3, B_3 は反射P・S波の振幅および屈折P・S波の振幅
- $|A_2|, |B_3|$ などは全反射を起した反射P波、屈折S波などの振幅
- φ_2, θ_3 などは上記 A_2, B_3 などの位相角で φ は常にP波に、 θ はS波に対応する。なお添字1, 2, 3はそれぞれ入射、反射、屈折波を示す。

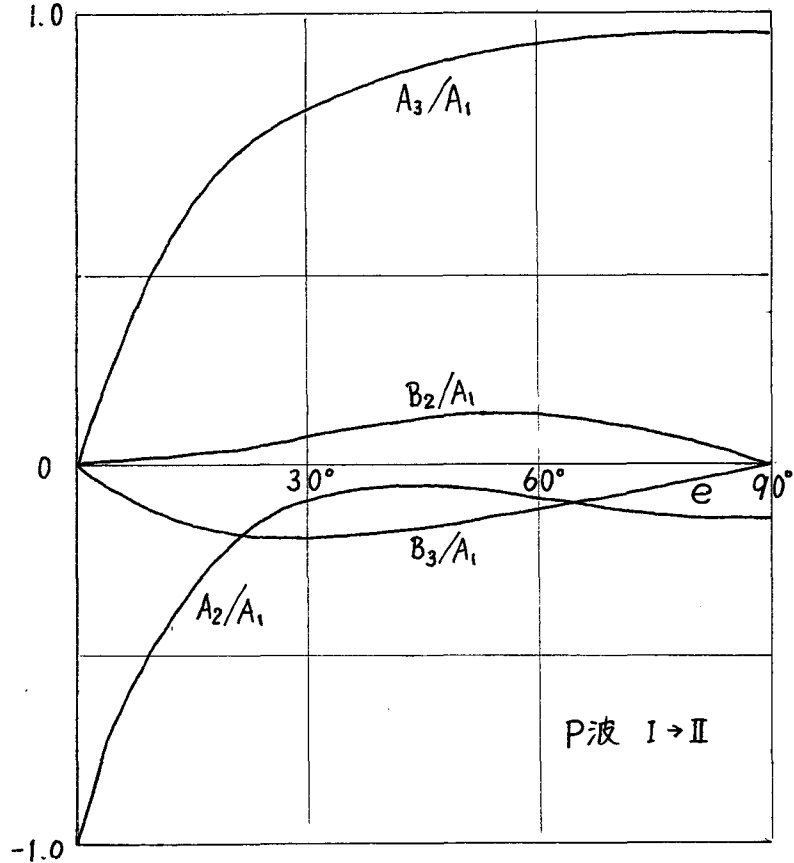


図10. 媒質I (速い媒質) の側からP波が入射するとき。全反射は起らず振幅の変化もなだらかで途中に0となる所もない。

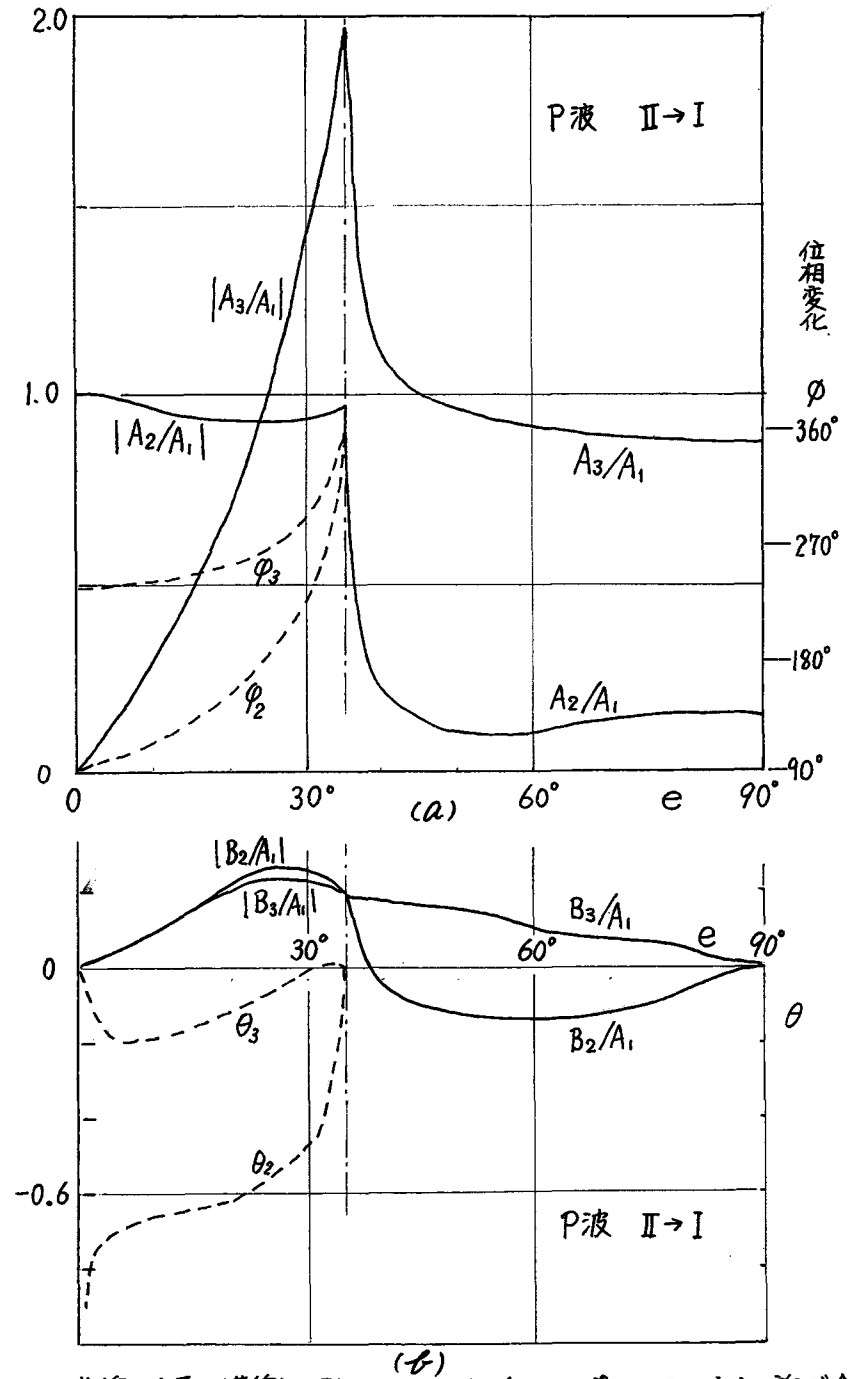


図11. 媒質II (遅い媒質) の側からP波が入射するとき。eの小さい所で全反射している。この場合 $e = 35^{\circ}16'$ が臨界角 (すなわち入射角 $\alpha_1 = 54^{\circ}44'$ より大きい時に全反射現象を生ずる)

3.5 レーレー波 (Rayleigh Waves)

境界面が存在するために起る現象として反射・屈折があったが、この他に境界面に沿って伝ばする波動現象がある。

自由表面からの距離が大きくなるにつれ指数関数的に振幅が減衰するが、伝ば方向については理論的にどこまでも減衰しないで進行するレーレー (Rayleigh) 波がある。

以下に、運動方程式の解として、この波を見つけ、その波動特性を考えてみよう。座標系は図12のように表面からの深さ方向にz軸を、また表面はz=0のxy平面とする。平面波はx方向に伝ばするものとし、変形はy座標に無関係な平面ひずみ状態とする

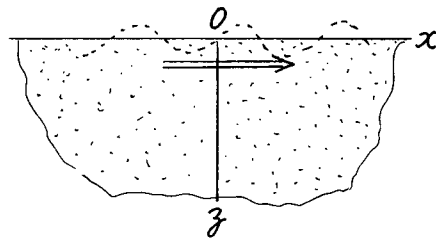


図12 レーレー波の伝ば

と、次のような二つのポテンシャル関数φとψを導入すると便利である。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (95) \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (96)$$

そうすると膨張eは

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla^2 \phi \quad (97)$$

またxy面における回転ωyは

$$2\omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = \nabla^2 \psi \quad (98)$$

これより、擾乱により生ずる膨張はφに関係し、回転変形はψに関係する。よって、物体の動的変形状態を膨張によるものと回転によるもの、すなわちφとψとに分けて解析できる。運動方程式は5頁の式(9)(10)(11)より

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u \quad (99)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v \quad (100)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w \quad (101)$$

式(99)-(101)を本問の場合に書きかえると、y座標に無関係であることを考慮して

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \phi) + G \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \psi) \quad (102)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) - \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) = (\lambda + 2G) \frac{\partial}{\partial z} (\nabla^2 \phi) - G \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi) \quad (103)$$

とポテンシャルφとψで表示できる。この二式はφとψが次式を満足するものであるならばよい。これは変位成分の剛体回転や剛体移動によるものを考慮しなくともよいという自由度があるので可能である。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = [(\lambda + 2G)/\rho] \nabla^2 \phi = C_L^2 \nabla^2 \phi \quad (104)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (G/\rho) \nabla^2 \psi = C_T^2 \nabla^2 \psi \quad (105)$$

ここで次のような調和波を考える。

$$\phi = F(z) \cdot \exp[i(pt - fx)] \quad (106)$$

$$\psi = G(z) \cdot \exp[i(pt - fx)] \quad (107)$$

これは、周波数p/2π(角振動数p)で波長2π/fで伝ば速度C = p/fをもちxの正方向に進む波である。ここにiは虚数単位、F, Gはzの関数となる振幅である。φを式(104)に代入して

$$-\frac{p^2}{C_L^2} F(z) = -f^2 F(z) + F''(z); \quad F''(z) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} F \quad (108)$$

書きかえて $F''(z) - (f^2 - k^2) F(z) = 0; \quad k = \frac{p}{C_L} \quad (109)$

したがってこの一般解は

$$F(z) = A \exp(-kz) + A' \exp(kz); \quad k^2 = f^2 - k^2 \quad (110)$$

上式の右辺第二項は、z座標が増加するとともに指数関数的に大きくなることを示しているので、表面波という性質上 A' = 0 として、その項を消去しなければならない。同様にψについては

$$-k^2 G(z) = -f^2 G(z) + G''(z); \quad k = p/C_T \quad (111)$$

$$\text{したがって } G(z) = B \exp(-\lambda z) \quad ; \quad \lambda^2 = f^2 - \kappa^2 \quad (112)$$

以上から、ポテンシャルの形は

$$\phi = A \exp[-\beta z + i(pt - fx)] \quad (113)$$

$$\psi = B \exp[-\lambda z + i(pt - fx)] \quad (114)$$

をとる。さて、境界条件を考える。自由表面で応力 σ_z 、 τ_{zx} が 0 であるから

$$\text{まず } \sigma_z = \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} = (\lambda + 2G) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \lambda \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2G \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \quad (115)$$

の式に (113)(114) を代入し $z=0$ とおけば

$$A [(\lambda + 2G)\beta^2 - \lambda f^2] - 2BGi\lambda f = 0 \quad (116)$$

$$\text{一方 } \tau_{zx} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \left(2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad (117)$$

より、境界条件を考慮して得られる関係式は、前と同様にして次を得る。

$$2i\beta f A + (\lambda^2 + f^2) B = 0 \quad (118)$$

ϕ と ψ が共に 0 とならないためには式 (116)(118) の係数行列式が 0 とならなければならぬ。したがって

$$4G\beta\lambda f^2 = \{(\lambda + 2G)\beta^2 - \lambda f^2\}(\lambda^2 + f^2) \quad (119)$$

両辺を λ で乗し、 $\beta^2 = f^2 - \kappa^2$ 、 $\lambda^2 = f^2 - \kappa^2$ を代入すると

$$16G^2(f^2 - \kappa^2)(f^2 - \kappa^2)f^4 = [-(\lambda + 2G)\kappa^2 + 2Gf^2]^2(2f^2 - \kappa^2)^2, \quad (120)$$

両辺を $G^2 f^8$ で割って

$$16 \left(1 - \frac{\kappa^2}{f^2}\right) \left(1 - \frac{\kappa^2}{f^2}\right) = \left\{ 2 - \left(\frac{\lambda + 2G}{G}\right) \frac{\kappa^2}{f^2} \right\}^2 \left(2 - \frac{\kappa^2}{f^2}\right)^2 \quad (121)$$

$\kappa = p/c_L$ 、 $K = p/c_L$ であったから

$$\left(\frac{\kappa^2}{f^2}\right) = \left(\frac{c_T^2}{c_L^2}\right) = \frac{G}{\lambda + 2G} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \equiv \alpha_1^2 \quad (122)$$

$$\text{したがって } \kappa = \alpha_1 K \quad (123)$$

$$16 \left(1 - \frac{\alpha_1^2 K^2}{f^2}\right) \left(1 - \frac{K^2}{f^2}\right) = \left(2 - \frac{K^2}{f^2}\right)^4 \quad (124)$$

$\zeta = K/f$ において上式を整理すると

$$\zeta^6 - 8\zeta^4 + 8(3 - 2\alpha_1^2)\zeta^2 + 16(\alpha_1^2 - 1) = 0 \quad (125)$$

これは ζ^2 に関する三次方程式であり、ポアソン比 ν の値が与えられれば解くことのできるレーレーの方程式である。 ζ は

$$\zeta \equiv \frac{K}{f} = \frac{p}{f c_T} = \frac{C}{c_T} \quad (126)$$

となるからこの表面波の位相速度 C 、すなわちレーレー波速度とせん断波速度 c_T との比を与えるものである。式 (125) の根として与えられるレーレー波速度 C は α_1^2 のみに依存しており従ってポアソン比が与えられれば決定できる。このことからレーレー波速度は弾性係数のみによっており、波の波長や周波数に依存しない非分散波であることがわかる。レーレー波が深さとともに振幅が小さくなってゆく割合は減衰係数 (attenuation factor) β と λ の値によりわかり

$$\beta^2/f^2 = 1 - \alpha_1^2 \zeta^2, \quad \lambda^2/f^2 = 1 - \zeta^2 \quad (127)$$

であるから ζ が求められれば β/f 、 λ/f が定められる。変位の変化を考えれば

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -(A\beta f e^{-\beta z} + B\lambda e^{-\lambda z}) e^{i(pt - fx)} \quad (128)$$

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial x} = -(A\beta e^{-\beta z} - B\lambda e^{-\lambda z}) e^{i(pt - fx)} \quad (129)$$

ここで式 (118) を用いて B を消去し、実部をとれば

$$u = Af [e^{-\beta z} - 2\beta\lambda(\lambda^2 + f^2)^{-1} e^{-\lambda z}] \sin(pt - fx) \quad (130)$$

$$w = A\beta [e^{-\beta z} - 2f^2(\lambda^2 + f^2)^{-1} e^{-\lambda z}] \cos(pt - fx) \quad (131)$$

いま例としてポアソン比 $\nu = 0.25$ すなわち $\alpha_1^2 = \frac{1}{3}$ とするとレーレーの方程式は

$$3\zeta^6 - 24\zeta^4 + 56\zeta^2 - 32 = 0 \quad (132)$$

$$\text{または } (\zeta^2 - 4)(3\zeta^4 - 12\zeta^2 + 8) = 0 \quad (133)$$

よって $\zeta^2 = 4$ 、 $2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ 、 $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$ を得る。この値を用いて β/f 、 λ/f を求める。 $\zeta^2 = 4$ の時、 $\beta^2/f^2 = 1 - \frac{1}{3} < 0$ で β が虚数となり表面波とならない。 $\zeta^2 = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ の時、 $\beta^2/f^2 = 1 - \frac{1}{3}(2 + \frac{2}{\sqrt{3}}) < 0$ でやはり不適。 $\zeta^2 = 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} = 0.9194$ の時は、 $\beta^2/f^2 = (0.8475)^2 > 0$ 、 $\lambda^2/f^2 = (0.3933)^2 > 0$ で、 λ 、 β とともに実数となり表面波となる。

式(130)より伝ば方向の変位成分 u の振幅は $e^{-\beta z} - 2\beta d(d^2 + f^2)^{-1} e^{-\beta z}$ に依存して減衰してゆくから、これに具体的な数値 0.8475 と 0.3933 を入れると

$$e^{-0.8475 f z} - 0.5773 \cdot e^{-0.3933 f z} \quad (134)$$

となる。この値は fz の値が大きくなるにしたがい指数関数的に急減し、 fz が 1.210 で 0 となる。この時、いかなる x, z に対しても $u=0$ であり、表面からの深さ $1.21/f$ の所に表面に平行方向の運動のない面が存在する。 f は 2π を波長で割ったものであるから波長の 0.193 倍の深さに相当する。これよりさらに深い所では振幅は反対の符号をもった値(位相が π だけずれた値)をとる。

表面に垂直な方向の振幅のようすは変位 w の $e^{-\beta z} - 2f^2(d^2 + f^2)^{-1} e^{-\beta z}$ を調べればよい。 $\nu = 0.25$ のとき

$$e^{-0.8475 f z} - 1.7321 \cdot e^{-0.3933 f z} \quad (135)$$

この値は常に負であって 0 とはならない。したがって w が z や x に無関係に 0 となる面は有限な z の値に対しては存在しない。この値の絶対値は z に対して波長の 0.076 倍の深さで最大となり、それを越えると単調減少する。

このように f, d は u, w の振幅が深さ z によってどのように減衰してゆかを見る補助変数となる。 p/f が表面波の伝ば速度、 $p/2\pi$ が周波数、 f が周波数に比例するから、高周波のレーレ波は低周波のものより深さに対して急減することになる。式(130)(131)の両辺を \pm 乗して三角関数を消すと u, w に関する楕円の方程式を得る。すなわち体積要素の運動は楕円を描き、表面 $z=0$ では、長軸が表面に垂直となる。また長短軸の比は表面で 1.468 である。(図13参照)

以上では $\nu = 0.25$ として計算して来たが、他の ν の値に対しても計算でき、たとえば変位成分 u については表1の様になる。グラフに描けばポアソン比を補助変数にとって図14の様になる。特別の場合として $\nu = 0.5$ (すなわち $\alpha_1 = 0$) では式(125)は

$$\zeta^6 - 8\zeta^4 + 24\zeta^2 - 16 = 0 \quad (136)$$

となって $\zeta^2 = 0.9127$ に対する値のみ実根となりこれに対する伝ば速度は C_T の 0.9553 倍である。また変位 u は波長の 0.138 倍の深さで z に無関係に 0 となる。 $\nu = 0.29$ の鋼については位相速度は C_T の 0.9258 倍である。いずれも縦波に対してはもちろんのこと横波に対してもレーレ波速度はいくぶんそれより小さい。

このようなレーレ波は二次元的に広がって行くので膨張波やせん断波と比べて減衰しにくいので波源より離れた所の応答に対しては支配的となり、重要な波となる。

表1: レーレ波速度比と変位 u の式(130)の定数 a, b, c

ν	C_R/C_L	C_R/C_T	$[e^{-afz} + b e^{-cfz}]$		
			a	b	c
0.1	0.5954	0.8931	0.8034	0.6011	0.4498
0.2	0.5579	0.9110	0.8299	0.5850	0.4124
0.3	0.4957	0.9274	0.8685	0.5699	0.3740
0.4	0.3846	0.9423	0.9231	0.5562	0.3351
0.5	0.0000	0.9553	1.0000	0.5435	0.2955

(Okyoshi Laboratory)

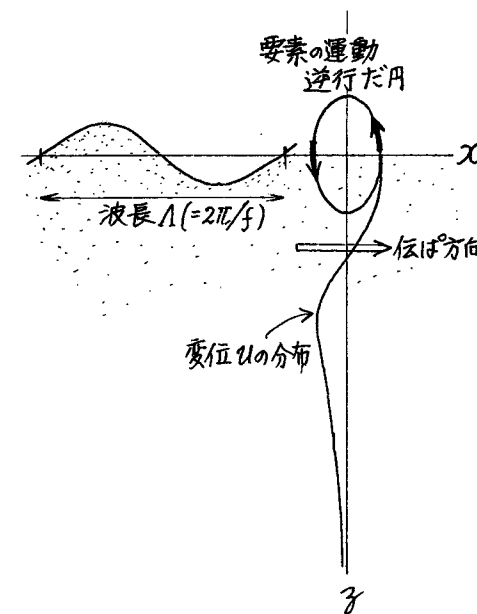


図13; レーレ波の波動

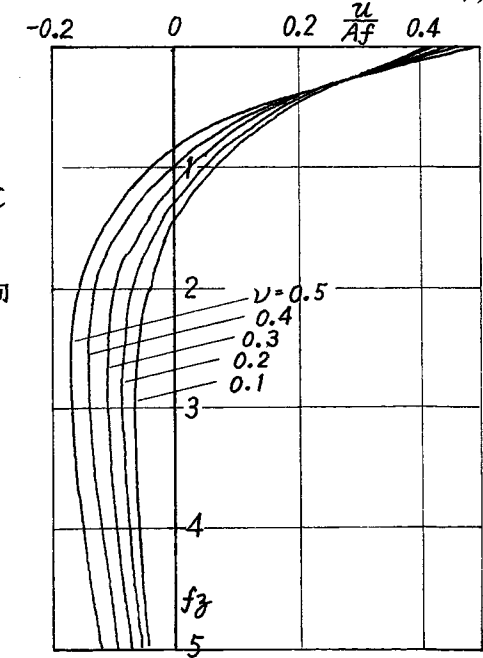


図14. 深さに対する変位 u の分布

3.6 異方性非対称面に沿って伝わるレーレ波 複合材は目的に応じて有利に設計できる数多くの長所を有し、構造物なども部材によっては従来の材料からこの種の材料に置換るなどして、多用される傾向にある。そこで工学的にこのような材料の動的応答を調べるのが重要となっている。衝撃応答解析の基礎であるレーレ波特性を異方性連続体にモデル化して考えてみよう。

一般に、複合材を伝ばする波は材料の組織構造のため分散性を有するので、古典的異方性連続体をそのまま、その材料のモデルと見なして取扱うことは注意を要する。すなわち応答の周波数依存性を検討してモデルを決めなければならない。しかし、膨張波やせん断波などの三次元空間的広がり方と異って、二次元空間的広がりを見せるレーレ波は、分散特性の結果として衝撃荷重点から十分離れた場で重要な役割を演じ、長波成分(低周波成分)が支配的となる。したがって長波極限で真の位相速度に一致する有効係数理論(古典的異方性連続体)によって応答特性を近似しても十分であろう。ここでは、繊維強化材や積層材の異方性対称軸に傾いた切断面に沿って伝ばするレーレ波特性を有効係数理論で調べてみる。

図15のように異方性対称軸に一致する座標系(X, Y)の反時計方向にθだけ回転させてできる座標系(x, y)を考え、y=0を切断によってできた自由表面とする。座標系(X, Y)における構成関係が

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^* & C_{12}^* & 0 \\ C_{12}^* & C_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^* \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (137)$$

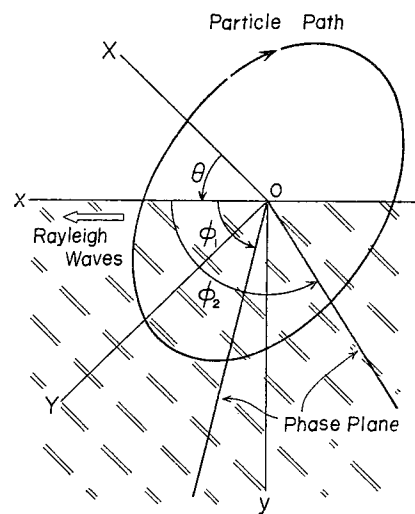


図 15: 傾いた円軌跡と二つの位相面

で与えられるならば、座標系(x, y)においては

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (138)$$

ただし C_{ij} は (l, m) を x 軸の (X, Y) 座標系に対する方向余弦とすれば

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{11}^* l^4 + 2(C_{12}^* + 2C_{66}^*) l^2 m^2 + C_{22}^* m^4 \\ C_{22} &= C_{11}^* m^4 + 2(C_{12}^* + 2C_{66}^*) l^2 m^2 + C_{22}^* l^4 \\ C_{12} &= (C_{11}^* + C_{22}^* - 4C_{66}^*) l^2 m^2 + C_{12}^* (l^4 + m^4) \\ C_{66} &= (C_{11}^* + C_{22}^* - 2C_{12}^* - 2C_{66}^*) l^2 m^2 + C_{66}^* (l^4 + m^4) \\ C_{16} &= -(C_{11}^* - C_{12}^* - 2C_{66}^*) l^3 m - (C_{12}^* - C_{22}^* + 2C_{66}^*) l m^3 \\ C_{26} &= -(C_{11}^* - C_{12}^* - 2C_{66}^*) l m^3 - (C_{12}^* - C_{22}^* + 2C_{66}^*) l^3 m \end{aligned} \quad (139)$$

で与えられる。構成関係式(138)を基礎式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

に代入し、 $e_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $e_y = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$ の関係を用いると運動方程式

$$C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + C_{16} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (140)$$

$$C_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{16} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (141)$$

を得る。式(140)(141)の解として、深さ方向に減衰し、xの正方向に伝ばする表面波であることを考え、次の形におく。

$$u = P \exp[-by + i\omega(x-ct)] \quad (142)$$

$$v = Q \exp[-by + i\omega(x-ct)] \quad (143)$$

式(142)(143)が式(140)(141)を満足しなければならないことより、 b は波数 ω 、位相速度 c 、弾性係数 C_{ij} の関数として与えられ、また P と Q は独立ではない。

後の解析の便宜のため。

$$\phi = -i\omega\xi \quad (144)$$

として式(142)(143)を式(140)(141)に入れれば

$$(d_{11} + 2d_{16}\xi + d_{66}\xi^2 - V^2)P + (d_{16} + d_{12}\xi + d_{66}\xi + d_{26}\xi^2)Q = 0, \quad (145)$$

$$(d_{16} + d_{12}\xi + d_{66}\xi + d_{26}\xi^2)P + (d_{66} + 2d_{26}\xi + d_{22}\xi^2 - V^2)Q = 0, \quad (146)$$

ただし、 $d_{ij} = C_{ij}/C_{66}^*$ 、 $V^2 = \rho C^2/C_{66}^*$

式(145)(146)が有意の解を持つための条件より係数行列式が0として次の ξ に関する四次方程式を得る。

$$a_4 \xi^4 + a_3 \xi^3 + a_2 \xi^2 + a_1 \xi + a_0 = 0 \quad (147)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= d_{11}d_{66} - d_{16}^2 - (d_{11} + d_{66})V^2 + V^4 \\ a_1 &= 2[d_{11}d_{26} - d_{12}d_{16} - (d_{16} + d_{26})V^2] \\ a_2 &= 2[d_{16}d_{26} + d_{11}d_{22} - d_{12}^2 - 2d_{12}d_{66} - (d_{22} + d_{66})V^2] \\ a_3 &= 2(d_{16}d_{22} - d_{12}d_{26}) \\ a_4 &= d_{22}d_{66} - d_{26}^2 \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

式(142)(143)より伝ば方向について振幅が増減しないならば、 C すなわち V は実数であり、さらに異方性弾性係数が波動エネルギーの散逸しない実数の場合とすれば、式(147)は実係数式で、一般には2組の共役複素根を有する。この四次方程式を解く手法は色々あげられるが、根を求めるための繰返し計算が少なくて済み、2根が非常に接近しなければ良好な結果の得られるFerrariの公式を用いて代数的に解ける。

さて表面波は深さ方向に関し振幅が減衰しなければならぬ。したがって4根のうち

$$\text{Im}[\xi_i] > 0 \quad (149)$$

の条件を満たす ξ_i に対応する変位解(142)(143)の線形結合によって表面波が作られる。式(147)の根が複素根となる時は式(149)を満たす2根が存在するので、それらを新たに ξ_1 、 ξ_2 とすれば

$$u = P_1 \exp[i\omega(\xi_1 y + x - ct)] + P_2 \exp[i\omega(\xi_2 y + x - ct)] \quad (150)$$

$$v = \alpha_1 P_1 \exp[i\omega(\xi_1 y + x - ct)] + \alpha_2 P_2 \exp[i\omega(\xi_2 y + x - ct)] \quad (151)$$

$$\text{ただし} \quad \alpha_1 = - \left[\frac{d_{11} + 2d_{16}\xi_1 + d_{66}\xi_1^2 - V^2}{d_{16} + d_{12}\xi_1 + d_{66}\xi_1 + d_{26}\xi_1^2} \right] \quad (152)$$

$$\alpha_2 = - \left[\frac{d_{11} + 2d_{16}\xi_2 + d_{66}\xi_2^2 - V^2}{d_{16} + d_{12}\xi_2 + d_{66}\xi_2 + d_{26}\xi_2^2} \right] \quad (153)$$

ここで自由表面の条件

$$[O_y]_{y=0} = 0, \quad [\tau_{xy}]_{y=0} = 0 \quad (154)$$

を考慮すれば式(139)(150)(151)を用いて

$$f_1 P_1 + f_2 P_2 = 0 \quad (155)$$

$$f_3 P_1 + f_4 P_2 = 0 \quad (156)$$

を得る。ここに

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= d_{12} + d_{22}\alpha_1\xi_1 + d_{26}\xi_1 + d_{26}\alpha_1 \\ f_2 &= d_{12} + d_{22}\alpha_2\xi_2 + d_{26}\xi_2 + d_{26}\alpha_2 \\ f_3 &= d_{16} + d_{26}\alpha_1\xi_1 + d_{66}\xi_1 + d_{66}\alpha_1 \\ f_4 &= d_{16} + d_{26}\alpha_2\xi_2 + d_{66}\xi_2 + d_{66}\alpha_2 \end{aligned} \right\} \quad (157)$$

式(155)(156)が有意であるための条件より

$$f_1 f_4 - f_2 f_3 = 0 \quad (158)$$

これは一般化されたレーレの方程式に当たり、これより V が求められる。

具体的な数値計算例を示そう。ガラス繊維強化エポキシ複合材を例に、繊維体積含有率 ν_f と不整合傾斜角 θ (図15参照)を補助変数に選ぶ。以下、 f と m はそれぞれ繊維と母相(マトリックス)に対する量であることを示す。構成材の縦弾性係数、ポアソン比、密度のそれぞれを

$$\left. \begin{aligned} E_f &= 73.1 \text{ GPa}, & E_m &= 3.45 \text{ GPa} \\ \nu_f &= 0.22, & \nu_m &= 0.35 \\ \rho_f &= 2.60 \text{ g/cm}^3, & \rho_m &= 1.15 \text{ g/cm}^3 \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

とする。また、繊維間の相互干渉を考慮する隣接係数 μ の値は、 ν_f の大きい実用範囲で実験と良い一致を見る0.2の値を採用し、繊維の不完全性を考慮するミスアライ

メント係数(繊維が一方に完全に並んでいないことや有限長繊維であることなど理想的な場合からのズレに対する補正係数) K は 0.95 とする。そして弾性係数 C_{ij}^* を平面応力状態のもとで決めた。その結果を図 16 に示す。縦軸はエポキシにおける横波速度で V を標準化して V_e としてある。[ただし $v_f = 0.00$ (エポキシのみ) に対し

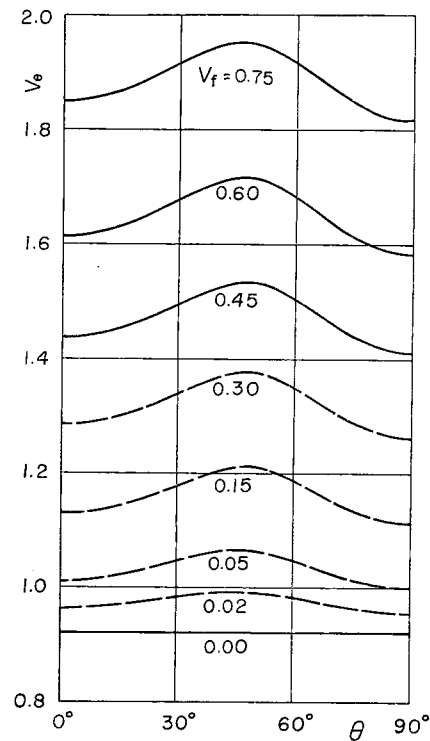


図 16 レーレー波速度の不整合角依存性

ては $\mu = 0$, $K = 1$. また $v_f = 0.02$ と 0.05 に対しては $K = 1$, $\mu = 0.2$ としている。 $\theta = 45^\circ$ 近辺に最大値を有し、 v_f が大きいほど複合材の剛性が増し、レーレー波速度が大きくなる。図は $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ のみ示したが $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の曲線は $\theta = 90^\circ$ に対称となる。

さて、自由面が異方性対称面の場合にはレーレー波の位相面は、その面に直交するただ一つの面であったが、対称面と異なる

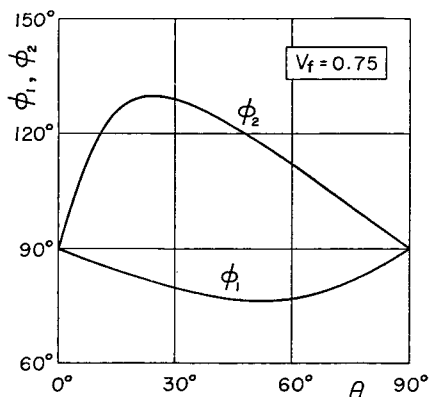


図 17 位相面の傾きの不整合角依存性

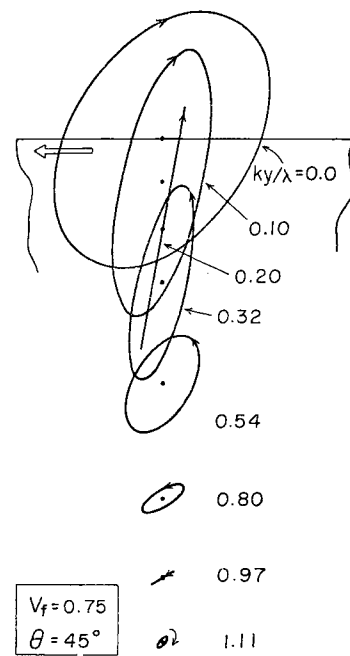


図 18 体積要素の運動軌跡

場合は二つの傾いた位相面があり、これらの組合せによってレーレー波が構成されている。

位相面の傾斜角を図 15 のように ϕ_1 と ϕ_2 で表わせれば式(150)(151)から

$$\phi_1 = -\text{arccot}(\text{Re } \xi_1) \quad , \quad \phi_2 = -\text{arccot}(\text{Re } \xi_2) \quad (160)$$

で与えられ θ 依存性は図 17 のようになる。

図 18 は $\theta = 45^\circ$, $v_f = 0.75$ の時の、いくつかの代表深さにおける体積要素の運動軌跡を、レーレー波波長 λ で標準化した補助変数を用いて示したもので、矢印は運動方向を示す。軌跡は長軸の傾いた楕円であり、表面で逆行楕円、 ky/λ が 0.20 と 0.97 との間で順行楕円と直線運動を経て反転している。

(文献)・式(139)の関係について

Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials* (1975). Chap.2. McGraw-Hill

・四次方程式の代数的解法(Ferrariの公式)について

日本数学会編、*岩波数学辞典*(第2版), (昭和43), 889頁, 岩波書店

・隣接係数 μ とミスアライメント係数 K について

Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials* (1975). Chap.3, McGraw-Hill

3.7 ストーンレー波 (Stoneley Waves) 異種弾性体の境界面に入射する波がある臨界面角を越えて入射すると全反射現象が生じ、界面近傍のみの波動現象となることは先に述べた。さて、この様な波は レー波の様にその界面に沿って伝はることが出来るだろうか。そのことについて波を仮定して存在性を考えてみる。伝は方向を \$x\$ とし界面 (\$z=0\$) から遠ざかるにつれ振幅の減衰する調和波として次の様においてみる。

$$\varphi = A \exp(\nu z) \exp[ik(x-ct)], \quad (160)$$

$$\psi = B \exp(\nu z) \exp[ik(x-ct)], \quad (161)$$

$$\bar{\varphi} = \bar{A} \exp(-\bar{\nu}z) \exp[ik(x-ct)], \quad (162)$$

$$\bar{\psi} = \bar{B} \exp(-\bar{\nu}z) \exp[ik(x-ct)], \quad (163)$$

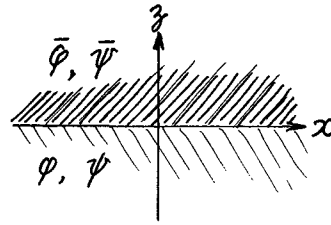


図19; 異種半無限弾性体

\$\bar{\varphi}, \bar{\psi}\$ は \$z \ge 0\$; \$\varphi, \psi\$ は \$z \le 0\$ の領域

に対する変位ポテンシャルとする。この時、変位成分 \$u, w\$ などはそれぞれ \$\varphi_x + \psi_z, \varphi_z - \psi_x\$ などで与えられる。ところでこれらのポテンシャルは波動方程式(104),(105)を満足しなければならないから

$$\left. \begin{aligned} \nu &= k\sqrt{1-(C/C_L)^2}, & \nu &= k\sqrt{1-(C/C_T)^2} \\ \bar{\nu} &= k\sqrt{1-(C/\bar{C}_L)^2}, & \bar{\nu} &= k\sqrt{1-(C/\bar{C}_T)^2} \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

であり、すべて正実数値をとる。次に界面 (\$z=0\$) における応力、変位の連続性より \$A, B, \bar{A}, \bar{B}\$ に対する連立方程式

$$\left. \begin{aligned} A - \bar{A} - i\nu_1 B - i\bar{\nu}_1 \bar{B} &= 0 \\ -i\nu_1 A - i\bar{\nu}_1 \bar{A} - B + \bar{B} &= 0 \\ (1+\nu_1^2)A - \bar{g}(1+\bar{\nu}_1^2)\bar{A} - 2i\nu_1 B - 2i\bar{g}\bar{\nu}_1 \bar{B} &= 0 \\ 2i\nu_1 A + 2i\bar{g}\bar{\nu}_1 \bar{A} + (1+\nu_1^2)B - \bar{g}(1+\bar{\nu}_1^2)\bar{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

$$\left. \begin{aligned} \nu_1^2 &= 1-(C/C_L)^2, & \nu_1^2 &= 1-(C/C_T)^2, & \bar{\nu}_1^2 &= 1-(C/\bar{C}_L)^2 \\ \bar{\nu}_1^2 &= 1-(C/\bar{C}_T)^2, & \text{そして } \bar{g} &= \bar{G}/G \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

式(165)で \$A, B, \bar{A}, \bar{B}\$ が有意であることより 係数行列式が 0 になるとして

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -\nu_1 & -\bar{\nu}_1 \\ \nu_1 & \bar{\nu}_1 & -1 & 1 \\ -(1+\nu_1^2) & \bar{g}(1+\bar{\nu}_1^2) & 2\nu_1 & 2\bar{g}\bar{\nu}_1 \\ 2\nu_1 & 2\bar{g}\bar{\nu}_1 & -(1+\nu_1^2) & \bar{g}(1+\bar{\nu}_1^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (167)$$

これを展開すれば \$C\$ に関する特性方程式を得る。

$$\left(\frac{C}{C_T}\right)^4 [(1-\bar{g}m^2)^2 - (\bar{\nu}_1 + \bar{g}m^2\nu_1)(\nu_1 + \bar{g}m^2\bar{\nu}_1)] - 4(1-\bar{g})\left(\frac{C}{C_T}\right)^2 [1-\bar{\nu}_1\bar{\nu}_1 - \bar{g}m^2(1-\nu_1\nu_1)] + 4(1-\bar{g})^2(1-\nu_1\nu_1)(1-\bar{\nu}_1\bar{\nu}_1) = 0, \quad (168)$$

ここに、\$m = C_T/C_T, \bar{g} = \bar{G}/G\$ としているから \$\bar{g}m^2 = \bar{P}/P\$ とする。式(168)は最初、ストーンレーによって研究されたのでストーンレーの方程式と呼び、これを満足する実数 \$C\$ が存在するならば界面に沿う波動(160)-(163)が可能であり、この様な波を位相速度 \$C\$ のストーンレー波と言う。式(168)の実根 \$C\$ を求めればその存在範囲は双方の媒体の弾性係数に依存し、たとえばポアソン比 0.25 (すなわち \$\nu = G, \bar{\nu} = \bar{G}\$) の時を計算すれば \$\bar{C}_T > C_T\$ 又は \$m < 1\$ の場合、図20の影をつけた領域に限定される。したがって双方の固体媒体の場合ストーンレー波は比較的特別な場合に存在する波と言える。式(164)で与えられる補助変数が正実数としているから \$C < C_T\$ (ただし \$C_T < \bar{C}_T\$ とする) となり、また、

式(168)の数値計算よりせん断波の速い方の媒体内のレー波の速度 \$C_R\$ より \$C\$ は大きい。したがって

$$C_R < C < C_T \quad (169)$$

となる。また式(168)からわかるように \$C\$ の値は波数 \$k\$ に依存していな

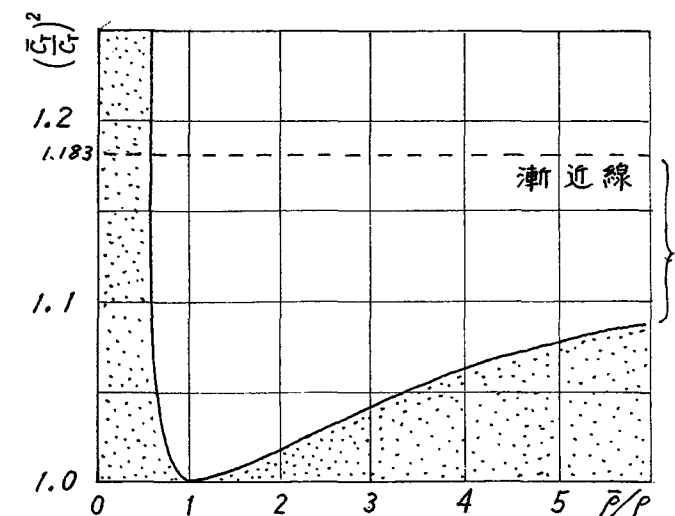


図20; ストーンレー波の存在領域; ポアソン比が双方とも0.25の時

いから、通常のレ-レ-波と同様に非分散性の波であることがわかる。

さて、ストーンレー波による界面の変形や体積要素の運動を考えてみよう。式(160)(161)(162)

(163)より変位は

$$z \leq 0 \text{ で } u = (Aiek^{kz} + Bie^{kz}) e^{ik(x-ct)} \quad (170 a)$$

$$w = (A_2e^{kz} - Biek^{kz}) e^{ik(x-ct)} \quad (170 b)$$

$$z \geq 0 \text{ で } \bar{u} = (\bar{A}iek^{-kz} - \bar{B}ie^{-kz}) e^{ik(x-ct)} \quad (170 c)$$

$$\bar{w} = (-\bar{A}ie^{-kz} - \bar{B}iek^{-kz}) e^{ik(x-ct)} \quad (170 d)$$

で与えられる。ここで式(165)の関係を利用して A, B, \bar{A}, \bar{B} のいずれかを残して他を消去して変位成分を表わすことができる。次に $z \geq 0, z \leq 0$ のそれぞれの領域に対する変位式から時間の項を消去すれば、レ-レ-波解析におけるのと同様に楕円の方程式が得られる。 $(\bar{c}_T/c_T)^2 = \frac{10}{9}, \rho/\bar{\rho} = 10.0$ 、ポアソン比 $\frac{1}{2}$ の場合の数值結果を図21(a), (b)に示す。

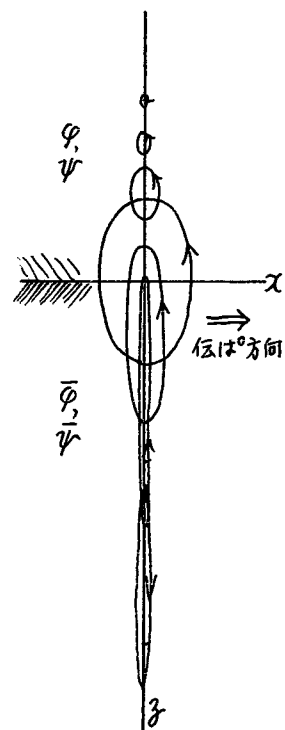


図21(a)要素の運動

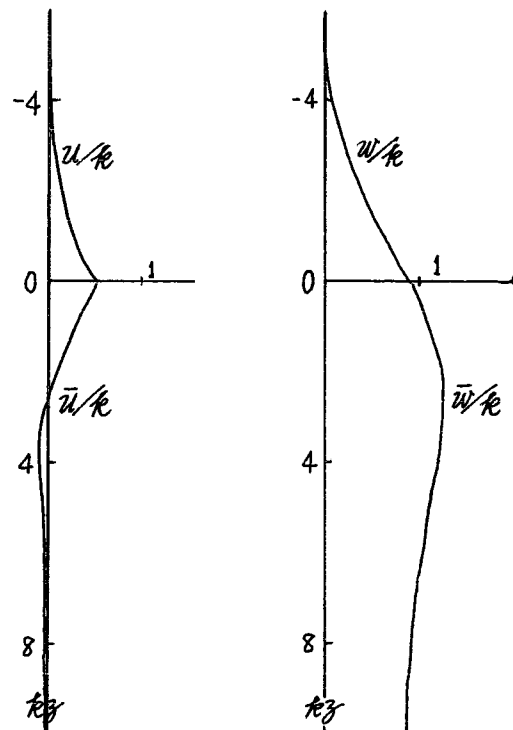


図21(b)変位振幅の分布変化

さて式(168)の特別な場合として $z \leq 0$ の領域に媒体がない場合を検討してみよう。

G が \bar{G} に比べて非常に小さい極限として考えれば式(168)は以下の様に評価できる。

$$\begin{aligned} \text{式(168)} &\approx \left(\frac{c}{c_T}\right)^4 [(zm^2)^2 - (zm^2)^2 \nu_1 \nu_2] - 4(-z)\left(\frac{c}{c_T}\right)^2 [-zm^2(1-\nu_1 \nu_2)] + 4(-z)^2(1-\nu_1 \nu_2)(1-\nu_1 \nu_2) = 0 \\ &\approx \left(\frac{c}{c_T}\right)^4 m^4 - 4\left(\frac{c}{c_T}\right)^2 m^2 + 4(1-\nu_1 \nu_2) = 0 \quad (\because z \rightarrow +\infty) \end{aligned}$$

$m = c_T/\bar{c}_T$ であったから

$$\left[2 - \left(\frac{c}{c_T}\right)^2\right]^2 - 4\nu_1 \nu_2 = 0 \quad (171)$$

この式は式(125)に一致するレ-レ-の方程式である。従ってストーンレー波はレ-レ-波をより一般化した自由波であると思えることができる。

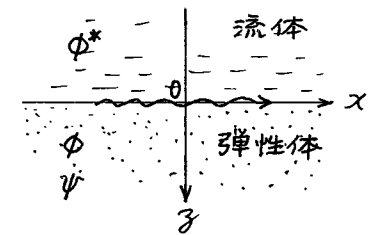
式(164)で $\nu, \nu_1, \nu_2, \bar{\nu}$ が常に正実数となる場合を論じたが等方性弾性体の場合は、この他に純虚数となる場合も考えることができる。しかしそれは界面から遠ざかるにつれて減衰しないので界面波とは考えない。異方性の場合には複素数になることがある。この時は実部が正となるものを採用して界面波とすることができる。このことに関しては文献 Plant, W.L., Bull. Seism. Soc. Am., Vol.62, No.1 (1972) pp.285-299 に詳しい。

問題

- [1]. 32頁の図14は伝は方向の変位成分の振幅の分布を描いたものである。これにならって深さ方向変位の振幅 w はどのような分布になるか算出してグラフに示せ。
- [2] 半無限弾性固体と半無限理想流体が $z=0$ で接している。この流体は音響媒体と見なしてこの界面を伝わる波が常に存在しその波動特性を論じよ。ただし音響媒体に対する波動方程式は

$$\nabla^2 \phi^* = \left(\frac{1}{c^*}\right)^2 \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial t^2}$$

ここに $c^* = \sqrt{K/\rho^*}$ で音速。また ϕ^* は音波による体積変化で圧力 P とは $P = -K\phi^*$ の関係がある。 K は体積弾性係数である。

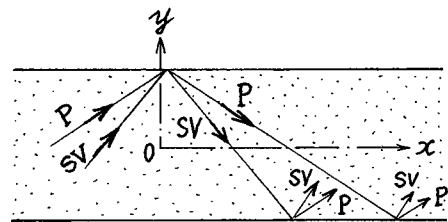


4. 弾性導波体中の波動

4.1. 導波現象とは 弾性層や弾性柱のように、断面の形状や大きさがある有限な寸法によって与えられるものを考え、それを伝ばする波の特性について考えてみよう。このような弾性体は媒体として広がっている方向へ波動を伝え導くので導波体 (Wave guide) と呼んでいる。一般に波は境界で反射するが、導波体においては、その境界表面で数多くの反射を繰返し、そのすべての反射波の重ね合せの結果として、有限な寸法方向に関し、波動はいわゆる定在波 (Standing Wave) となり、本質的な波の伝ばは境界面に平行な方向のみと考えることができる。そして導波体に沿う波は断面の寸法形状や境界面における条件によってそれぞれ固有な波動を示している。これらの波の特性を説明するために、波の伝ばモード、周波数スペクトル、波動分散性、群速度と言ったいくつかの新しい概念が導入される。

図22のように、弾性層内を上下面で反射しながら伝ばする xz 面内の波は、反射するたびに、個々の波が新たに P 波と SV 波を生じさせるため波動は複雑になる。

まして表面に曲率をもつような円柱内の反射波を追跡することは非現実的である。したがって導波体中の波動を調べるにあたっては、反射波を追う方法はふつう採用せず、次のように波動を最初から仮定して解析するのがふつうである。



弾性層内の波動
図22: 反射によって、波の種類がふえる。

$$\phi = f(y, z) \exp[i\omega(x-ct)] \quad (172)$$

この式は y, z 方向に対しては定在波で、 x 方向には位相速度 C で伝ばする波 ϕ をあらわしている。関数 $f(y, z)$ は反射波によってできる干渉模様をあらわし、図22のように xz 面内波では y のみに依存した三角関数で与えられる。また断面形状が円で軸対称変形を生じさせる波の時は半径 R のみに依存したベッセル関数で与えられる。

特殊な場合として、弾性層内を伝ばする SH 波は反射しても SH 波しか生じないので、P 波や SV 波の場合と異って両面の周期的な反射を考慮し解析することができる。また、P 波や SV 波による面内変形であっても反射回数の少ない過渡応答衝撃解析においては反射波を追跡して厳密に取扱うことがある。この様に一つ一つの波を追跡して研究する理論を波線理論 (Ray Theory) という。

導波体の断面寸法に比べて波長の十分大きい成分が応答を支配するような場合には近似理論により波動解析をかなり簡単にすることができる。その結果として、伝ば速度が $\sqrt{E/\rho}$ で与えられる弾性棒中の棒波速度 (bar velocity) や、 $\sqrt{E/(1-\nu^2)\rho}$ で与えられる薄板の伸縮波速度などが示される。

4.2. 弾性層内を伝わる SH 波 19頁の問題3より SH 波が自由境界面に入射して全反射する際、位相変化のないことがわかり、別の種類の波も生じない。これらのことから境界 ($y = \pm h$) の応力が 0 となる条件を満たすには図23のように二つの SH 平面波が境界の存在に無関係に伝ばしていると考えればよい。入射角を θ_0 とすれば二つの平面波の位相面の傾きは $(\sin\theta_0, \cos\theta_0)$ と $(\sin\theta_0, -\cos\theta_0)$ で与えられる。これらのベクトルをそれぞれ単位伝ばベクトル (unit propagation vector) とも言う。図23で太実

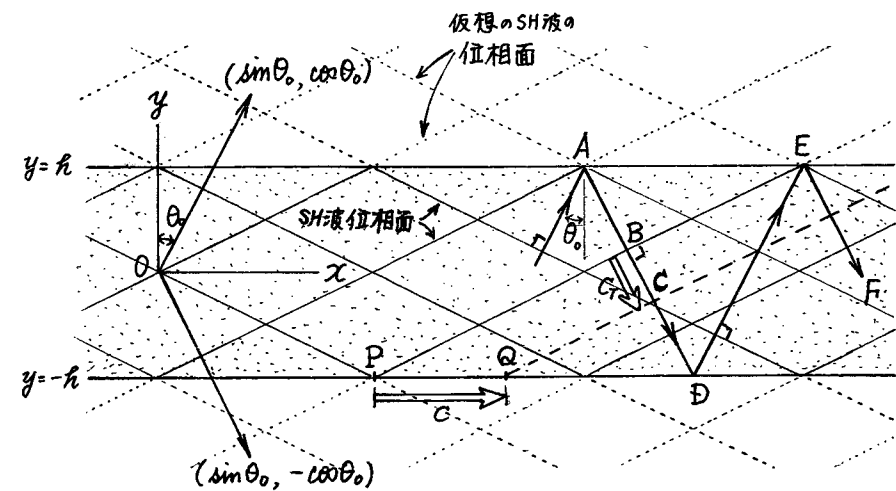


図23: SH 波の波線理論による弾性層内伝ばの説明

線 ADEF は波線 (ray) である。いま、点 B における位相面の一つである面 PE が波線に沿って BDE と進行し、左上から反射しないでやって来る仮想の SH 波の位相と一致して、波動

が強められるとすれば、次式が成立つ
[増幅的干渉: Constructive interference]

$$(\text{長さ BDE} / \text{波長 } \Lambda') = (n; \text{整数}) \quad (173)$$

図 23 の幾何学的関係より

$$\overline{BDE} = \overline{BD} + \overline{DE} = \frac{2h}{\cos \theta_0} + \frac{2h \cos 2\theta_0}{\cos \theta_0} = 4h \cos \theta_0. \quad (174)$$

点 B における波が単位時間に C_T だけ進んで点 C に達した時、位相面は x 方向に、ちょうど図に示すように P から Q に達し、 x 方向の位相速度を c とおけば

$$\sin \theta_0 = \frac{BC}{PQ} = \frac{C_T}{c} \quad (175)$$

x 方向と波線方向の波数をそれぞれ k と k' であらわせば、角周波数 ω が等しいから

$$\omega = kc = k'c_T$$

したがって
$$k = \frac{2\pi}{\Lambda} = k' \sin \theta_0 = \frac{2\pi \sin \theta_0}{\Lambda'} \quad (176)$$

Λ と Λ' はそれぞれ x 方向と波線方向の波長である。すなわち

$$\Lambda = \Lambda' / \sin \theta_0. \quad (177)$$

の関係がある。式(174)を式(173)に代入して得られる $4h \cos \theta_0 = n\Lambda'$ に、式(176)

を用いて Λ' を消去すれば

$$k \cot \theta_0 = \frac{n\pi}{2h} \quad (178)$$

ここで三角関数の公式 $\cot \theta_0 = [(1/\sin^2 \theta_0) - 1]^{1/2}$ を考慮すれば、上式は

$$\left(\frac{c}{C_T}\right)^2 = 1 + \left(\frac{n\pi}{2kh}\right)^2 \quad (179)$$

となり、 $n=0$ の場合を除いて位相速度 c が波数 k に依存していることを示している。

したがって弾性層内を伝はする SH 波は分散性を有する。いま

$$\Omega = \frac{2kh\omega}{\pi C_T}, \quad \xi = \frac{2khc}{\pi} \quad (180 a, b)$$

で定義される無次元周波数と無次元波数を導入し、 $\omega = kc$ なる関係を考慮して式(179)を書きかえれば

$$\Omega^2 = \pi^2 + \xi^2 \quad (181)$$

これは周波数方程式 (Frequency equation) と呼ばれる。

これまでの取扱いは、波線に沿った波の反射に伴う相互干渉を考えるもので、導波現象を物理的成り立ちから理解するために便利である。しかし、周波数方程式を導出するのであれば、解の形を仮定することによって、数学的に直接導ける。SH 波による y 方向変位を w とし、式(172)にならって

$$w = f(y) \exp[i(kx - \omega t)] \quad (182)$$

この解は波動方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (183)$$

と境界条件
$$\left[G \frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=\pm h} = \left[\tau_{yz} \right]_{y=\pm h} = 0 \quad (184)$$

を満たすものでなければならぬ。式(182)を式(183)に入れて $f(y)$ について解けば

$$f(y) = B_1 \sin(gy) + B_2 \cos(gy) \quad (185)$$

ただし
$$g^2 = \frac{\omega^2}{C_T^2} - k^2 \quad (186)$$

また境界条件(184)より

$$B_1 \cos(g'h) \pm B_2 \sin(g'h) = 0 \quad (187)$$

式(187)が満たされるのは

$$B_1 = 0 \text{ で } \sin(g'h) = 0 \quad (188)$$

$$\text{か、または } B_2 = 0 \text{ で } \cos(g'h) = 0 \quad (189)$$

のときである。すなわち g が

$$g'h = n\pi/2 \quad ; \quad n \text{ は整数 } (0, 1, 2, 3, \dots) \quad (190)$$

の値をかつき n が偶数の時式(188)を、奇数の時式(189)を満たす。式(190)で与え

られる離散的な値 ξ に対し、式(186)から ω と ϵ は無限個の組合せができる。そこで式(180a, b)で定義される Ω と ξ を用いれば、式(190)より ω と ϵ の関係は次のように表わせる。

$$\Omega^2 = \eta^2 + \xi^2 \quad (181)$$

これは式(181)と同一である。なお、 η が偶数(0を含む)の場合 $B_2 = 0$ であるから、式(182)で与えられる変位 w は弾性層中央面($y=0$)に関し対称に分布し、 η が奇数の時は反対称に分布する。

さて、 $\Omega^2 = \eta^2 + \xi^2$ の関係を η を補助変数にして Ω - ξ 面に描けば無限本の連続曲線となる。それぞれの曲線を分岐(branch)と言い、その分岐は無次元周波数 Ω と無次元波数 ξ との関係を与えるものであり、無数の分岐の集まりによって周波数スペクトル(frequency spectrum)を構成する。以下の説明の便宜のために、対称なSH波モード($\eta=0, 2, 4, \dots$)をSS-モード、また反対称なSH波モード($\eta=1, 3, 5, \dots$)をAS-モードと呼ぶことにする。また指標 n を導入して n 番目の対称または反対称なSH波モードを $SS(n)$, $AS(n)$ と表記する。この時、対称モードに対しては n と η との間に $n = \eta/2$ の関係があり、一方反対称モードに対しては $n = (\eta+1)/2$ となる。図24に、いくつかの低次モードに対する変位分布を示す。最低次の対称モード $SS(0)$ は一定分布となる。最低次の反対称モード $AS(1)$ では一つの節(mode)を有している。

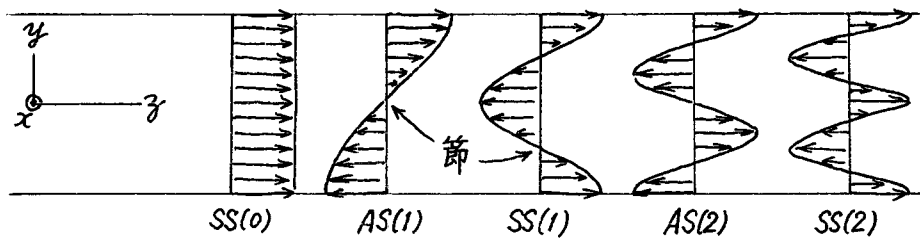


図24: SH波伝ばによる y 面における変位分布 (伝ば方向は紙面に垂直になる)

Ω を $\omega = kc$ あるいは $\Omega = \xi c / C_T$ の関係を用いて $\Omega^2 = \eta^2 + \xi^2$ の Ω を消去すれば

$$(C/C_T) = \pm [1 + (\eta/\xi)^2]^{1/2}$$

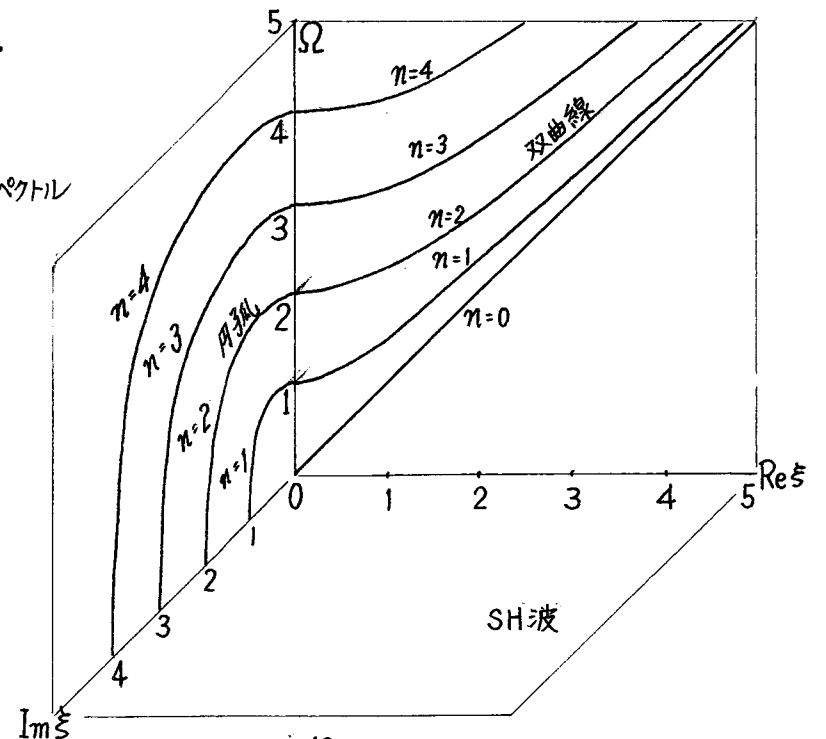
Ω の代わりに ξ を消去するのであれば

$$(C/C_T) = \pm [1 - (\eta/\Omega)^2]^{-1/2} \quad (191)$$

複符号は波の伝ば方向を示し(+は x 方向, -は x の負の方向へ伝わる) 物理現象的には本質的に同じである。これらの式より、 $SS(0)$ のモードを除けば、位相速度 C が波数(あるいは振動数)に依存し分散性を有していることがわかる。

式(181)からわかるように、 $\Omega < \eta$ のとき ξ は純虚数になる。すなわち ϵ が虚数となって式(182)の w は x の増加とともにその振幅が指数関数的に減衰(増大)し、導波体に沿って伝ばする波にはならない。むしろ局所的な定在波動を示す。特定のモードに対して、波数が実数からこのような虚数(もしくは複素数)に変わるところの周波数を遮断周波数(cut-off frequency)と言う。SH波の場合の遮断周波数は波数が0の時の周波数で与えられる。周波数スペクトルを図25に示す。対称性を考慮して、 $\Omega > 0$, $Re \xi > 0$, $Im \xi > 0$ の時のみ示した。また横弾性係数 G や密度 ρ 、そして層厚 $2h$ が Ω と ξ に考慮されているから、この図25は任意の等方弾性層に対して用いることができる。

図25: 周波数スペクトル



4.3 SH波によって層内を伝わるエネルギー ある面素に作用する力が単位時間になす仕事を仕事率(power)と言い、単位面積当りに合力 \mathbf{t} が作用して体積要素が $\dot{\mathbf{u}}$ の運動速度を得たとすると、仕事率はそれぞれのベクトルの内積で与えられ

$$\mathcal{P} = \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (192)$$

これを具体的に直角座標系で書けば、 l, m, n を面素の方向余弦として

$$\mathcal{P} = \sigma_x l \dot{u} + \tau_{xy} m \dot{u} + \tau_{xz} n \dot{u} + \tau_{yx} l \dot{v} + \sigma_y m \dot{v} + \tau_{yz} n \dot{v} + \tau_{zx} l \dot{w} + \tau_{zy} m \dot{w} + \sigma_z n \dot{w} \quad (193)$$

ところでSH波の伝ば方向に垂直な面を通しての仕事率は $l=1, m=n=0, u=v=0$ であるから

$$\mathcal{P} = \tau_{zx} \dot{w} \quad (194)$$

一方、体積要素の運動エネルギー密度は、このSH波の場合

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \rho \dot{w}^2 \quad (195)$$

これを層厚にわたって積分し、さらに一周期の時間平均 $\langle K \rangle$

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-h}^h \mathcal{K} dy = \frac{\rho}{2T} \int_0^T dt \int_{-h}^h \dot{w}^2 dy \quad (196)$$

を考えれば、ひずみエネルギーの層厚にたくわえられる時間平均 $\langle U \rangle$ を加えた全エネルギー $\langle H \rangle$ は、ちょうど $\langle K \rangle$ の2倍になる。また、エネルギーの伝ばにともなう $\langle P \rangle$ と

$$\langle H \rangle \text{ の値は } \langle P \rangle = \langle H \rangle \cdot C_e \quad (197)$$

で与えられるので $\langle H \rangle$ に対する $\langle P \rangle$ を算出することによって、エネルギーの伝ば速度 C_e が求まる。式(192)(195)から、たとえば反対称モード ($B_2=0$) のSH波を考えれば

$$w = B_1 \sin(\beta y) \cdot \cos[k(x-ct)] \text{ であるから}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-h}^h \tau_{zx} \dot{w} dy = \frac{1}{2} G c h B_1^2 k^2 \quad (\because T = \frac{2\pi}{kc}) \quad (198)$$

$$\langle H \rangle = 2\langle K \rangle = \frac{1}{2} \rho c^2 h B_1^2 k^2 \quad (199)$$

式(197)-(199)より、エネルギーの伝搬速度 C_e は

$$C_e = \frac{C_T^2}{C} \quad \text{または} \quad \frac{C_e}{C_T} = \frac{C_T}{C} = \frac{\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}} \quad (200)$$

式(181)より

$$\frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{\xi}{(\eta^2 + \xi^2)^{1/2}} = \frac{C_e}{C_T} \quad (201)$$

$$\text{結局} \quad C_e = \frac{d\omega}{dk} \quad (\because \Omega = \frac{2k\omega}{\pi C_T}, \quad \xi = \frac{2kh}{\pi}) \quad (202)$$

を得る。層内を伝ばするSH波に関し、エネルギー束の速度は角周波数の波数 k による微分に等しいことが示された。 $\omega = kc$ の関係より位相速度 C とは

$$C_e = C + k \frac{dC}{dk} \quad (203)$$

のごとく関係する。最低次対称モード ($n=0$) のSH波は、位相速度 C が定数 C_T に等しいから $C_e = C_T$ となるが、その他のモードは $C = C(k)$ と波数に依存している(分散性を有する)ので、エネルギー伝達速度 C_e は位相速度 C と異ってくる。図49にいくつかの低次モードに対する無次元群速度 C_e/C_T を示す。 $\xi=0$ のとき群速度は0となる。すなわち遮断周波数のときはエネルギーの伝達がなくなる。 $n \geq 1$ のモードに対し、 $\xi \rightarrow \infty$ (すなわち波長を短くすると) $C_e/C_T \rightarrow 1$ になる。これは相対的に層厚を大きくした時にあたり、 C, C_e とともに C_T に漸近し、波の伝ばは無限体における様になる。また、式(200)より、右辺の $\xi/\sqrt{\eta^2 + \xi^2}$ が常に $n \geq 1$ で1より小さいことから

$$C_e < C_T < C \quad (204)$$

である。虚数の波数に対しては、応力と体素の速度と位相が 90° ずれるので、 x 軸を直交する面を介してエネルギーの移動することはない。従って、この時の現象は局所的定在波としてエネルギーが蓄えられたままになっている。境界値問題として解くときに、このような伝ばしないモード成分も考慮して境界条件を満たすことが重要である。

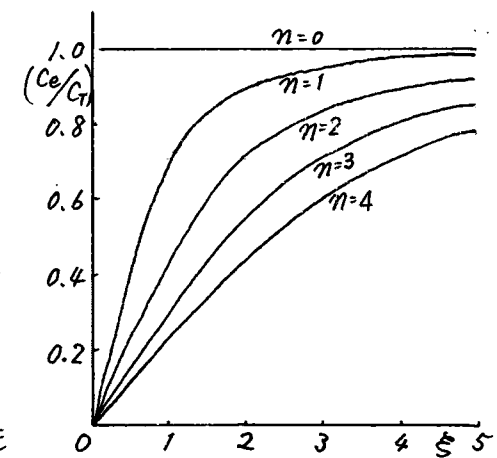


図49: SH波モードによるエネルギー伝ば速度 C_e

4.4 群速度 (Group velocity) エネルギー伝ば速度 C_e は $d\omega/dk$ によって与えられたが $d\omega/dk$ で定義されるものは ω と k の群速度 (Group velocity) という言葉で知られている。これはエネルギーの伝達を直接考えて導かれたものではなく、いろいろな周波数の波を合成した時に生ずる振動の幾何学的現象を説明するために定義されたものである。分散性を有するとき、わずかに異った波数のいくつかの波を合成した時、あまり波形がくずれない範囲ではその構成する波が一群となって伝わることから、その波のまとまりを波群といふ。その伝ば速度を群速度と呼んでいる。そこで初等的な取扱いによりエネルギー伝ば速度 C_e に群速度 C_g が一致することを考えてみよう。

同じ大きさの振幅ではあるがわずかに異った波数の x 方向に伝ばする二つの波の合成として

$$\begin{aligned} \phi &= A \{ \sin(k_1 x - \omega_1 t) + \sin(k_2 x - \omega_2 t) \} \\ &= 2A \cos\left(\frac{k_1 - k_2}{2} x - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{k_1 + k_2}{2} x - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \end{aligned} \quad (205)$$

ここで $k_0 = (k_1 + k_2)/2$, $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$, $\Delta k = (k_1 - k_2)/2$, $\Delta\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ とおけば式(205)は次のように書きかえられる。

$$\phi = \phi_0 \sin(k_0 x - \omega_0 t) \quad (206)$$

$$\phi_0 = 2A \cos(\Delta k x - \Delta\omega t) \quad (207)$$

式(206)をグラフに描けばよくわかるように、 $\Delta k, \Delta\omega$ が k_0 や ω_0 に比べて十分に小さいとき、 $\sin(k_0 x - \omega_0 t)$ は合成前の二つの波に非常に似たふるまいをするが、 ϕ は ϕ_0 によってゆるやかに振幅の変動するものとなる。 $\sin(k_0 x - \omega_0 t)$, ϕ , ϕ_0 のそれぞれを順に搬送波 (carrier wave), 変調波 (modulated wave), 変調 (modulation) と呼ぶ。図50参照。合成に

よって構成される搬送波は位相速度 $C_0 = \omega_0/k_0$ で進行するが、成分の波は $C_1 = \omega_1/k_1$, $C_2 = \omega_2/k_2$ で進行し、別々の

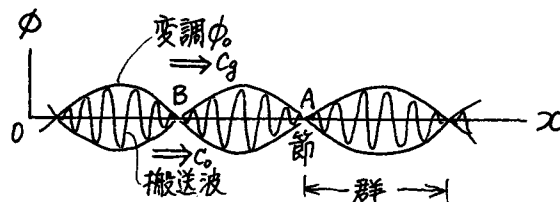


図50; 合成によってできる波

である。変調 ϕ_0 の伝ば速度を波群の伝ば速度 C_g と定めれば、その群速度は

$$\Delta k \cdot x - \Delta\omega \cdot t = \text{一定} \quad (208)$$

の微分により

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

したがって $\Delta k \rightarrow 0$ (すなわち $k_1 \rightarrow k_2 \rightarrow k_0$) の極限で $C_g = d\omega/dk$ を得る。群速度 C_g のあらわし方は

$$C_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad C_g = C + k \frac{dC}{dk}, \quad C_g = C - \lambda \frac{dC}{d\lambda}, \quad \frac{1}{C_g} = \frac{1}{C} - \frac{\omega}{C^2} \frac{dC}{d\omega} \quad (209)$$

(λ: 波長)

いろいろある。以上の様に $C_g = C_e$ となることが示されたが次の様に吟味することもできる。図50の点Aで示した節 (node) ではエネルギー密度が0であり、そこをエネルギーが通りぬけられないという事実から、節の移動速度がエネルギーの移動する速度と考えられよう。群速度を1次元波について主に述べてきたが分散性を有する系では、多次元波動でも同様にエネルギー伝ば速度と関連して説明でき重要な概念となっている。位相速度 C と群速度 C_g は $\omega-k$ 面に描いた周波数スペクトル曲線の (図51のような) 勾配で与えられる。

一般に $dC/dk < 0$ ならば $C_g < C$ であり搬送波の小さい波は波群内をBで生じ (図50) 相対的にAの方へ進行しAで消失する。この時、正常分散 (normal dispersion) といふ。逆に $dC/dk > 0$ で $C_g > C$ の時、搬送波は波群内を逆方向に進行し、異常分散 (anomalous dispersion) と呼ぶ。

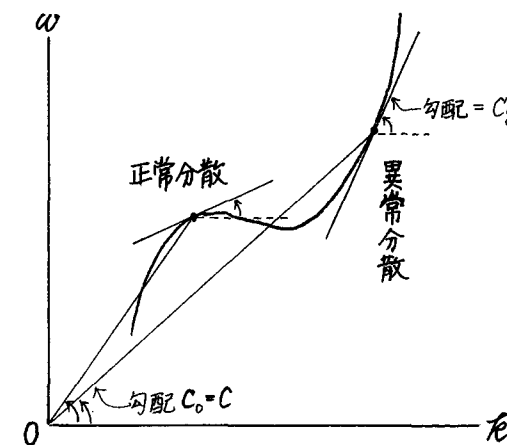


図51 $\omega-k$ 面での C と C_g の説明

4.5 ラブ波 (Love Waves) レー波は、水平方向成分(3.5節ではy方向成分)

変位のない要素の運動が表面波として伝播するのであった。では水平方向成分を有した表面波は考えられないものだろうか。地震などの観測により伝播方向と直交し、水平方向の振動をする事実が経験的に知られるが、半無限体そのものだけでは説明のつかないものであったが Love は弾性係数、密度の異なる表層を考慮することにより、この様な波の理論的解釈を与えた。そのため Love 波と呼ばれている。この表層を導波体として伝わる波は SH 波モードの横波であり、その波動特性について考えてみよう。

図52の様に界面に原点を有する座標系をとり、変形は SH 波モード ($u=w=0, v \neq 0$; 縦せん断変形) とする。この時、波動方程式(100)を満足する解は、表層と半無限体のそれぞれに対し

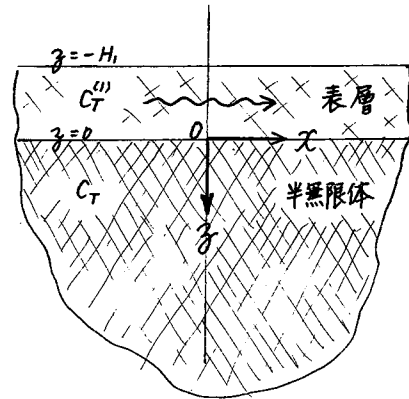


図52: ラブ波の伝播(表層に対し添字1を付ける)

$$v'' = \left\{ A_1 \exp[-k\sqrt{1-(\frac{C}{C_T''})^2} \cdot z] + A_1' \exp[k\sqrt{1-(\frac{C}{C_T''})^2} \cdot z] \right\} \cdot \exp[ik(x-ct)] \quad ; -H_1 \leq z \leq 0 \quad (210)$$

$$v = A \exp[-k\sqrt{1-(\frac{C}{C_T})^2} \cdot z] \cdot \exp[ik(x-ct)] \quad ; z \geq 0 \quad (211)$$

これらの式は $C < C_T$ とすれば $z \rightarrow \infty$ のとき $v \rightarrow 0$ となり表面波の条件を満たしている。境界条件は表層と半無限体の界面($z=0$)で変位 v と応力 τ_{yz} が連続であり自由表面($z=-H_1$)で $\tau_{yz} = 0$ となることである。SHモードの場合 $\tau_{yz} = G(\partial v / \partial z)$ であるから、半無限体に対して

$$\tau_{yz} = GA(-k\sqrt{1-(\frac{C}{C_T})^2}) \exp[-k\sqrt{1-(\frac{C}{C_T})^2} \cdot z] \exp[ik(x-ct)] \quad (212)$$

表層に対し $\tau_{yz}^{(1)} = \left\{ G_1 A_1 (-k\sqrt{1-(\frac{C}{C_T''})^2}) \exp[-k\sqrt{1-(\frac{C}{C_T''})^2} \cdot z] + G_1 A_1' (k\sqrt{1-(\frac{C}{C_T''})^2}) \exp[k\sqrt{1-(\frac{C}{C_T''})^2} \cdot z] \right\} \exp[ik(x-ct)]$, (213)

変位 v の界面における連続性より

$$A = A_1 + A_1' \quad (214)$$

応力の界面における連続性より

$$GA\sqrt{1-(\frac{C}{C_T})^2} = G_1(A_1 - A_1')\sqrt{1-(\frac{C}{C_T''})^2} \quad (215)$$

応力 $\tau_{yz}^{(1)}$ の $z = -H_1$ における条件より

$$A_1 \exp[kH_1\sqrt{1-(C/C_T'')^2}] = A_1' \exp[-kH_1\sqrt{1-(C/C_T'')^2}] \quad (216)$$

の各関係式が得られる。(214)(215)より

$$\frac{A_1 - A_1'}{A_1 + A_1'} = \frac{G\sqrt{1-(C/C_T)^2}}{G_1\sqrt{1-(C/C_T'')^2}} \quad (217)$$

式(216)を考慮すれば

$$\frac{A_1 - A_1'}{A_1 + A_1'} = \frac{1 - \exp[2kH_1\sqrt{1-(C/C_T'')^2}]}{1 + \exp[2kH_1\sqrt{1-(C/C_T'')^2}]} = -\tanh[kH_1\sqrt{1-(C/C_T'')^2}] \quad (218a)$$

または、これを書きかえて

$$\frac{A_1 - A_1'}{A_1 + A_1'} = -i \tan[-i k H_1 \sqrt{1-(C/C_T'')^2}] = -i \tan[k H_1 \sqrt{(\frac{C}{C_T''})^2 - 1}] \quad (218b)$$

式(217)と(218b)より

$$\frac{G\sqrt{1-(C/C_T)^2}}{G_1\sqrt{(C/C_T'')^2 - 1}} - \tan[kH_1\sqrt{(C/C_T'')^2 - 1}] = 0 \quad (219)$$

式(219)がラブ波の特性方程式である。これを満足する C の値(実数)を求める。まず $z \rightarrow +\infty$ における v の有限性から $C < C_T$ でなければならぬ。 $C < C_T''$ の時、式(217)の値が常に正であるのに対し、式(218a)から $-\tanh[kH_1\sqrt{1-(C/C_T'')^2}] < 0$ となり矛盾するので $C < C_T''$ に根はない。さて $C_T > C > C_T''$ の場合はどうであろうか。この場合に式(219)を満足する C が存在し、図式的に確かめられる。すなわち、以下の様に考える。新変数の

$$p = \sqrt{(C/C_T'')^2 - 1}, \quad p_0 = \sqrt{(C_T/C_T'')^2 - 1}, \quad \beta = G/G'', \quad m = C_T''/C_T \quad (220)$$

を導すれば、式(219)より

$$\tan(kH_1 p) = \beta m \sqrt{(p_0/p)^2 - 1} \quad (221)$$

式(221)のそれぞれの辺を p を変数とみて
 グラフにすれば 図53 のようになるだろう。
 $g m \sqrt{(p_0/p)^2 - 1}$ および $\tan k H_1 p$ は正値の
 みを考えるので 図の様な範囲のみでよい。
 交点における p の値より C が算出され、その
 値がラブ波の位相速度である。それは
 $k H_1$ の値によって ある数だけあり、それぞれ
 の位相速度に対応してモードが定まり、速
 度の小さい方から 1次モード, 2次モード, ... と呼ぶ。さて n 次モードが存在する範囲は 図

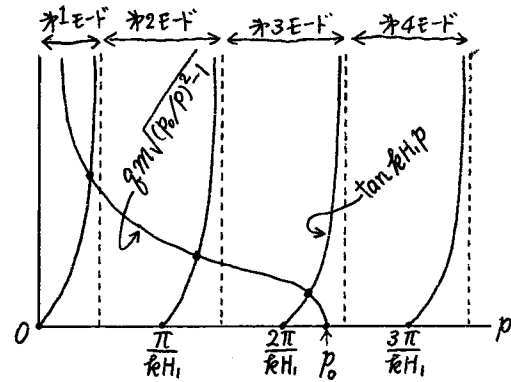


図53: 曲線の交点として根を求める。

53の考察より
$$\frac{(n-1)\pi}{k H_1} < p_0 \quad (222)$$

でなければならない。 n 次モードの位相速度 C を C_n とすると、角速度 ω_n は

$$\omega_n = k \cdot C_n(k) \quad (223)$$

で与えられる。したがって n 次モードの遮断周波数 (cut off frequency) は、図53で n 次モードの交点をあつかもたないかのぎりぎりの所、すなわち

$$\frac{(n-1)\pi}{k H_1} = p_0 \quad (224)$$

で与えられるから、 $C = C_T$ のときで ($\because g m \sqrt{(p_0/p)^2 - 1} = 0$)

$$\omega_n = k C_T = \frac{(n-1)\pi C_T}{p_0 H_1} \quad (225)$$

いま C を $C_T^{(n)}$ に限りなく近づけると $p \rightarrow 0$ で $g m \sqrt{(p_0/p)^2 - 1} \rightarrow \infty$ となり、低次モードでこの
 ような C を与える $\tan k H_1 p$ は非常に大きな値でなければならない。すなわち

$$k H_1 p \rightarrow (n - \frac{1}{2})\pi \quad \text{又は} \quad k H_1 \rightarrow (n - \frac{1}{2})\pi / \sqrt{(C/C_T^{(n)})^2 - 1} \quad (226)$$

従って $C \rightarrow C_T^{(n)}$ のとき $k H_1 \rightarrow \infty$ の分岐に対応し、モードによらず $C \rightarrow C_T^{(n)}$ の極限值が
 存在している。図54を見よ。次にラブ波の群速度を求めよう。定義式(209)と式(221)より

$$\frac{C_g}{C_T^{(n)}} = \frac{C}{C_T^{(n)}} + \frac{k}{C_T^{(n)}} \frac{dC}{dk} = \frac{C}{C_T^{(n)}} \left\{ 1 - p^2 \left[1 + \frac{g^2 (1-m^2) \cos^2 k H_1 p}{k H_1 p^3 \sin k H_1 p} \right]^{-1} \left(\frac{C_T^{(n)}}{C} \right)^2 \right\} \quad (227)$$

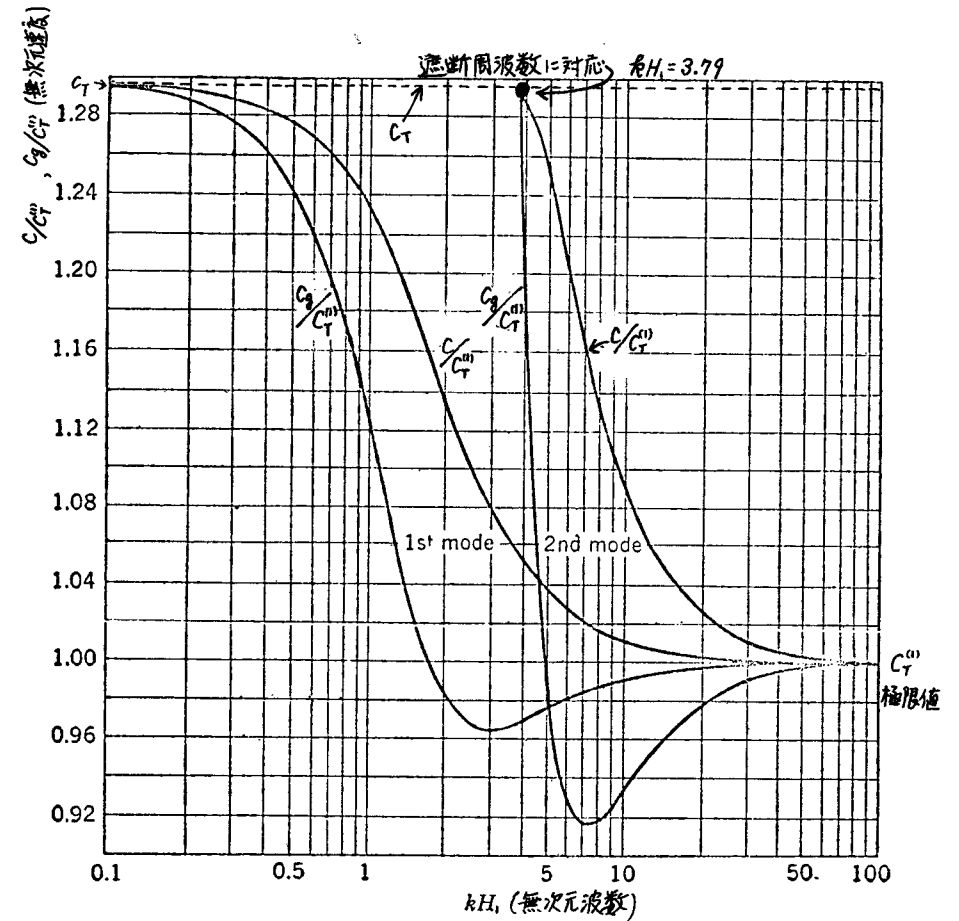


図54: Phase and group-velocity curves for first- and second-mode Love waves for case $\frac{\mu}{\lambda} = 1.207$ and $\frac{\nu}{\lambda} = 2.159$. [Ewing et al "Elastic Waves in layered media" (1957)より]

となる。1次と2次モードに対する群速度を図54に示す。位相速度と群速度はともに C_T を
 越えないが、群速度は位相速度と異って下限は $C_T^{(n)}$ よりも小さくなる $k H_1$ の範囲が存在している。
 遮断周波数で速度 $C_g \rightarrow C \rightarrow C_T$ となり $k H_1 \rightarrow \infty$ で $C_g \rightarrow C \rightarrow C_T^{(n)}$ となっている。

さてそれぞれのモードに対する変形はどの様になるだろうか 式(210), 式(219)より

$$\begin{aligned} v'' &= (A_1 + A_1') \cos(kp z) - i(A_1 - A_1') \sin(kp z) \exp[ik(x-ct)] \\ v'' &= (A_1 + A_1') \frac{\cos kp(z+H_1)}{\cos k H_1} \exp[ik(x-ct)] \end{aligned} \quad (228)$$

従って表層では cosine 状分布を示し、表面 ($z = -H_1$) で最大の振幅となる。

4.6 弾性層内を伝わる面内変形の波 弾性層が座標x方向に平面ひずみ状態である時の導波特性を考える。層厚方向にy座標をとればその方向に定在波となり、x座標方向に伝はる速度cをもつ時間調和波をもちいることにより明らかにされる。それにより導波特性を与える周波数方程式を直接的に導いてみよう。まず変位ポテンシャルφとψを、平面ひずみ状態

$$w = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) = 0 \quad (229a, b)$$

のもとで次の様に用いる。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (230a, b)$$

変位がポテンシャルによって与えられたから、Hookeの法則を用いて応力成分を表示すれば

$$\tau_{yx} = G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = G\left(2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) \quad (231)$$

$$\sigma_y = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2G\frac{\partial v}{\partial y} = \lambda\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) + 2G\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right) \quad (232)$$

さて、変位ポテンシャルφとψは式(104)(105)の平面ひずみ状態に対する波動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (233)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (234)$$

を満足する。そこで式(233)(234)の解として次を考慮層内の波動特性を調べる。

$$\phi = \Phi(y) \exp[i(\ell x - \omega t)] \quad (235)$$

$$\psi = \Psi(y) \exp[i(\ell x - \omega t)] \quad (236)$$

これを波動方程式に代入してΦ(y), Ψ(y)を求めれば

$$\Phi(y) = A_1 \sin(py) + A_2 \cos(py) \quad (237)$$

$$\Psi(y) = B_1 \sin(\beta y) + B_2 \cos(\beta y) \quad (238)$$

ここに $p^2 = \frac{\omega^2}{c_1^2} - \ell^2, \quad \beta^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2} - \ell^2 \quad (239a, b)$

式(235)(236)を式(230a, b)(231)(232)に入れて変位、応力をΦ(y)とΨ(y)で表現する。そのさい

各項に乗数因子として $\exp[i(\ell x - \omega t)]$ がつかう周波数方程式を導くにあたって、それは、何の影響も及ぼさないで以下の解析ではこれを省略して表わす。

$$u = i\ell \Phi + \frac{d\Psi}{dy}, \quad v = \frac{d\Phi}{dy} - i\ell \Psi \quad (240), (241)$$

$$\tau_{yx} = G\left(2i\ell \frac{d\Phi}{dy} + \ell^2 \Psi + \frac{d^2 \Psi}{dy^2}\right) \quad (242)$$

$$\sigma_y = \lambda\left(-\ell^2 \Phi + \frac{d^2 \Phi}{dy^2}\right) + 2G\left(\frac{d^2 \Phi}{dy^2} - i\ell \frac{d\Psi}{dy}\right) \quad (243)$$

式(240-243)に式(237)(238)を代入すれば sine と cosine によって書きあらわせる。ところでその時、x方向変位uが層中央面(y=0)について対称(反対称)ならば、uには cosine (sine) 関数が入ってくる。vはこの時 sine (cosine) 関数表示となる。このように弾性層内を伝わる波の様式(モード)は対称モードと反対称モードの系に分割でき対称モードのとき:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= A_2 \cos(py), \quad \Psi = B_1 \sin(\beta y) \\ u &= i\ell A_2 \cos(py) + \beta B_1 \cos(\beta y), \quad v = -pA_2 \sin(py) - i\ell B_1 \sin(\beta y) \\ \tau_{yx} &= G[-2i\ell p A_2 \sin(py) + (\ell^2 - \beta^2) B_1 \sin(\beta y)] \\ \sigma_y &= -\lambda(\ell^2 + p^2) A_2 \cos(py) - 2G[p^2 A_2 \cos(py) + i\ell \beta B_1 \cos(\beta y)] \end{aligned} \right\} (244)$$

反対称モードのとき:

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= A_1 \sin(py), \quad \Psi = B_2 \cos(\beta y) \\ u &= i\ell A_1 \sin(py) - \beta B_2 \sin(\beta y), \quad v = pA_1 \cos(py) - i\ell B_2 \cos(\beta y) \\ \tau_{yx} &= G[2i\ell p A_1 \cos(py) + (\ell^2 - \beta^2) B_2 \cos(\beta y)] \\ \sigma_y &= -\lambda(\ell^2 + p^2) A_1 \sin(py) - 2G[p^2 A_1 \sin(py) - i\ell \beta B_2 \sin(\beta y)] \end{aligned} \right\} (245)$$

となる。これらの式をφとψに、境界条件を与えて周波数ωと波数ℓとの関係すなわち周波数方程式を考える。

まず、いく分特殊な場合であるがもっとも簡単になるよう、次の境界条件を考える。

$$v = 0, \quad \tau_{yx} = 0 \quad (y = \pm \ell) \quad (246)$$

もしくは $u = 0, \quad \sigma_y = 0 \quad (y = \pm \ell) \quad (247)$

式(246)(247)のそれぞれの混合境界条件は、いかなる型の波が境界に入射しようとも反射波は入射波の型と同一の波のみで満足される。すなわち P波の反射に伴って生じていた SV波はこの時生じない。これは第3章で論じた反射現象の解析に準じて明らかになる。したがって式(246)の条件に対しては 対称モードの時、 $A_2=0$ で $\sin \rho h=0$ もしくは $B_1=0$ で $\sin p h=0$ とすればよい。これら二つの場合は、それぞれ連成しない等積モードと膨張モードである。 $\sin \rho h=0$ の時、次の周波数方程式となる。

$$\rho = \frac{n\pi}{2h}, \quad n=2, 4, 6 \dots \quad (248)$$

ここに $2h$ は層厚である。前と同様(式[190])これは式(180a, b)の置換により

$$\Omega^2 = n^2 + \xi^2 \quad (249)$$

を得る。他の色々なモードに対し、境界条件(246)を満たす周波数方程式をまとめれば

- 対称等積モード: $A_2=0$; $\Omega^2 = n^2 + \xi^2$, $n=0, 2, 4, 6 \dots$ (250a)
- 反対称等積モード: $A_1=0$; $\Omega^2 = n^2 + \xi^2$, $n=1, 3, 5, \dots$ (250b)
- 対称膨張モード: $B_1=0$; $\Omega^2 = \kappa^2(m^2 + \xi^2)$, $m=0, 2, 4, 6 \dots$ (250c)
- 反対称膨張モード: $B_2=0$; $\Omega^2 = \kappa^2(m^2 + \xi^2)$, $m=1, 3, 5 \dots$ (250d)

ここに $\kappa = c_L/c_T$ 。式(250)で与えられるものは実数 ξ に対しては $\Omega = \xi$ と $\Omega = \kappa\xi$ を漸近線とする双曲線を、虚数 ξ に対しては半径 n の円弧と、短軸長軸が m と κm の長円弧となる。

一方、式(247)の境界条件に対してまとめれば

- 対称等積モード: $A_2=0$; $\Omega^2 = n^2 + \xi^2$, $n=1, 3, 5 \dots$ (251a)
- 反対称等積モード: $A_1=0$; $\Omega^2 = n^2 + \xi^2$, $n=2, 4, 6 \dots$ (251b)
- 対称膨張モード: $B_1=0$; $\Omega^2 = \kappa^2(m^2 + \xi^2)$, $m=1, 3, 5 \dots$ (251c)
- 反対称膨張モード: $B_2=0$; $\Omega^2 = \kappa^2(m^2 + \xi^2)$, $m=0, 2, 4, 6 \dots$ (251d)

次に、實際上非常に重要な境界条件として、弾性層の上下面($y = \pm h$)で応力成分が 0 となる場合を考えてみよう。式(247)は次のようになる。

$$\tau_{yx} = \sigma_y = 0 \quad (y = \pm h) \quad (252)$$

この条件より、対称モードの時、定数 A_2, B_1 に関する二本の齊次方程式を得る。また、反対称モードの時、定数 A_1, B_2 に関する齊次式も得られる。系が斉次であるから意味のある解を有することを考えて係数行列式が 0 となるとすれば、それぞれのモードに対し

$$\text{対称モード: } \frac{\tan(\rho h)}{\tan(p h)} = -\frac{4\rho^2 p \xi}{(\rho^2 - \xi^2)^2} \quad (253a)$$

$$\text{反対称モード: } \frac{\tan(\rho h)}{\tan(p h)} = -\frac{(\rho^2 - \xi^2)^2}{4\rho^2 p \xi} \quad (253b)$$

これは Rayleigh-Lamb の周波数方程式として知られている。この超越代数方程式(253)は実に簡潔な形をしており、すでに19世紀末には導びかれていたが、この式にもとづく周波数スペクトルの詳細は Mindlin らによって明らかにされる(1960年代)まで待たねばならなかった。

4.7 レーレーラムの周波数スペクトル

レーレーラムの周波数方程式(253)によって表わされる周波数と波数間の関係は、対称と反対称のモードに対し無限本の分岐を与える。そのいずれの対称モードも厚さにわたった平均変位が長手(x)方向であるので一般に縦モード(Longitudinal mode)と呼んでいる。これに対し反対称モードについては平均変位が厚さ方向(横方向:y方向)なので一般にたわみモード(flexural mode)と呼んでいる。式(180)の無次元周波数 Ω と無次元波数 ξ を用いて、式(253)より

$$\text{縦モード: } \frac{\tan\left[\frac{\pi}{2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}\right]}{\tan\left[\frac{\pi}{2}(\Omega^2/\kappa^2 - \xi^2)^{1/2}\right]} = -\frac{4\xi^2(\Omega^2/\kappa^2 - \xi^2)^{1/2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}}{(\Omega^2 - 2\xi^2)^2} \quad (254a)$$

$$\text{たわみモード: } \frac{\tan\left[\frac{\pi}{2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}\right]}{\tan\left[\frac{\pi}{2}(\Omega^2/\kappa^2 - \xi^2)^{1/2}\right]} = -\frac{(\Omega^2 - 2\xi^2)^2}{4\xi^2(\Omega^2/\kappa^2 - \xi^2)^{1/2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}} \quad (254b)$$

とあらわせるから速度比 κ が与えられれば $\Omega - \xi$ の曲線群が定まる。 κ は

$$\kappa = c_L/c_T = [2(1-\nu)/(1-2\nu)]^{1/2} \quad (255)$$

である。従ってポアソン比 ν を定めてよい。式(254)より Ω と ξ の関係を与える曲線を求めるにはデジタル電子計算機による。 Ω を与えて、式(254)を満たす ξ を求める手

法をとることが多い。実数 ξ に対して、これは最も直接的であり広範囲の数値結果が算出できる。しかし、材料内部で熱エネルギーなどへの変換がない場合は Ω が正実数に限定することはできても、波数 ξ は波動の幾何学的状態に関連し、虚数にも複素数にもなりうる。したがって数値計算する前に周波数スペクトルの様相を特別な場合などを考えたりして検討することが重要である。

まず、 ξ が実数で極端に小さい時と大きい時とを次の三つの領域のそれぞれで考えてみる。

$$\xi > \Omega, \quad \Omega > \xi > \Omega/\kappa, \quad \Omega/\kappa > \xi \quad (256 \text{ a, b, c})$$

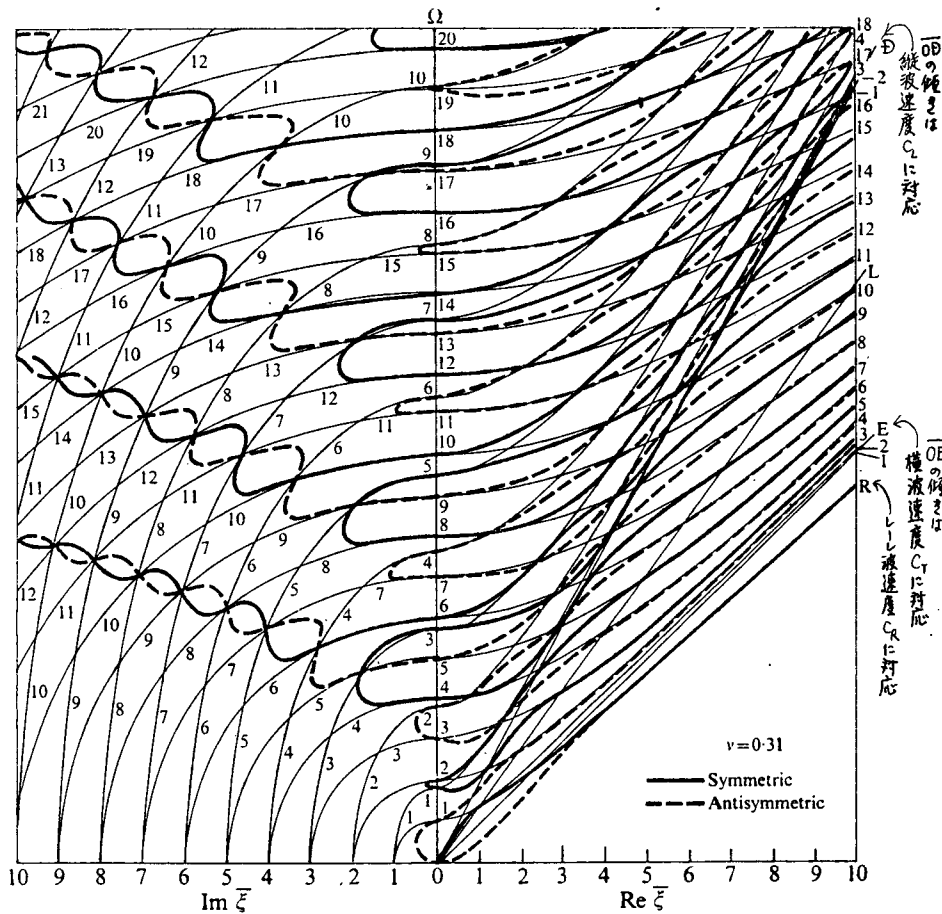


図55: Rayleigh-Lamb 方程式による周波数スペクトル (Mindlin, R.D., "Waves and Vibrations in Isotropic, elastic plates", In Structural Mechanics (Eds. J.N. Gurdier and N. Hoff; 1960) pp.199~232. より)

これは、式(254)の平方根の中が正になるか、負になるかによって分けたもので、 $\xi = \Omega$ のとき、図55の直線 OE , $\xi = \Omega/\kappa$ のとき直線 OB になり、それぞれ位相速度 C が C_T, C_L となった時である。

$\xi > \Omega$ の領域で $\xi \rightarrow 0$ とした時: $\xi = 0$ におけるテーラー展開

$$\Omega = \Omega_1 \xi + \frac{1}{2} \Omega_2 \xi^2 + \dots \quad (257)$$

を式(254)に用いれば $\tan(\cdot)$ が $\tanh(\cdot)$ になることに注意して

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 2\pi \left[\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{\kappa^2} \right) \right]^{1/2} \quad (258 \text{ a, b})$$

となるから $\xi \ll 1$ では

$$\Omega = \left(\frac{\kappa^2 - 1}{3\kappa^2} \right)^{1/2} \pi \xi^2 \quad (259)$$

これは薄板に対する 0次古典たわみ運動方程式から得られる結果に一致する。すなわち

$$C = \kappa h \sqrt{\frac{E}{3(1-\nu^2)\rho}} \quad \text{たわみ波速度} \quad (259')$$

縦モードの式(254a)からはこの $\xi > \Omega$, $\xi > 0$ の領域に解はない。

$\xi > \Omega$ の領域で $\xi \rightarrow +\infty$ とした時: 式(254)の左辺は1に近づくのでこれらの式は

$$(\Omega^2 - 2\xi^2)^2 - 4\xi^2(\xi^2 - \Omega^2/\kappa^2)^{1/2}(\xi^2 - \Omega^2)^{1/2} = 0 \quad (260)$$

に帰着される。これは以前に導いた L-L の方程式である。 ξ を非常に大きくするという事は波長を非常に短くすることであるから、弾性層境界面における挙動が半無限境界面の挙動を含み、その状態になってゆくことがわかる。従って $\Omega = (C_R/C_T)\xi$ となってゆく。

$\Omega > \xi > \Omega/\kappa$ の領域(図55の領域 DOE)で $\xi \rightarrow +\infty$ の時 $\Omega = \xi$ (図55の OE)に漸近する。

$\xi \rightarrow 0$ の時は式(254a)より式(257)の展開手法を用いて

$$\Omega = 2 \left(\frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2} \right)^{1/2} \xi \quad (261)$$

これは薄板に対する 0次の古典的伸縮運動方程式から得られ

$$C = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)G}{(1-\nu^2)\rho}} = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \cdot C_T \quad (261')$$

である。 $\xi \rightarrow 0$ の時、式(254b)を満たす解はない。

$0 < \xi < \Omega/\kappa$ の領域で ξ の大きな値に対する漸近値はない。 ξ の小さな値に対しては

$$\text{縦モードの時: } \sin\left(\frac{\pi}{2}\Omega\right) = 0 \quad \text{または} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\Omega/\kappa\right) = 0 \quad (262)$$

たわみモードの時: $\sin(\frac{\pi}{2}\Omega/k) = 0$ または $\cos(\frac{\pi}{2}\Omega) = 0$ (263)

に式(254)が書きかえられる。これらを満足する Ω は x 座標に無関係な運動、すなわち x 方向に無限大の位相速度となる。また x 方向と y 方向の変位 u, v は連成しないので膨張運動 ($u=0, v \neq 0$) か等積運動 ($u \neq 0, v=0$) となる。

混合境界条件(246)(247)から導びかれた式(250)(251)にもとづき Ω - ξ 面に曲線を描けば図55の細線となる。また式(254)にもとづけば図55の太い実線と破線になる。これを比較すれば細線は波打ち変動する太い線の変化の限界を与える。すなわち細線によってできる菱形の網目の中にはただ一本の太実線(または太破線)しかない。このようなことから式(246)(247)は非常に特殊な条件かもしれないが意味のある重要な条件である。

4.8 周波数スペクトル曲線の幾何学的・物理的考察

(正実 Ω -複素 ξ 空間を走る周波数スペクトル曲線)

Ω = 一定の線が図55に描いた

周波数スペクトル曲線と交わる曲線は有限本数しかない。そのため複素波数となる無限個の分岐が他にあるだろうと予想される。このような分岐のあることは Ω が非常に小さい時を調べてみれば確かめられる。まず縦モードを次のように考えてみよう。式(254a)から

$$F(\Omega, \xi) = \frac{\tan[\frac{\pi}{2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}]}{\tan[\frac{\pi}{2}(\Omega^2/k^2 - \xi^2)^{1/2}]} + \frac{4\xi^2(\Omega^2/k^2 - \xi^2)^{1/2}(\Omega^2 - \xi^2)^{1/2}}{(\Omega^2 - 2\xi^2)^2} = 0, \quad (264)$$

$F(\Omega, \xi)$ は Ω^2 の形で依存しているから $\Omega \ll 1$ のとき次の様に書ける。

$$F(\Omega, \xi) = F_0(\xi) + F_2(\xi)\Omega^2 + \dots \quad (265)$$

また $\Omega=0$ のとき式(264)から $F \equiv 0$ になるので $F_0(\xi) \equiv 0$ となり、 $\Omega \ll 1$ では

$$F(\Omega, \xi) \sim F_2(\xi)\Omega^2 \quad (266)$$

これは $\Omega=0$ の面に直交することを示している。そして式(264)を満足する曲線は

$$F_2(\xi) = 0 \quad (267)$$

なる点で $\Omega=0$ の面と交わる。ロピタルの定理を $F_2(\xi) = \lim_{\Omega \rightarrow 0} [F(\Omega, \xi)/\Omega^2]$ に適用してみると式(267)は

$$\sinh(\pi\xi) + \pi\xi = 0 \quad (268)$$

上式を満足する ξ が平面 $\Omega=0$ との交点である。同様な手順により、たわみモードに対し

$$\sinh(\pi\xi) - \pi\xi = 0 \quad (269)$$

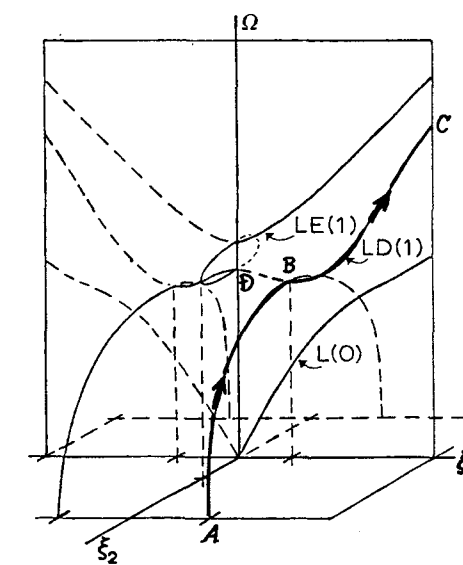
いま $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ ($\xi_1, \xi_2 \in \text{Real}$) とおけば ξ_1 と ξ_2 に関する連立方程式

$$\left. \begin{aligned} \cos(\pi\xi_2) &= \mp \pi\xi_1 / \sin(\pi\xi_1) \\ \cosh(\pi\xi_1) &= \mp \pi\xi_2 / \sinh(\pi\xi_2) \end{aligned} \right\} \quad (270)$$

となる。-と+符号は順に縦モードとたわみモードに適用する。式(270)は無限個の組 (ξ_1, ξ_2) の解を有するので、周波数スペクトルが複素波数 $\xi_1 + i\xi_2$ を有する無限数のモードを有していることがわかる。

$\Omega > 0$, $\xi \in \text{complex}$ に対する曲線を考える。 $F(\Omega, \xi)$ は式(264)のごとく ξ^2 に依存しているで平面 $\xi_1=0$ と平面 $\xi_2=0$ を対称面とする曲線群となっている。すなわちそれぞれの平面に直交する ($\partial\Omega/\partial\xi = 0$; $\xi_1=0, \xi_2=0$ で) 従って交点は $F(\Omega, \xi) = 0$ と $\partial\Omega/\partial\xi = 0$ を満足する点として与えられる。一方 $\xi \in \text{Real}$ に対し $F(\Omega, \xi) = \partial\Omega/\partial\xi = 0$ の点は遮断周波数である。この時 $\xi_1=0$ または $\xi_2=0$ である必要はない。

周波数スペクトル曲線の意味するものを考えてみる。特定の分岐をたどって説明する。図56で $\Omega=0$ のA点を出発すれば Ω が大きくなるほど ξ_2 が小さくなり、(これは x の増加とともに) 振幅の減衰割合が小さくなることを意味する。B点に



対する Ω が遮断周波数を与え、複素波数の分岐ABで群速度は0となる。群速度の正となる分岐を選べばBから出ているいくつかの分岐のうちBCとなり無限にのびて行く。BDの部分もBCの部分とモードと同じであるが境界値問題や初期値問題解析として板の衝撃応答をしらべる時群速度の符号が不変となるように分岐を選ぶため実線(破線)のみに沿って解析が行われる。たとえば鞍点法(saddle point method)などはその例である。

図56 Symmetric modes with complex wavenumbers. [Achenbach, J.D. "Wave propagation in elastic solids"(1973)より]

5. 近似理論

無限に広がる弾性層の調和波動解析は前節で扱ったように本質的に困難となる所はないが、レーレ・ラム周波数方程式に基づく周波数スペクトル解析に見られる様に無限数のモードに対する種々の分岐が無数存在し、現実問題として(たとえば端を有する層や柱の解析には)各々のモードが連成し非常に複雑になってくる。そして境界値問題あるいは初期値問題等を解くと言う場合、手際よく扱えるものは限定される。そこで工学的見地から、広く応答現象を把握するということから近似的な取扱いが提案されており、その従来の近似理論を分類すれば二つになろう。その一つは、たとえば近似的運動方程式など基礎式に解析する対象物の特性を組みこんで支配方程式を導き簡易にして解く方法と、二つは基礎式を厳密に取扱い形式解を導くが、応答特性を考慮して形式解の評価を工夫し、近似的に境界条件を満足させる方法である。前者は、Timoshenkoの梁理論やMindlinらの厚板の理論に代表され、後者は鞍点法、特性曲線法、波数展開法などに代表される。本章では近似解法のいくつかを紹介する。

5.1 弾性層の板近似について 層を板に近似するという事は、三次元弾性体を支配する基礎式群を、層の中央面で定義される物理量によって層厚にわたる分布を規定し、二次元の基礎式群におきかえることである。この手法には、その近似理論によって色々な仮定にもとづくものとなり、ほとんどが変形の幾何学的仮定をしている。キルヒホフの仮定はその例で、変形前に中央面に直交する平面は、変形後においても変形した中央面に直交するといった類である。その他、Mindlinは厚板近似理論を考えている。彼は板のたわみ運動に対し、厚さにわたった変形がその座標のべき級数展開で与えられるとし古典板理論より高次の理論を提案した。そして波動伝ばりともなう板の横せん断と回転慣性の効果を組み込むことにより周波数スペクトルの低次のモードに対してよく適合するものとした。その際、厳密な周波数スペクトルに合わせるため補正係数 κ (numerical factor) を用いている。さらに彼は、板の伸縮波動(長さ方向)に対しても近似理論を作っている。そ

こでは変形を厚さ方向座標を引数にもつルジャンドル関数により展開した形に仮定している。これは、その関数の直交性 に目を付けた手法であり、首尾よく理論をまとめている。べき級数にしろ、ルジャンドル関数による級数にしろ、いずれも有限項で打ち切って用いられるが、これは波動の有限モードのみを取ることを意味する。それでもこれらの近似理論は、波数のかなりの範囲にわたって非常によい周波数(もしくは位相速度)を与えること、また高次モードが比較的low周波域で応答にあまり影響を及ぼさないことから、有効な理論であろうことが理解できる。

5.2 板のたわみ運動に対する古典理論 板の曲げの古典理論は、もともと板の中央面に対し垂直な平面が変形後も変形した中央面に垂直であるという仮定にもとづいている。 x 、 y -方向を板の中央面内にとれば、一様な厚さ $2h$ の板を支配する方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{2\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (271)$$

ここに $w(x, y, t)$ は、平板中央面のたわみ変位で D はたわみ剛性(flexural rigidity)

$$D = 8Eh^3 / \{12(1-\nu^2)\} \quad (272)$$

である。式(271)の誘導はK.F. Graffの著書「Wave motion in elastic solids」の4.2節(227頁)を参照されたい。さて、ここで調和波

$$u = A \exp[i(kx - \omega t)] \quad (273)$$

を考慮周波数スペクトルを考えれば、次を得る。

$$\omega = k^2 h \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}} \quad (274)$$

これはレーレ・ラム周波数方程式より得た周波数スペクトルの反対称最低次モードに対する $\omega \rightarrow 0$ 極限の表示[式(259)]になる。従って、この古典理論は板厚に比べ長波の場合に適用できる。

5.3 板のたわみ運動の横せん断と回転慣性の効果を考える理論 横せん断(Trans-

verse shear)と回転慣性を考慮し、古典理論がMindlinによって拡張された。これは、たわみ運動に対し変位成分が

$$u = -z\psi_x(x, y, t), \quad v = -z\psi_y(x, y, t), \quad w = w(x, y, t) \quad (275)$$

で与えられるとするので ψ_x と ψ_y のそれぞれを变形前の中央面の法線のxとy方向の局所回転と考える。式(275)は、各変位成分を厚さにわたってzのべきで仮定し低次の適当な項を選んだものに当たる。wはzに無関係としているから厚さ方向の伸縮は考慮されない。このu, v, wを用いて導びかれる変位表示の支配方程式は板厚2hの場合次の様になる。(Gnaffの著書の

$$480頁) \quad \frac{D}{2}[(1-\nu)\nabla^2\psi_x + (1+\nu)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\psi_y}{\partial y})] - 2\kappa Gh(\psi_x - \frac{\partial w}{\partial x}) = \frac{2}{3}\rho h^3\ddot{\psi}_x \quad (276a)$$

$$\frac{D}{2}[(1-\nu)\nabla^2\psi_y + (1+\nu)\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial\psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\psi_y}{\partial y})] - 2\kappa Gh(\psi_y - \frac{\partial w}{\partial y}) = \frac{2}{3}\rho h^3\ddot{\psi}_y \quad (276b)$$

$$2\kappa Gh(\nabla^2 w - \frac{\partial\psi_x}{\partial x} - \frac{\partial\psi_y}{\partial y}) + f(x, y) = 2\rho h\ddot{w} \quad (276c)$$

ここに $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ であり、 $f(x, y)$ はz方向荷重分布である。これをさらに整理すると

$$\begin{aligned} (\nabla^2 - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(D\nabla^2 - \frac{2}{3}\rho h^3 \frac{\partial^2}{\partial t^2})w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ = (1 - \frac{D}{2\kappa Gh} \nabla^2 + \frac{\rho h^2}{3\kappa G} \frac{\partial^2}{\partial t^2})f \end{aligned} \quad (277)$$

の一本の式に到達できる。上式で回転慣性を除くには $\frac{2}{3}\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ と $\frac{\rho h^2}{3\kappa G} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ の項を0とすればよく

$$D(\nabla^2 - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^2}{\partial t^2})\nabla^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (1 - \frac{D}{2\kappa Gh} \nabla^2)f \quad (278)$$

また、剪断変形の効果のみ除外するには $\frac{1}{2\kappa Gh}$ を0とおけばよく次式となる。

$$(D\nabla^2 - \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2}{\partial t^2})\nabla^2 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (279)$$

双方の効果を取り除けば式(271)に荷重分布fの項を考えたものと得る。すなわち

$$D\nabla^4 w + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f \quad (280)$$

式(276)~(278)におけるKは、厚さにわたる剪断応力の近似分布が厳密な分布と異なるためそれを補正する係数(numerical factor)である。この係数は $f=0$ とした式(277)から得られる周波数スペクトルが最低次反対称モードの厳密なスペクトルと一致するように定められる。

ここで $\psi_y = w = 0, \quad \psi_x = e^{i\omega t}$ とすれば (281)

波数 $k \rightarrow 0$ における解析ができ式(277)より、 $f=0$ とした時

$$\omega = (12\kappa/4h^2)^{1/2} C_T \quad (282)$$

を得る。厳密値は反対称等価モード($n=1, k \rightarrow 0$)とした時 $\Omega = 1$ 、すなわち

$$\omega = \pi C_T / 2h \quad (283)$$

であるから、式(282)と比較して

$$K = \pi^2 / 12 \quad (284)$$

と定められる。Kの定め方は、どの周波数域、どの波数域、どのモードに合わせるかによって、いろいろある。たとえばたわみモードで $k \rightarrow \infty$ のとき位相速度Cがレイレー波速度 C_R に漸近するという事実

に合うようKを決め

るならば

$$K = \sqrt{C_R/C_T} \quad (285)$$

となり、この時の近似分散曲線と厳密な分散曲線とを比較すれば図57のごとくなる。

図は非常によく一致を示しているが他のモードに対して合っているか保障はできない。一般に応答は低周波が支配的となるから、式(284)のように選ぶべきだろう。

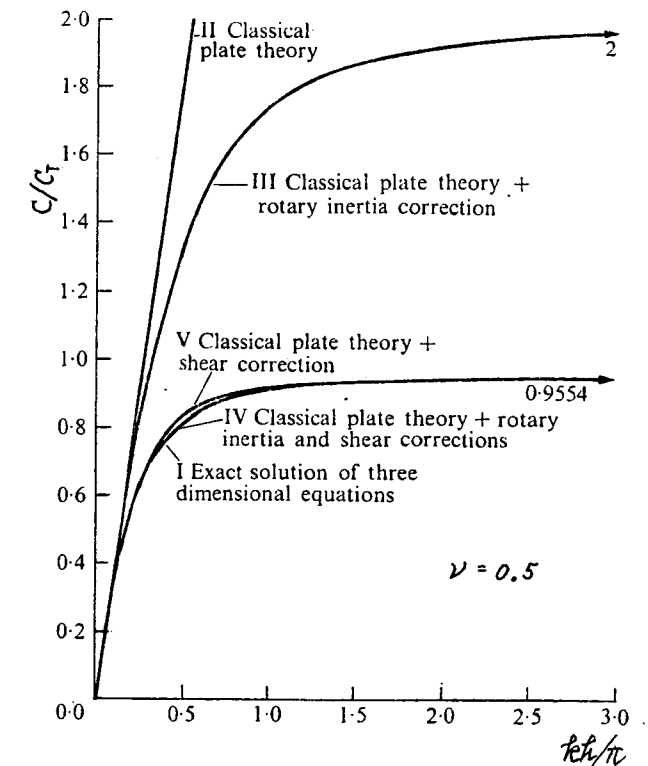


図57. 板のたわみ運動に対する分散曲線の比較(0次の反対称モードの時)

5.4 薄板の伸縮運動と Mindlin の厚板の理論式

一様な厚さの薄板の引張に対し、一般化平面応力状態を仮定すれば、初等理論は (generalized plane stress) 次の支配方程式を与える [Achenbach, J. D., "Wave propagation in elastic solids" (1973) P. 267].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{(1-\nu^2)\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (286)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{(1-\nu^2)\rho}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (287)$$

ここで調和波

$$u = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad v = 0 \quad (288)$$

を考慮して周波数スペクトル曲線を求めれば

$$\omega^2 = \frac{E k^2}{\rho(1-\nu^2)} \quad (289)$$

従って式(286)(287)で与えられる近似系は波動の分散性を説明することができない。これはレーラムの式より明らかにされるように長波 ($k \rightarrow 0$) 近似の場合にのみ合致し、その時の位相速度 C は

$$C \equiv C_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (290)$$

になる。式(261)'を参照。

次に Mindlin と Medick が取扱った板の伸縮運動に対する近似理論を紹介する。彼らは変位成分を次の様にルジャンドル関数 $P_n(\cdot)$ により展開形で与えた。

$$u_j = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\eta) u_j^{(n)}(x_1, x_3, t) \quad ; j=1, 2, 3 \quad (291)$$

ただし厚さ方向を x_2 , 板中央面内を x_1, x_3 に座標をとり、 $\eta = x_2/h$ で標準化する。考える波動は伸縮状態(中央面が対称面となる運動状態)を考慮から $(j+n)$ が奇数となる $u_j^{(n)}$ のみ採用する。そして $n=0, 1, 2$ の低次変形で近似すれば場を支配する変位表示の運動方程式は補正係数 K_1, K_2, K_3, K_4 を含む次式を導いた。(cf. Mindlin, Trans. ASME (E) 1959, P. 585)

$$G \nabla^2 u_1^{(0)} + (\lambda + G) \frac{\partial e_0}{\partial x_1} + \frac{\lambda K_1}{b} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{F_1^{(0)}}{2b} = \rho \ddot{u}_1^{(0)} \quad (292a)$$

$$G \nabla^2 u_3^{(0)} + (\lambda + G) \frac{\partial e_0}{\partial x_3} + \frac{\lambda K_1}{b} \frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_3} + \frac{F_3^{(0)}}{2b} = \rho \frac{\partial^2 u_3^{(0)}}{\partial t^2} \quad (292b)$$

$$G K_2^2 \nabla^2 u_2^{(0)} - \frac{3\lambda K_1 e_0}{b} - \frac{3K_1^2(\lambda + 2G) u_2^{(1)}}{b^2} + \frac{3G K_2^2 e_2}{b} + \frac{3F_2^{(1)}}{2b} = \rho K_3 \frac{\partial^2 u_2^{(0)}}{\partial t^2} \quad (292c)$$

$$\frac{E'}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 u_1^{(2)} + (1+\nu) \frac{\partial e_2}{\partial x_1} \right] - \frac{5G K_2^2}{b} \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_1} + \frac{3u_1^{(2)}}{b} \right) + \frac{5F_1^{(2)}}{2b} = \rho K_4 \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial t^2} \quad (292d)$$

$$\frac{E'}{2} \left[(1-\nu) \nabla^2 u_3^{(2)} + (1+\nu) \frac{\partial e_2}{\partial x_3} \right] - \frac{5G K_2^2}{b} \left(\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x_3} + \frac{3u_3^{(2)}}{b} \right) + \frac{5F_3^{(2)}}{2b} = \rho K_4 \frac{\partial^2 u_3^{(2)}}{\partial t^2} \quad (292e)$$

$$\text{ここで} \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad e_0 = \frac{\partial u_1^{(0)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^{(0)}}{\partial x_3}, \quad e_2 = \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x_3} \\ b \equiv h, \quad E' = E/(1-\nu^2), \quad F_j^{(n)} = [P_n(\eta) \tau_{2j}]_{\eta=-1}^{\eta=1} \end{array} \right\} \quad (293)$$

K_i は厳密な周波数スペクトル曲線との比較によって定められるが、調和波が x_1 方向のみ伝播するとすれば $\partial/\partial x_3 = 0$ より (292a)(292c)(292d) と (292b)(292e) とは連続しなくなるので取扱いが楽になる。 K_i を求める詳細は前出の文献を参照のこと。

5.5. 分散性波動の伝ばによる遠方場の近似応答について(停留位相法)

群速度のありまを 4.4 節で説明したが、衝撃などの遠方場における応答とは、^(群速度と)どのような関係をもつのだろうか。そのことを停留位相法という近似的取扱いにより説明してみる。一般に $x=0$ における波源の変位(応力、速度などともよい)は、フーリエ積分の重ね合せの意味で、周波数の連続した調和波の重ね合せと考えることができる。

$$u(0, t) = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (294)$$

ここに $f^*(\omega)$ は $f(t)$ のフーリエ変換である。それぞれの成分の調和波が位相速度 C で伝わるから、距離 x の所では位相おくれ(時間おくれ)があるから

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \exp[i\omega(t - \frac{x}{C})] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \exp[-i(kx - \omega t)] d\omega \quad (295)$$

式(295)の C (又は k) は ω の関数である。今、上式の位相を

$$\phi(\omega) = -(kx - \omega t) \quad (296)$$

とおくと、震源から遠くはなれた所(遠方場)では x も t も大きいので $\exp[i\phi(\omega)]$ は、一般に高振動形の関数である。従って、式(295)の積分は、下図のような曲線にかこまれた影をつけた面積和となる。 $f^*(\omega)$ の変動は $\exp[i\phi(\omega)]$ の変動に比べ、ゆるやかであるから、相隣る面積和は符号が反対のため打ち消し合う。ただ $\phi(\omega)$ の変化が $f^*(\omega)$ と同等であるか、またはそれ以下の所では打ち消し合わない。このような、ゆるやかな変動となる $\phi(\omega)$ は、 ω が次式を満たす所の近辺である。

$$\phi'(\omega) = 0 \quad (297)$$

これを満足する ω を ω_0 とする。結局、式(295)の積分は ω_0 近辺のみ行えばよいことになる。そこで

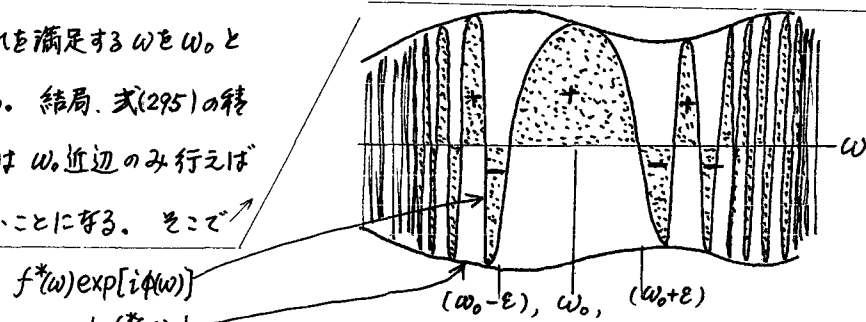


図 58: 停留位相近辺の積分評価

式(295)を ω_0 近傍で次のように展開する。

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \exp\left\{i\left[\phi(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\phi'(\omega_0) + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\phi''(\omega_0) + \dots\right]\right\} d\omega \quad (298)$$

ω_0 近傍以外の積分が 0 となるから、式(298)は近似的に

$$u(x, t) \approx f^*(\omega_0) \exp[i\phi(\omega_0)] \int_{\omega_0 - \epsilon}^{\omega_0 + \epsilon} \exp\left[\frac{i}{2}(\omega - \omega_0)^2\phi''(\omega_0) + \dots\right] d\omega \quad (299)$$

積分範囲を拡張しても(0 を加えても)積分値に変わりはないから、 $\tilde{\omega} = \omega - \omega_0$ として

$$u(x, t) \approx f^*(\omega_0) \exp[i\phi(\omega_0)] \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{i}{2}\tilde{\omega}^2\phi''(\omega_0)\right] d\tilde{\omega} \quad (300)$$

ところで Fresnel 積分公式の

$$\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{2}ax^2\right) dx = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{1}{2}ax^2\right) dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (301)$$

を $a = |\phi''(\omega_0)|$ として式(300)に用いるれば

$$u(x, t) \approx f^*(\omega_0) \exp[i\phi(\omega_0)] \sqrt{\frac{\pi}{|\phi''(\omega_0)|}} \cdot (1 \pm i) \quad ; (\text{複号は } \phi'' \text{ の符号をとる})$$

$$u(x, t) \approx f^*(\omega_0) \sqrt{\frac{2\pi}{|\phi''(\omega_0)|}} \exp\left[i\phi(\omega_0) \pm i\frac{\pi}{4}\right] \quad (302)$$

と近似評価できる。 $\omega = \omega_0$ の停留点においては

$$0 = \phi'(\omega_0) = -\left[\frac{d}{d\omega}(kx - \omega t)\right]_{\omega=\omega_0} = -x\left[\frac{dk}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_0} + t = -\frac{x}{[C_g]_{\omega=\omega_0}} + t$$

従って $t = \frac{x}{C_g} \quad (\omega = \omega_0) \quad (303)$

つまり点 x では、群速度 $[C_g]_{\omega=\omega_0}$ で伝わるに要する時間を経過した後、周波数 ω_0 の波が出現する。その近似応答が式(302)で与えられる。 $\phi''(\omega_0)$ は

$$\phi''(\omega_0) = \left\{\frac{d}{d\omega}[\phi'(\omega)]\right\}_{\omega=\omega_0} = -x\left[\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{C_g}\right)\right]_{\omega=\omega_0}$$

であるから式(302)は次のようにも書きかえてできる。

$$u(x, t) = f^*(\omega_0) \left\{2\pi \left|x \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{C_g}\right)\right|\right\}^{1/2} \exp\left[i\left(\omega_0 t - kx \pm \frac{\pi}{4}\right)\right] \quad (304)$$

これより群速度の変化が小さい時、大きな応答になることがわかる。この停留位相の

考え方を、丸棒の^縦衝撃応答に應用し、分散曲線、群速度曲線により変動状態を理論的に求めてみよう。観測点を x 、観測時刻を t とする。この時、応答を支配する周波数 ω_0 で式(303)が成立するから $t/x = 1/[C_g]_{\omega=\omega_0}$ の関係を有する。従って t/x の値(又は $[C_g]_{\omega=\omega_0}$ の値)より群速度曲線を用いて波数を求められる。この ω に対する位相速度 c を分散曲線を用いて求めれば $\omega_0 = [\omega C]$ を定めることができる。 (x, t) における変動周期 $T (= \frac{2\pi}{\omega_0})$ が決定される。結局、 (x, t) における T を横軸に t/x 、縦軸に T をとって調べ、整理することができる。この t/x を発生時間 (time of occurrence)、 T を卓越周期 (predominant period) という。便宜のため次の様に標準化してみる。ただし $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ 、 a は丸棒半径とする。

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_g &= C_g/C_0, & \bar{c} &= c/C_0, & \bar{y} &= ak/2\pi \\ \bar{x} &= x/a, & \bar{t} &= t/T, & \bar{T} &= TC_0/a \end{aligned} \right\} \quad (305)$$

そうすると、次の関係が成立つ

$$\bar{C}_g = \bar{x}/\bar{t}, \quad \bar{T} = \frac{1}{\bar{c}\bar{y}} \quad (306)$$

下図より、第一モードについて $0.38 < \bar{C}_g < 1.0$ すなわち $1 < \bar{t}/\bar{x} < 2.64$ である。点Aで $\bar{C}_g = 1, \bar{y} = 0$ であるから $\bar{t}/\bar{x} = 1, \bar{T} = \infty$ 。矢印に従い右奥に向うにつれ \bar{C}_g は減少し

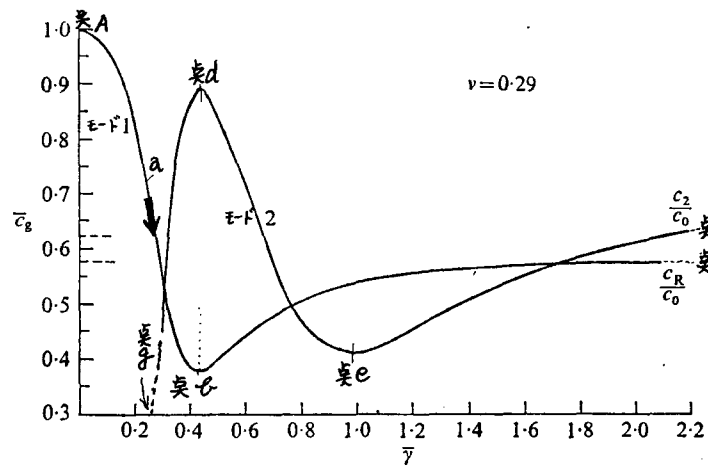


図 59 Group velocity versus wavenumber for the first two longitudinal modes of a circular rod. (After Davies [11, Fig. 13].)

\bar{y} は増加する。この時位相速度 c は右図のように減少するが \bar{y} の影響が大きく \bar{T} は急減する。(図61の \bar{y} を参照)

図59の点 d 前後では \bar{T} の変化はゆるやかで、図61の対応する点 d の上下は水平な曲線と等しい点 d の \bar{t}/\bar{x} は図59の極小群速度 0.38 より、最大値 2.64

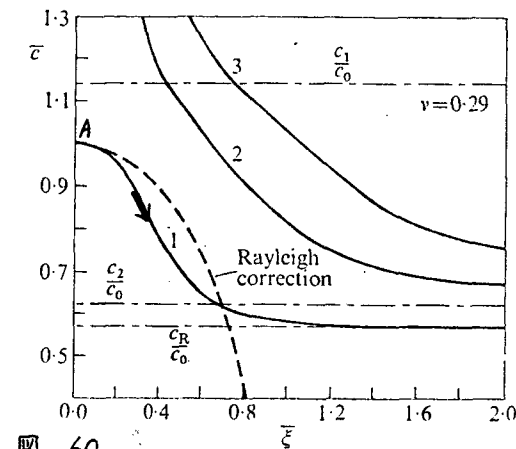


図 60 Dispersion curves for the first three longitudinal modes in a rod.

を得る。この時 $\bar{y} = 0.43$ であるから $\bar{T} = 3.2$ となる。点 d をすぎると $\bar{y} \rightarrow \infty$ にするにつれ群速度は L - L 波速度 C_R に漸近し \bar{t}/\bar{x} の値は 2.64 から C 奥の値の 1.73 になる。この時、図61の様には \bar{T} は 0 に近づいてゆく。この曲線より $1.73 < \bar{t}/\bar{x} < 2.64$ では \bar{T} が2つの

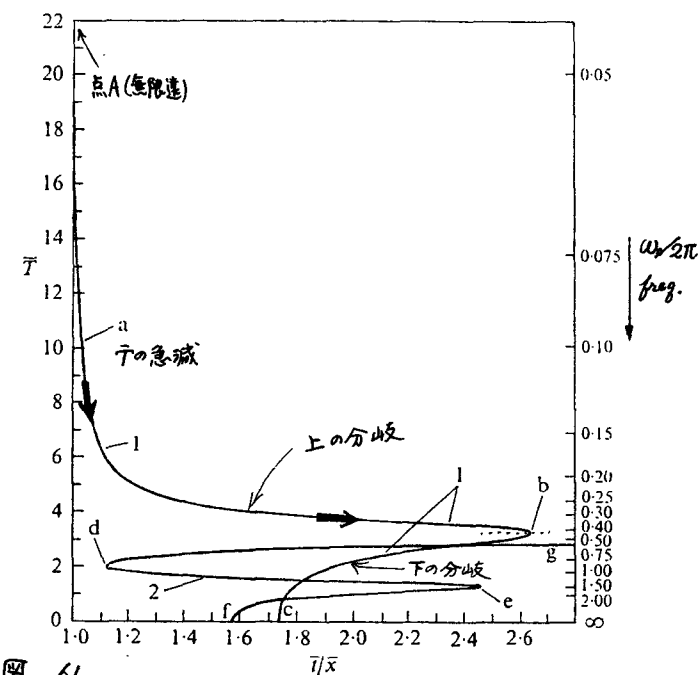


図 61 Period \bar{T} of the dominant group in a bar at a distance \bar{x} and time \bar{t} . (After Davies [11, Fig. 15].)

値をとることに注意されたい。そこで図のように点 d を境にして上の分岐と下の分岐に分ける。第一モードに対しては図59より (\bar{y}, \bar{C}_g) の値は $(0.44, 0.89)_d$ 、 $(1.00, 0.42)_e$ 、 $(\infty, C_R/C_0)_f$ 、 $(0, 0.2)_g$ である。これに対する

$(\bar{t}/\bar{x}, \bar{T})$ は図61の様になり $C_0/C_T < \bar{t}/\bar{x} < 2.44$ では \bar{T} が3つの値をもつ。

さて図61の結果を用いて具体的にある測定点における時間応答の様子を描いてみよう。簡単のため第1モードの波のみを考える。 $\bar{t}/\bar{x}=1$ で応答はじめ、構波速度 C_0 で非常に長い周期の波が到着する。 $\bar{t}/\bar{x}=1.2$ のあたりまで急激に \bar{T} が減少し、しばらくほぼ一定周期(4前後)で変動する。上の分岐に対しては点Aの $\bar{t}/\bar{x}=2.64$ まで応答が持続する。図62参照。下の分岐に対しては $\bar{t}/\bar{x}=1.73$ (点C)で応答はじめ、この時、 $\bar{T} < 0.5$ の高周波成分がほとんど同時に到着する。そして $\bar{t}/\bar{x}=2.64$ になるまで、じょじょに周期がのびて点Bの $\bar{T}=3.2$ に近づいて行き、 $\bar{t}/\bar{x} > 2.64$ では応答を示さない。この第1モードに対し、上の分岐と下の分岐との和として与えられるからその合成結果は図62の一番下の曲線のようになる。点Aの近辺に対しては \bar{T} の変化があまりなく、上の分岐と下の分岐による波の重ね合せなので4.4節で述べたようななり型(beat type)の応答となる。いわゆる波群を構成する。第1モードでは前述のように $0.38 < C_0 < 1$ であるので有限時間1.64しか応答は持続しない。物理量にも

どせば

$$t = \bar{t}x/c. \quad (307)$$

であるから x が大きいほど応答持続時間は比例して長くなる。しかし有限であることには変わらない。現実には、振幅はともかく、一度擾乱をうければいつまでも小さな応答を伴うものであることは経験的に知られている。これは高次モードによるものでたとえば2次モードについて図59の点Aでは群速度が0となり対応する図61の点Aは $\bar{t}/\bar{x} \rightarrow \infty$ のとこにあたる。従って、無限時間応答が続くことになり、その時の周期 \bar{T} は、 $\bar{T} > 2.8$ で一定周波数の変動を示す。

図61, 図62は波動の特性を応答の卓越周波数によって説明するものであって応答の振幅の大きさ等に関するものではない。応答の大きさを求める場合は式(304)に従って求めることができるが、常に正しい近似値が得られるとは限らない。たとえば $f^*(\omega_0)$ の挙動に特異性があったり、 $(dC_0/d\omega)_{\omega_0} = 0$ となったりする時は別の手法によって検討しなければならない。しかし積分評価や級数評価をしないで済み、便利である。

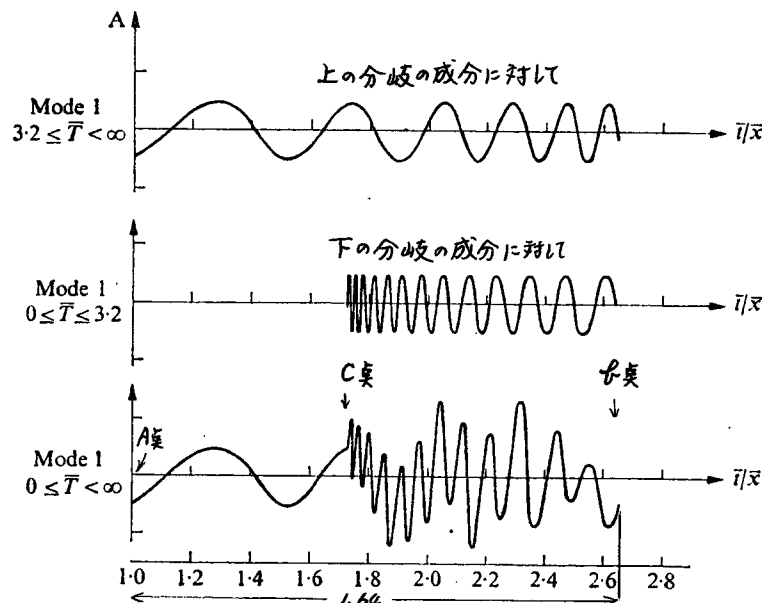


図 62 Nature of the first mode signal arriving at a given location x for changing time.

5.6 停留位相法の補遺 前節で群速度の周波数(もしくは波数)に対する変化が 0 となる場合には別の手法が必要であると述べた。すなわち

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) \exp[i\phi(\omega)] d\omega, \quad \phi(\omega) = \omega t - kx \quad (308)$$

の近似評価として $\phi'(\omega) = 0$ を満たす $\omega = \omega_0$ 近傍の展開により式(304)を得たが、その分母からわかるように $\partial C_g / \partial \omega = 0$ の時無限大となる。これは正しい値なのだろうか。そこで初めの展開式から もとめて吟味してみる必要がある。 k と ω は周波数スペクトル曲線によって関係づけられているから ω の代りに k を積分変数として(308)の代りに次式を考えても同じである。

$$u(x, t) = \int_{\Gamma} F(k) e^{i t h(k)} dk \quad (309)$$

積分路 Γ が実軸に沿い、 t は大きな補助変数と考える。 $h(k)$ は $\{\omega(k) - \frac{kx}{t}\}$ の形をとる。 $h(k)$ を群速度の停留点 k_g まわりで展開する。 k_g は

$$\frac{dC_g}{dk} = \frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{d^2h}{dk^2} = 0 \quad (310)$$

の条件を満たす点として与えられ、 $h(k)$ の展開形は

$$t h(k) = t h(k_g) + (k - k_g) b + (k - k_g)^3 a \quad (311)$$

$$たに、 b = t \left. \frac{dh}{dk} \right|_{k=k_g}, \quad a = \frac{1}{6} t \left. \frac{d^3h}{dk^3} \right|_{k=k_g} \quad (312)$$

したがって式(309)は

$$u(x, t) = e^{i h(k_g) t} F(k_g) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(b\xi + a\xi^3)} d\xi \quad (313)$$

式(313)積分は Airy 関数の積分表示になっている。その定義は

$$(3a)^{-1/3} \pi \text{Ai}[\pm(3a)^{-1/3} \xi] = \int_0^{\infty} \cos[a\xi^3 \pm b\xi] d\xi \quad (314)$$

である。これを用いると

$$u(x, t) = e^{i h(k_g) t} F(k_g) \frac{2\pi}{(3|a|)^{1/3}} \text{Ai}[\pm 3^{-1/3} |a|^{-1/3} |b|] \quad (315)$$

ここに複号は $ab > 0$ の時 +, $ab < 0$ の時 - をとる。この Airy 関数 $\text{Ai}(\cdot)$ は図 63

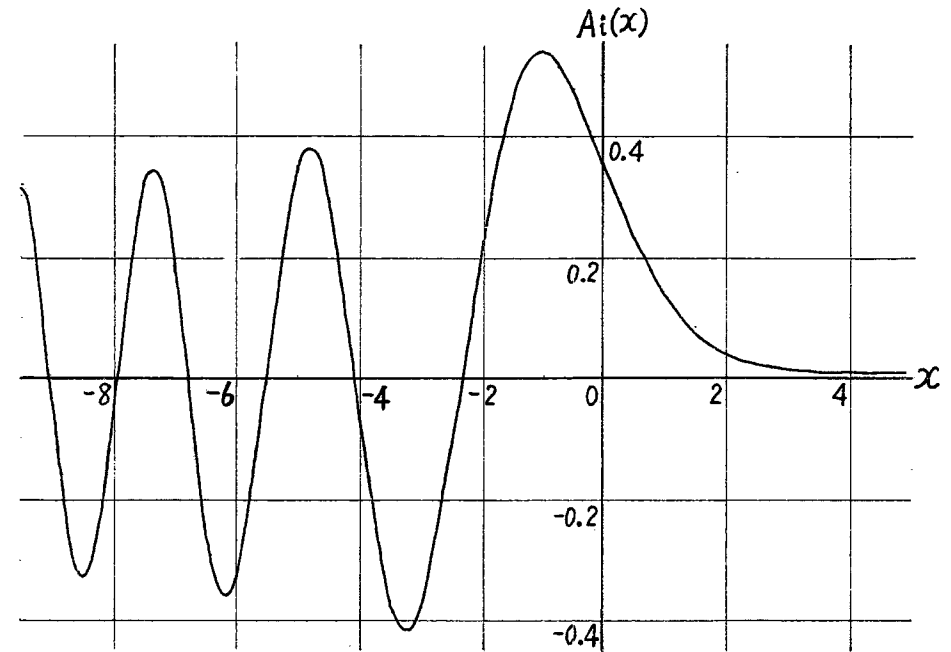


図 63 Airy 関数の変動様相*

の様に変動する関数でベッセル関数とは $\frac{1}{2}$ 次ベッセル関数と関係している。 $\text{Ai}(\cdot)$ は $x = -1$ で最大値 0.53556 をとり x の増加とともに単調に急減する。又、 x を減少させると振幅の少しづつ減少する振動を示す。これらより式(315)は $-3^{1/3} |a|^{-1/3} |b| = -1$ となる所で大きな変動を示す波となる。 Airy 関数は 1 のオーダーの関数であるから、その大きな波は $|a|^{-1/3}$ に比例する。 $x \sim t C_g(k_g)$ だから、このことは $x^{-1/3}$ に比例する。式(304)では $x^{-1/2}$ に比例していたから x の十分離れた測定点での応答は群速度の停留する成分による応答が支配的となることになる。しかしその差は $x^{1/6}$ のオーダーになることから、この程度の違いを考慮すべきかどうかはその問題に応じて検討しなければならないだろう。

* Abramowitz, M., Stegun, I. A., "Handbook of Mathematical Functions" Dover 版の表より作成。(1979.大43)

5.7 漸近展開による積分評価 波動伝ばの問題を積分変換法によって解く

と、よく、次の様な形の積分に帰着されることがある。

$$I(\lambda) = \int_{\Gamma} F(\zeta) e^{-\lambda f(\zeta)} d\zeta \quad (316)$$

ここに Γ は複素平面内の積分路で、補助変数 λ は正実数とする。関数 $f(\zeta)$ を実部と

虚部に分ければ
$$f(\zeta) = g(\xi, \eta) + i h(\xi, \eta) \quad (317)$$

ここに
$$\zeta = \xi + i\eta; \quad \xi, \eta \in \text{Real} \quad (318)$$

しばしば、このような積分を、複素積分などの解析的手法によって閉じた形にすることは不可能となることがある。そこで式(316)の積分の漸近展開法による評価を考えてみよう。一つの条件として λ が非常に大きいとする。その時、関数 $I(\lambda)$ の漸近展開形として

$$I(\lambda) \sim S_N(\lambda) = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{\lambda^n}, \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (319)$$

ただし定数 N に対し
$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^N [I(\lambda) - S_N(\lambda)] = 0 \quad (320)$$

でなければならない。ここで注意しなければならないことはある大きな定めた値 λ に対し N を多くとれば精度(近似)が上がるかということである。これは否定的で発散してしまう。すなわち最適の N が存在する。この例を次に示す。

積分指数関数 $E_i(\cdot)$ は次のように定義される。

$$-E_i(-x) = \int_x^{\infty} \left[\frac{e^{-t}}{t} \right] dt \quad (321)$$

これを部分積分をくり返してゆくと

$$\begin{aligned} -E_i(-x) &= \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^{\infty} \left[\frac{e^{-t}}{t^2} \right] dt \\ &= \frac{e^{-x}}{x} \left[1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{x^n} \right] + (-1)^{n+1} (n+1)! \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{n+2}} dt \end{aligned} \quad (322)$$

この級数は Cauchy の収束判定により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}/x^{n+1}}{a_n/x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{x} \right) \rightarrow \infty \quad (323)$$

で発散する。ただ $n < x$ の時それらしい値に近づいて行く。すなわち x に最も近い項数を取った時に、最も近い値を与えようである。そこで $x=4$ として $-4e^4 E_i(-4)$ の

値を n 項評価すれば表2のよう

になる。厳密値は 0.82533 で

あり最も近づくのは $n=3$ の時で

4%程度の誤差となる。もっと精

度よく近似できないものだろうか。真

の値は $n=3$ と $n=4$ に対する値に

は含まれているから次の様に考えみる。

表2. 級数和による近似

n	n 項の値 (U_n)	n 項までの和 (S_n)
0	1.00000	1.00000
1	-0.25000	0.75000
2	0.12500	0.87500
3	-0.09375	0.78125
4	0.09375	0.87500
5	-0.11719	0.75781
6	0.17579	0.93360
7	-0.31013	0.62347
8	0.62026	1.24373
9	-1.39559	-0.15186

$$T_{n+1} = \frac{S_n + S_{n+1}}{2} = S_n + \frac{1}{2} U_{n+1} \quad (324)$$

そうするとさらによくなり、上式で $n=2$ と 3 に対し 0.82813 を得る。

よく使われる補助定理に Watson のレンマ (Watson's lemma) がある。これは積分

$$I_1(\lambda) = \int_0^a e^{-\lambda \xi} \xi^{\mu} g(\xi) d\xi \quad (325)$$

を近似評価する時に用いられる。 N が負の整数でないとき $g(\xi)$ が

$$g(\xi) = g_0 + g_1 \xi + g_2 \xi^2 + \dots + g_N \xi^N + R_{N+1}(\xi) \quad (326)$$

に書きあらわせたとする。ただし ξ のある区間 $(0, \xi_1)$ で

$$|R_{N+1}(\xi)| < C \xi^{N+1}$$

とするような C が存在するとしている。この時、式(325)の表現は、 $\lambda \rightarrow \infty$ にするにつれ

$$I_1(\lambda) = \sum_{n=0}^N g_n \frac{\Gamma(\mu+n+1)}{\lambda^{\mu+n+1}} + O\left(\frac{1}{\lambda^{\mu+n+2}}\right) \quad (327)$$

となる。 μ は -1 より大きな実数、また $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。また

$$I_2(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} g(\xi) d\xi; \quad g(\xi) \text{ 解析関数.} \quad (328)$$

α とし、 $g(\xi) \sim \sum_{n=1}^{\infty} g_n \xi^{(n/\alpha)-1}$; α は正実数 と展開できるとするとき

$$I_2(\lambda) \approx \sum_{n=1}^{\infty} g_n \Gamma(n/\alpha) \lambda^{-(n/\alpha)} \quad (329)$$

の公式もある。(ただし $|\arg(\lambda)| < \frac{1}{2}\pi - \Delta$; Δ は正の任意数)

次にフーリエ積分形の積分評価に有効な展開がある。ことに興味のあるのは、積分区間端に特異性をもつ被積分関数の場合である。そこで次を考える。

$$I_3(x) = \int_a^b e^{ix\xi} (\xi-a)^{\mu-1} g(\xi) d\xi \quad (330)$$

ここに実変数区間 (a, b) で、すべての実数 x に対して積分値の存在するような可積分関数 $g(\xi)$ を仮定している。 $g(\xi)$ は区間 $a \leq \xi \leq b$ で N 回連続して微分可能であり、また、 $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ のそれぞれに対し $g^{(n)}(b) = 0$ とするならば、 $0 < \mu < 1$ の条件で

$$I_3(x) = -A_N(x) + O(x^{-N}) \quad (x \rightarrow \infty \text{ にしたがって}) \quad (331)$$

と近似できる。ここに

$$A_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+\mu)}{n!} e^{\frac{1}{2}\pi i(n+\mu-2)} g^{(n)}(a) \cdot x^{-n-\mu} e^{ixa} \quad (332)$$

5.8 最急降下法 (Method of Steepest Descents) 複素積分に拡張する前に、

実軸に沿う積分

$$I(\lambda) = \int_a^b F(\xi) e^{-\lambda g(\xi)} d\xi \quad (333)$$

を考えてみよう。関数 $g(\xi)$ が正実数値をとるならば、図64のように大きな λ に対して指

数関数 $e^{-\lambda g(\xi)}$ は、 $g(\xi)$ を極小にする

点 $\xi = \xi_0$ の近傍を除いて、急減する。

従って ξ_0 近辺の積分により $I(\lambda)$ を近

似できるということが理解できる。この

様なある特別な点近傍の評価をする

ことにより複素積分も近似値を得る

ことができる。式(316)で $f(\xi)$ と

$F(\xi)$ は積分路を含む領域で ξ の

解析関数 (analytic function) とし、

λ はある大きな正実数とする。いま、

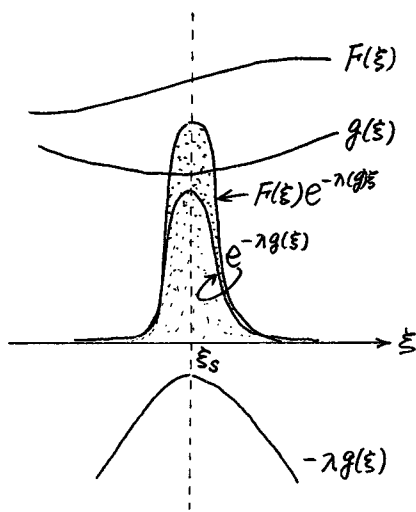


図64: 被積分関数の変動状態

式(317)を(316)に入れれば被積分関数は

$$e^{-\lambda g(\xi, \eta)} \cdot e^{-i\lambda h(\xi, \eta)} F(\xi + i\eta)$$

となり $\xi (= \xi + i\eta)$ の微小変化に対しても、 λ が十分大きければ、 $e^{-i\lambda h(\xi, \eta)}$ による速い振動をひきおこすだろう。そこで、もし ξ の変化に対して関数 $h(\xi, \eta)$ が不変となるように積分路を変換すれば、そのような振動はなくなり、図64で説明した実数積分と同様に局所的積分によって評価できるようになる。さらに $e^{-\lambda g(\xi, \eta)}$ が最も急変するような条件を付加すると積分路の長さ(積分範囲)を最も短くできるだろう。従って、最急降下法による近似解析のもととなる考えは、複素 ξ 面上の積分路 Γ を $h(\xi, \eta)$ が一定で、 $g(\xi, \eta)$ が停留する点 $\xi = \xi_0$ を通る積分路 Γ_0 に変形することである。その点 ξ_0 を求めるには停留条件より

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial g}{\partial \eta} = 0 \quad (334)$$

これは面 $g(\xi, \eta)$ の $\xi = \xi_0$ における接平面が水平であることを示している。もしこの接点 ξ_0 が $g(\xi, \eta)$ の絶対極小(極大)を与えるならば、 $\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} > 0 (< 0)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} > 0 (< 0)$ が同時に成立しなければならないが、 $g(\xi, \eta)$ は最初に述べたように解析関数(調和関数)として

いるから $\frac{\partial^2 g}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} = 0$ であり、絶対極小(極大)にはなり得ない。従って式(334)を満足する ξ_0 は図65に示す

ような鞍点になる。そのため、本手法を鞍点法 (saddle point method) と呼んでいる。 f が解析的だからコーシー-リーマンの条件が成立し

$$\frac{\partial g}{\partial \xi} = \frac{\partial h}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial g}{\partial \eta} = -\frac{\partial h}{\partial \xi} \quad (335 a, b)$$

上式と式(334)より

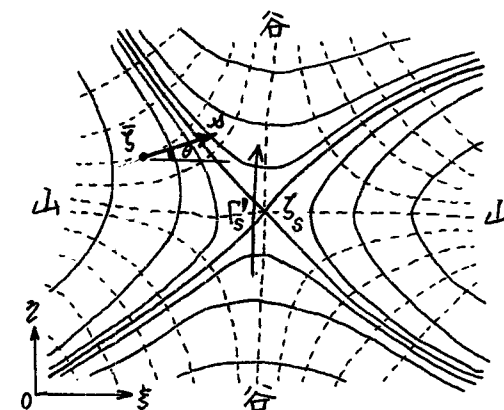


図65. $-\lambda g(\xi, \eta)$ 面の等高線(実線)。点線は $h(\xi, \eta) = \text{一定}$ の線で実線に直交する。複素 ξ 面上のレリーフともいう

$$\frac{df}{d\xi} = 0 \quad (336)$$

を満足する点として ξ_s が決まる。ここで $n = \text{一定}$ の線(図で点線)が面 $g(\xi, \eta)$ の傾斜の最大となる方向であることを示す。任意点 $\xi = \bar{\xi}$ において ξ 軸と角 θ をなす方向に局所座標 α をとると

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha} = \frac{\partial g}{\partial \xi} \cos \theta + \frac{\partial g}{\partial \eta} \sin \theta \quad (\xi = \bar{\xi} \text{ において}) \quad (337)$$

もし変数 θ に対して $\partial g / \partial \alpha$ が最大ならば(最大傾斜ならば) θ で微分して 0 だから

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right) = -\frac{\partial g}{\partial \xi} \sin \theta + \frac{\partial g}{\partial \eta} \cos \theta = 0 \quad (338)$$

コーシー・リーマンの条件、式(335)を用いると、上式は

$$-\frac{\partial h}{\partial \eta} \sin \theta - \frac{\partial h}{\partial \xi} \cos \theta = -\frac{\partial h}{\partial \alpha} = 0 \quad (339)$$

すなわち α の変化に対して h の変化がない($n = \text{一定}$)。ところで $\bar{\xi}$ は任意であったから常に n は最急降下の線では一定となる。積分評価にはこのうち ξ_s を通るものを用いる。すなわち、積分路 Γ を、 $-\lambda$ を考慮して描いた図65において谷から谷へ ξ_s を通る $n = \text{一定}$ の積分路 ξ_s' に変形する。この際、近くに極などがあることはない。いま ξ_s' に沿う ξ の関数となった $f(\xi)$ を鞍点 ξ_s まわりでテーラ級数に展開する。

$$\begin{aligned} -\lambda f(\xi) &= \{f_0 + (\xi - \xi_s) f_1 + \frac{1}{2} (\xi - \xi_s)^2 f_2 + \dots\} (-\lambda) \\ &::: f_n = \left. \frac{d^n f}{d\xi^n} \right|_{\xi = \xi_s} \end{aligned} \quad (340)$$

ξ_s は停留点だから $f_1 = 0$ である。2次の項までとって

$$-\lambda(f(\xi) - f_0) = -\frac{\lambda}{2} (\xi - \xi_s)^2 f_2$$

ξ_s' に沿っては鞍点における $-\lambda f$ が最大であること、また $n = \text{一定}$ より右辺が実数となることより右辺は負になる。そこで実変数 t を

$$\frac{1}{2} (\xi - \xi_s)^2 f_2 = t^2 \quad (341)$$

によって導入すると式(316)は

$$I = e^{-\lambda f_0} \int_{\xi_s} F(\xi) e^{-\lambda t^2} \frac{d\xi}{dt} dt \quad (342)$$

となる。 $t=0$ (すなわち $\xi = \xi_s$) の前後では指数関数的に急減するから

$$I = e^{-\lambda f_0} F(\xi_s) \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} e^{-\lambda t^2} \frac{d\xi}{dt} dt \quad (343)$$

ただし $F(\xi)$ は $\xi = \xi_s$ 近くに特異性があることはない。ある場合には特異性を取りのぞく手法が必要である。いま $\xi - \xi_s = \rho e^{i\theta_s}$ と書けば式(341)より実数なので

$$\arg \left[\frac{1}{2} f_2 e^{2i\theta_s} \right] = 0 \quad (345)$$

これより θ_s が決まる。また ρ も

$$\rho = t \left| \frac{1}{2} f_2 \right|^{-1/2} \quad (346)$$

と求められ、(344)(346)より、 $d\xi/dt$ の計算ができるので式(344)は

$$I \sim e^{-\lambda f_0} F(\xi_s) \frac{e^{i\theta_s}}{\left| \frac{1}{2} f_2 \right|^{1/2}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\lambda t^2} dt$$

積分範囲を $\pm\infty$ に拡大すれば ϵ -近似的として

$$I \sim \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^{1/2} \cdot \frac{F(\xi_s)}{|f_2|^{1/2}} \cdot e^{-\lambda f_0 + i\theta_s} \quad (347)$$

を見い出せる。

停留位相法とこの最急降下法(鞍点法)は本質的には等価な手法であり、ここで用いた $n = \text{一定}$ の条件のかわりに $g = \text{一定}$ の条件を与え積分路として、その時 $\xi = \xi_s$ を通るものを用いれば停留位相法となる。

6. 調和変動荷重を受ける弾性体

ごく基本的な動弾性問題を考えることによって、後章で述べる衝撃応答解析への橋渡しをする。そのためには、外荷重が空間的または時間的に調和関数で与えられる定常応答問題がよい。前章まで論じて来た自由波の特性は、今後の境界値問題解析結果を説明する上で重要となる。

6-1. 周期的に分布する荷重の強制調和振動

右図に示すような半無限体の表面に周期的変動荷重が作用する時を考える。この問題を解く過程には、動弾性解析によく見られる考え方や、基本的手法が含まれているので、他の複雑な現象解析へ発展させる手はじめとする。

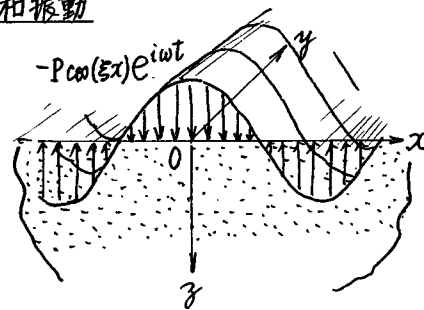


図6-1 半無限体に調和荷重

二次元直角座標系 (x, z) によって与えられる平面ひずみ問題と考える。すなわち $z=0$ の xy 面が半無限体の表面とし、そこに作用する荷重は、 z 座標に関しては一定であり、 x 座標に関しては周期的に分布し、時間的に $e^{i\omega t}$ で変動するものとする。この時の境界条件は表面が滑らかであるとすれば

$$\sigma_z = -P \cos(\xi x) e^{i\omega t} \quad (z=0 \text{ で}) \quad (6-1)$$

$$\tau_{xz} = 0 \quad (z=0 \text{ で}) \quad (6-2)$$

と書ける。空間的分布の周期は $2\pi/\xi$ であり、時間変動の周期は $2\pi/\omega$ である。P は外荷重の振幅を与える。実際には、もっと複雑な荷重となるのが普通であるが、フーリエ展開成分になっていることから、これらの調和荷重解析の重ね合せ(級数和あるいは積分)により、実際の場合の動的応答が解明できる。式(1)(2)の境界条件のほか、解析を進めるうえで考慮すべき物理的条件として無限遠 ($z \rightarrow +\infty$) で

べての変位成分と応力成分が有限になることと、荷重の作用点から十分離れた点では擾乱 (disturbance) が外向きの波、すなわち時間とともに位相面が無限遠方へ向って行く波からなる という二つの条件を与える。これらの条件は前者を有限性の条件 (finiteness condition)、後者を放射の条件 (radiation condition) と言う。

基礎式と形式解の誘導について考えてみよう。レ-レ波の伝ばの解析で用いた変位ポテンシャル ϕ と ψ を用いると便利である。

$$u = \phi_{,x} + \psi_{,z} \quad (6-3) \quad w = \phi_{,z} - \psi_{,x} \quad (6-4)$$

コンマと次の下添字はその座標変数による偏微分を表わし(たとえば $\frac{\partial \phi}{\partial z} = \phi_{,z}$ など) ている。これらのポテンシャルは波動方程式

$$\phi_{,xx} + \phi_{,zz} = \frac{1}{c_l^2} \phi_{,tt} \quad (6-5) \quad \psi_{,xx} + \psi_{,zz} = \frac{1}{c_t^2} \psi_{,tt} \quad (6-6)$$

を満たす。従って ϕ と ψ の一般解を上式より求め、式(1)(2)の境界条件の考慮しやすい形で選べばよい。手順をふんで変数分離の方法により解を導いてもできるが、ここでは境界条件の形からいきなり次のような解形を仮定してみる。

$$\phi = \Phi \cdot e^{i\omega t} \cos \xi x \quad (6-7) \quad \psi = \Psi \cdot e^{i\omega t} \sin \xi x \quad (6-8)$$

式(7)を(5)に代入すると

$$-\omega^2 \Phi \cdot e^{i\omega t} \cos \xi x = c_l^2 (-\xi^2 \Phi \cdot e^{i\omega t} \cos \xi x + \Phi_{,zz} \cdot e^{i\omega t} \cos \xi x)$$

$$-\omega^2 \Phi = -c_l^2 \xi^2 \Phi + c_l^2 \Phi_{,zz}$$

したがって

$$\Phi_{,zz} - k_l^2 \Phi = 0 \quad ; \quad k_l^2 = \xi^2 - \frac{\omega^2}{c_l^2} \quad (6-9)$$

と整理できる。一方 ψ についても式(6)(8)より

$$\Psi_{,zz} - k_t^2 \Psi = 0 \quad ; \quad k_t^2 = \xi^2 - \frac{\omega^2}{c_t^2} \quad (6-10)$$

式(9)(10)は常微分方程式となっている。これを解けば

$$\Phi = Ae^{-k_1 z} + \bar{A}e^{k_1 z} \dots (6-11), \quad \Psi = Be^{-k_1 z} + \bar{B}e^{k_1 z} \dots (6-12)$$

ところで半無限弾性体内の $z \rightarrow +\infty$ で、これらの変位ポテンシャルは少なくとも有限値とならなければならないことより

$$\operatorname{Re}[k_1] \geq 0, \quad \operatorname{Re}[k_1] \geq 0 \quad (6-13)$$

$$\text{のちでは} \quad \bar{A} = \bar{B} = 0 \quad (6-14)$$

でなければならない。この時、たとえば式(11)を(7)に入れてみれば

$$\phi = A \cdot e^{-(k_1 z - i\omega t)} \cdot \cos \xi x \quad (6-15)$$

となるからもう一つの物理的条件の放射の条件を満たすためには

$$\operatorname{Im}[k_1] \geq 0, \quad \text{同様に} \quad \operatorname{Im}[k_1] \geq 0 \quad (6-16)$$

となるものを選ぶ。^(*) 以上より、 k_1 と k_1 の多価性は一面となり、具体的に書けば

$$\begin{aligned} \xi^2 \geq \frac{\omega^2}{c_1^2} \text{ の時 } k_1 &= \sqrt{\xi^2 - (\omega/c_1)^2} \\ \xi^2 < \frac{\omega^2}{c_1^2} \text{ の時 } k_1 &= i\sqrt{(\omega/c_1)^2 - \xi^2} \\ \xi^2 \geq \frac{\omega^2}{c_1^2} \text{ の時 } k_1 &= \sqrt{\xi^2 - (\omega/c_1)^2} \\ \xi^2 < \frac{\omega^2}{c_1^2} \text{ の時 } k_1 &= i\sqrt{(\omega/c_1)^2 - \xi^2} \end{aligned} \quad (6-17)$$

の値をとる。結局、得られる解の形は k_1, k_1 を式(17)で与えるならば

$$\phi = A \cdot e^{-(k_1 z - i\omega t)} \cdot \cos \xi x \quad (6-18)$$

$$\psi = B \cdot e^{-(k_1 z - i\omega t)} \cdot \sin \xi x \quad (6-19)$$

(*) 式(15)を例にとれば、式(16)の条件のもとで位相面は $[k_1 z - \omega t]$ となる。このとき、時間経過とともに z の値が大きくなると一定値を保つことができる。
const.

もっと厳密には、放射の条件は、荷重の作用する点から遠ざかる方向にエネルギーが広がっていくという考察から群速度が一定符号を保つような k_1 の分岐を選ぶことである。本問の場合は位相面だけの動きによって k_1 の分岐が決まるが、系が複雑になると周波数スペクトルによって検討しなければならない。

境界条件を考慮してポテンシャル ϕ と ψ を決定してみよう。式(18)(19)を偏微分して

$$\begin{aligned} \phi_{,xz} &= k_1 \xi \cdot A e^{-(k_1 z - i\omega t)} \sin \xi x, & \psi_{,xz} &= -k_1 \xi \cdot B e^{-(k_1 z - i\omega t)} \cos \xi x \\ \phi_{,xx} &= -\xi^2 A e^{-(k_1 z - i\omega t)} \cos \xi x, & \psi_{,xx} &= -\xi^2 B e^{-(k_1 z - i\omega t)} \sin \xi x \\ \phi_{,zz} &= k_1^2 A e^{-(k_1 z - i\omega t)} \cos \xi x, & \psi_{,zz} &= k_1^2 B e^{-(k_1 z - i\omega t)} \sin \xi x \end{aligned} \quad (6-20)$$

ところで式(4)の定義より、応力成分をポテンシャル表示すれば

$$\tau_{zx} = G(\omega_{,x} + u_{,z}) = G(2\phi_{,xz} - \psi_{,xx} + \psi_{,zz}) \quad (6-21)$$

$$\sigma_z = \lambda(\omega_{,z} + u_{,x}) + 2G \frac{\partial \omega}{\partial z} = \lambda(\phi_{,xx} + \phi_{,zz}) + 2G(\phi_{,zz} - \psi_{,xz}) \quad (6-22)$$

$$\sigma_x = \lambda(\omega_{,z} + u_{,x}) + 2G \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda(\phi_{,xx} + \phi_{,zz}) + 2G(\phi_{,xx} + \psi_{,xz}) \quad (6-23)$$

であるから、式(20)により

$$\tau_{zx} = G\{2k_1 \xi A e^{-k_1 z} + (\xi^2 + k_1^2) B e^{-k_1 z}\} e^{i\omega t} \sin \xi x \quad (6-24)$$

$$\sigma_z = [\{\lambda(k_1^2 - \xi^2) + 2Gk_1^2\} A e^{-k_1 z} + 2Gk_1 \xi B e^{-k_1 z}] e^{i\omega t} \cos \xi x \quad (6-25)$$

$$\sigma_x = [\{\lambda(k_1^2 - \xi^2) - 2G\xi^2\} A e^{-k_1 z} - 2Gk_1 \xi B e^{-k_1 z}] e^{i\omega t} \cos \xi x \quad (6-26)$$

境界条件式(1)(2)より

$$[\tau_{zx}]_{z=0} = G\{2k_1 \xi A + (\xi^2 + k_1^2) B\} e^{i\omega t} \sin \xi x = 0$$

$$\text{従って} \quad 2k_1 \xi A + (\xi^2 + k_1^2) B = 0 \quad (6-27)$$

$$\text{また、} [\sigma_z]_{z=0} = [\{\lambda(k_1^2 - \xi^2) + 2Gk_1^2\} A + 2Gk_1 \xi B] e^{i\omega t} \cos \xi x = -P \cos \xi x \cdot e^{i\omega t}$$

$$\text{従って} \quad \{\lambda(k_1^2 - \xi^2) + 2Gk_1^2\} A + 2Gk_1 \xi B = -P \quad (6-28)$$

ところで $\{\lambda(k_1^2 - \xi^2) + 2Gk_1^2\} = G(\xi^2 + k_1^2)$ の関係が成立つから式(28)は

$$(\xi^2 + k_1^2) A + 2k_1 \xi B = -P/G \quad (6-29)$$

式(27)(28)を連立させて A, B を求めると

$$A = -\frac{P}{G\Delta}(\xi^2 + k_T^2) \quad (6-30)$$

$$B = \frac{P}{G\Delta} \cdot 2k_L\xi \quad (6-31)$$

$$\Delta = (\xi^2 + k_T^2)^2 - 4k_Lk_T\xi^2 \quad (6-32)$$

結局、式(30)(31)を式(18)(19)に入れて、ポテンシャルは

$$\phi = -\frac{P}{G\Delta}(\xi^2 + k_T^2) \cdot e^{-(k_Lz - i\omega t)} \cos \xi x \quad (6-33)$$

$$\psi = \frac{P}{G\Delta} \cdot 2k_L\xi \cdot e^{-(k_Lz - i\omega t)} \sin \xi x \quad (6-34)$$

式(33)(34)を(3)(4)に入れば変位が、(21)-(23)に入れば応力が求まる。各自の練習問題として具体的にこの変位と応力の表示式を求めてみよう。導出される解は時間に関して $e^{i\omega t}$ の形で入っており、その係数の絶対値をとれば分布する変位や応力の時間変動に対する振幅が定まる。

境界条件を満たすポテンシャル解(33)(34)の意味をしてみよう。この解は Δ が 0 となる時、変位や応力分布状態が無限大となり不安定となる。式(32)を変形してしる。

$$\Delta = (\xi^2 + k_T^2)^2 - 4k_Lk_T\xi^2$$

$$\Delta = \xi^4 \left\{ \left(1 + \frac{k_T^2}{\xi^2}\right)^2 - 4\frac{k_Lk_T}{\xi^2} \right\}$$

$$\Delta = \xi^4 \left[\left\{ 2 - \left(\frac{\omega}{\xi C_T}\right)^2 \right\}^2 - 4\sqrt{\left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\xi C_T}\right)^2 \right\} \left\{ 1 - \alpha_1^2 \left(\frac{\omega}{\xi C_T}\right)^2 \right\}} \right]$$

ここに $\alpha_1 = C_T/C_L$ である。ここで $\xi \rightarrow f$, $\omega^2/C_T^2 \rightarrow K$ におきかえてみれば

$$\Delta = f^4 \left\{ \left(2 - \frac{K^2}{f^2}\right)^2 - \left[16 \left(1 - \frac{K^2}{f^2}\right) \left(1 - \alpha_1^2 \frac{K^2}{f^2}\right) \right]^{1/2} \right\} \quad (6-35)$$

式(35)の $\{ \}$ の中は式(124)の両辺の平方根をとり、右辺から左辺を引いたものになっている。すなわち式(124)の等号が成立つ時に $\Delta = 0$ となる。このことからレー方程式の根に対応する $K (= \omega/C_T)$ のとき、本問のような半無限体は応答に特異性を示す。たとえ、 ω がこの特異状態(振幅が理論上、無限大となる状態)を与える値でなくとも、その

近頃の ω に対しては、非常に大きな挙動を示すことになる。すなわち、 ω/ξ の値を変えて応答振幅をグラフにした時、グラフに描かれる曲線の変動状態は、(その時、その時の計算値は外荷重の大きさによって定量的に定まるものであるけれども)、レー方程式の根(ω/ξ)によって性格づけられる。

次に、式(17)からわかるように、 k_L と k_T は ξ と ω の値により純実数であったり純虚数であったりした。これは現象的にはどのような状態を与える場合に対応するのか考えてみよう。有限性の条件と放射の条件から、式(13)(16)のように分岐を選ぶ過程から理解されるが、 k_L または k_T が実数の場合には指数関数的に深さ方向に関して振幅が減衰してゆくことを示している。与えた応力は表面で自己平衡状態であるから $z \rightarrow +\infty$ では応答は 0 になる。 k_L または k_T が虚数のときは、 z をいくら大きくしても変動振幅は、境界表面におけるものと同じになり、減衰しない。この状態は ω の大きい場合、もしくは空間的な境界面における分布周期が、単位時間に伝播する波の距離に比べて大きい場合に生ずる。 k_L または k_T が虚数であっても、もし減衰するならば、それは、本問のように二次元問題に理想化できないか、あるいは均質な完全な弾性体と見せない場合における現象と考えられる。

6-2. 球形空洞内の周期的変動圧による応答 線形弾性問題の特長である

重ね合せによる解法を動的弾性問題に用いた一つの例を示そう。この節では、解析に級数を用いている。これは問題を解析のしやすい成分に分割し、各成分に対する解を求め、その後それらの解を重ね合せるという手法を用いるためである。級数に限らず積分形による解析も考え方は同じで積分変換して解析しやすい空間で境界条件をあわせ逆変換(積分)することに対応する。このような重ね合せ(級数和や積分)が解析の流れの中で理解できれば高度な複雑な解析でも物理的意味がつかみやすくなる。

半径 a の球形空洞が無限弾性体に一つあるとする。この空洞内壁に時間の周期関数として与えられる圧力 $p(t)$ が作用したときの動的変位分布や動的応力分布がどのようになるかを解析する。いま座標系として球座標系 (r, θ, ϕ) を用いるが、点対称性より空間的には r 座標のみに依存する問題とする。境界条件は内壁 $(r=a)$ で

$$\sigma_r = -p_0 f(t) = P(t) \quad (6-36)$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (6-37)$$

ここに $f(t)$ は図6-3に示したような鋸歯状周期を有するとする。式(36)の p は、大きさを示す定数で、周期を T とする。

さて、後の解析の便宜のために式(36)を級数展開する。本問では、内圧が周期的に働くから、弾性体を構成している微小

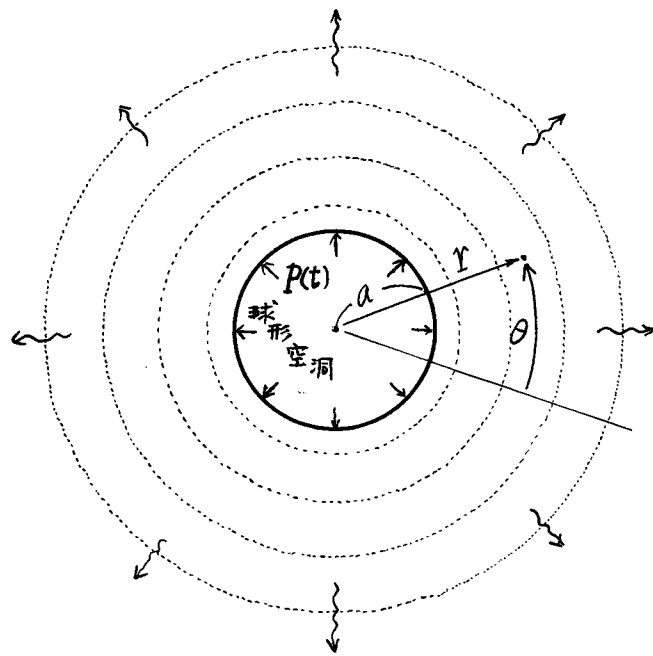


図6-2 ; 内圧を受ける時に生ずる放出波.

要素も周期的に運動しているはずである。したがって、その運動は調和振動の重ね合せで表現できると考えられる。すなわち、時間に関してフーリエ級数形になるとして、境界条件もフーリエ級数形で与えれば、次の調和バラス法が使える。

$$\sum_{n=1}^N a_n \begin{pmatrix} \sin n\pi x \\ \cos n\pi x \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^N b_n \begin{pmatrix} \sin n\pi x \\ \cos n\pi x \end{pmatrix}$$

であるとき、とりうるすべての n の値に対し $a_n = b_n$ が成立する。図6-3より

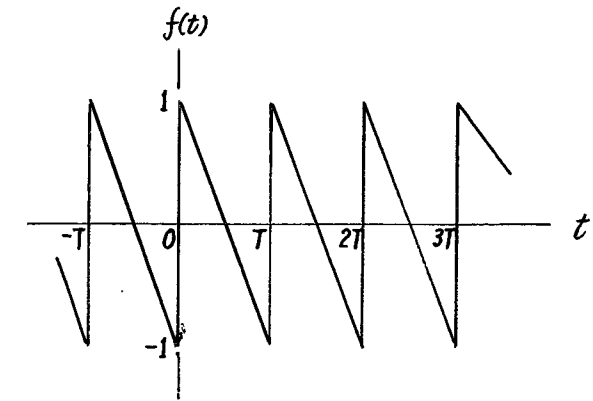


図6-3 ; 関数 $f(t)$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \quad (6-38)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt \quad (6-39)$$

の展開形となる。 $f(t)$ は明らかに奇関数であるからフーリエ展開理論より \cos の成分はない。 t が 0 と T の間にあるときの $f(t)$ は

$$f(t) = 1 - \frac{2}{T}t \quad (0 < t < T) \quad (6-40)$$

$$(39)(40)より \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{2t}{T}\right) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt = \frac{2}{n\pi} \quad (6-41)$$

$$したがって \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) = \frac{2}{\pi} \left(\sin\frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{2} \sin\frac{4\pi t}{T} + \frac{1}{3} \sin\frac{6\pi t}{T} + \dots \right) \quad (6-42)$$

式(42)に $-p_0$ を乗ずれば本問の境界条件の展開形となる。線形問題であるから、各項に対する解を求め、最終的に総和をとればよいから、いま、次のような第 n 項に対する境界条件

$$[\sigma_r^{(n)}]_{r=a} = -\frac{2p_0}{n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) = \zeta \sin \xi t \quad ; \quad \zeta = -\frac{2p_0}{n\pi}, \quad \xi = \frac{2n\pi}{T}, \quad (6-43)$$

$$[\tau_{r\theta}^{(n)}]_{r=a} = 0 \quad (6-44)$$

を満足する解を求めればよい。

点対称問題であるから 0 とならない変位成分は半径方向変位の u のみである。変位ポテンシャル ϕ を導入して u を次のように表わせるものと定義する。

$$u = \phi_{,r} \quad (6-45)$$

対称性より、せん断変形は生じないからポテンシャル ψ は考える必要はない。 ϕ は次の波動方程式を満足するわけではない。

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2} \quad (6-46)$$

同様の式は式(30)(8頁)にも出て来ている。式(46)の一般解形を求めてもよいが式(43)の境界条件の形から解形を手測すれば容易に出来る。波動方程式の解は

$$r\phi = f(r-C_L t) + g(r+C_L t) \quad (6-47)$$

で与えられることはすでに学んだ。そこで $r=a$ で境界条件を与える式(43)の形より

$$\phi = \frac{1}{r} \left\{ A \cdot \sin \left[\frac{\xi}{C_L} (r-C_L t - a) \right] + B \cdot \cos \left[\frac{\xi}{C_L} (r-C_L t - a) \right] \right\} \quad (6-48)$$

これは $r=a$ で三角関数の引数が ξt となり、かつ式(47)の右辺第1項の放射波となる条件を考えあわせて作ったものである。式(43)では \sin の項のみであるのに対し、式(48)で \cos の項も有していることに注意されたい。 A と B は境界条件によって決定される定数である。さて、ポテンシャル ϕ によって応力成分を表現すれば

$$\sigma_r = (\lambda+2G)u_{,r} + 2\lambda u/r = (\lambda+2G)\phi_{,rr} + 2\lambda\phi_{,r}/r, \quad (6-49)$$

$$\sigma_\theta = \lambda u_{,r} + 2(\lambda+G)u/r = \lambda\phi_{,rr} + 2(\lambda+G)\phi_{,r}/r, \quad (6-50)$$

ここで $\phi_{,r}$ と $\phi_{,rr}$ を式(48)より求めておく。

$$\phi_{,r} = -\frac{1}{r^2} (A \sin H + B \cos H) + \frac{1}{r} \left(\frac{\xi}{C_L} \right) (A \cos H - B \sin H) \quad (6-51)$$

$$\phi_{,rr} = \frac{2}{r^3} (A \sin H + B \cos H) - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\xi}{C_L} \right) (A \cos H - B \sin H) - \frac{1}{r} \left(\frac{\xi}{C_L} \right)^2 (A \sin H + B \cos H) \quad (6-52)$$

ただし $H \equiv (r-C_L t - a)\xi/C_L$ である。これらの式を(49)に代入すると、

$$\sigma_r^{(m)} = \left\{ \frac{4G}{r^3} - \frac{1}{r} \left(\frac{\xi}{C_L} \right)^2 (\lambda+2G) \right\} (A \sin H + B \cos H) - \frac{4G\xi}{r^2 C_L} (A \cos H - B \sin H) \quad (6-53)$$

境界 $r=a$ では、 $\gamma_1 = \frac{1}{a^3} \left\{ 4G - \left(\frac{a\xi}{C_L} \right)^2 (\lambda+2G) \right\}$, $\gamma_2 = -\frac{4G\xi}{a^2 C_L}$ とおくと

$$[\sigma_r^{(m)}]_{r=a} = \gamma_1 (-A \sin \xi t + B \cos \xi t) + \gamma_2 (A \cos \xi t + B \sin \xi t) = \xi \sin \xi t \quad (6-54)$$

\sin の項の係数、 \cos の項の係数に対して等号が成り立たなければならぬことから A, B は

$$A = -\frac{\gamma_1 \xi}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad B = \frac{\gamma_2 \xi}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \quad (6-55)(6-56)$$

従って、 ϕ は式(48)より

$$\phi = \frac{1}{r} \cdot \frac{\xi}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} (-\gamma_1 \sin H + \gamma_2 \cos H) \quad (6-57)$$

また式(53)より

$$\sigma_r^{(m)} = \frac{\xi}{r(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} \left\{ \left[\frac{4G}{r^2} - \left(\frac{\xi}{C_L} \right)^2 (\lambda+2G) \right] (-\gamma_1 \sin H + \gamma_2 \cos H) + \frac{4G\xi}{r C_L} (\gamma_1 \cos H + \gamma_2 \sin H) \right\} \quad (6-58)$$

ξ, γ_1, γ_2 はいずれも r に依存する値であり、本問に対する解は $n=1$ から $n=\infty$ までの総和で与えられる。

$$\sigma_r = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_r^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\xi}{r(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} \left\{ \left[\frac{4G}{r^2} - \left(\frac{\xi}{C_L} \right)^2 (\lambda+2G) \right] (\gamma_1 \sin H - \gamma_2 \cos H) - \frac{4G\xi}{r C_L} (\gamma_1 \cos H + \gamma_2 \sin H) \right\} \quad (6-59)$$

上式は無級数形で、解析的に閉じた形にならない場合、有限項までの和をとって近似値とする。

この時、 $r=a$ における境界条件が工学的に十分な精度で与えられているかどうかを確かめることを忘れてはならない。周方向応力 σ_θ は式(50)を用いて σ_r と同じ手順で求める。これは練習問題として残しておく。半径方向変位 u は式(45)と(57)より

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi}{r(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} \left\{ \frac{1}{r} (\gamma_1 \sin H - \gamma_2 \cos H) - \frac{\xi}{C_L} (\gamma_1 \cos H + \gamma_2 \sin H) \right\} \quad (6-60)$$

本節では時間変数 t に関するフーリエ級数形をとって解析する手法を述べたが、これは空間座標変数について周期性を有する問題であつてもよい。ただ問題となるのは級数解を得た後で数値的に総和する時に、級数の収束性が良いか悪いかにかかってくることで、一般に不連続箇所(たとえば図6-3の $t = nT$ の所)における値を求める時の級数の収束性が悪くなる。しかし、電子計算機の発達した現在では、工学的精度を得ることは適切な手法を考えることにより、多くの場合困難ではない。

6-3. 円柱空洞内の周期的変動圧による応答

右図のような円柱座標系をとり円柱空洞周囲の動的応答を考える。内壁に調和変動圧力が作用するものとして、Z軸対称の平面ひずみ問題とする。この時、変位ポテンシャルφを

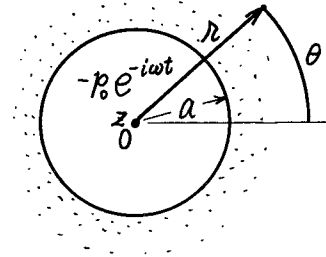


図6-4; 円柱空洞

$$u = \phi, r \quad (6-61)$$

で導入すれば場の方程式は

$$\phi, rr + \frac{1}{r} \phi, r = \frac{1}{c^2} \phi, tt \quad (6-62)$$

$r/a \equiv R$ で標準化すれば

$$\phi, RR + \frac{1}{R} \phi, R = \frac{a^2}{c^2} \phi, tt \quad (6-63)$$

本問に關係する応力成分をφで表示すれば

$$\sigma_r = \lambda(u, r + \frac{1}{r}u) + 2G u, r = [\lambda(\phi, RR + \frac{1}{R}\phi, R) + 2G\phi, RR] / a^2 \quad (6-64)$$

$$\sigma_\theta = \lambda(u, r + \frac{1}{r}u) + 2G u / r = [\lambda\phi, RR + (\lambda+2G)\frac{1}{R}\phi, R] / a^2 \quad (6-65)$$

$$\sigma_z = \lambda(u, r + \frac{1}{r}u) = [\lambda(\phi, RR + \frac{1}{R}\phi, R)] / a^2 \quad (6-66)$$

ここで式(63)の一般解を求める。いま境界条件を

$$[\sigma_r]_{r=a} = -p_0 e^{-i\omega t} \quad (6-67)$$

とすれば、ポテンシャルφ(R, t)の形は

$$\phi = \Phi(R) e^{-i\omega t} \quad (6-68)$$

よって時間変数を分離できる。式(68)を式(63)に代入して

$$\Phi, RR + \frac{1}{R}\Phi, R + k_i^2 \Phi = 0 \quad ; \quad k_i = a\omega/c_i \quad (6-69)$$

これはベッセルの微分方程式であるから一般解は、ハンケル関数により

$$\Phi(R) = A \cdot H_0^{(1)}(k_i R) + B H_0^{(2)}(k_i R) \quad (6-70)$$

$$\text{従って} \quad \phi = \{A H_0^{(1)}(k_i R) + B H_0^{(2)}(k_i R)\} e^{-i\omega t} \quad (6-71)$$

ここで無限遠の状態を調べてみる。 $k_i R \rightarrow \infty$ とした時の $H_0^{(1)}(\cdot)$, $H_0^{(2)}(\cdot)$ は

$$H_0^{(1)}(k_i R) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_i R}} e^{i(k_i R - \frac{\pi}{4})}, \quad H_0^{(2)}(k_i R) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi k_i R}} e^{-i(k_i R - \frac{\pi}{4})}$$

であるから $R \rightarrow \infty$ における式(71)の挙動を指数部に注意して調べれば

$$A H_0^{(1)}(k_i R) e^{-i\omega t} \sim A \sqrt{\frac{2}{\pi k_i R}} e^{i(k_i R - \omega t - \frac{\pi}{4})} \Rightarrow \text{無限遠に広がってゆく波}$$

$$B H_0^{(2)}(k_i R) e^{-i\omega t} \sim B \sqrt{\frac{2}{\pi k_i R}} e^{i(-k_i R - \omega t + \frac{\pi}{4})} \Rightarrow \text{原点に収束する波}$$

がわかる。これより放射の条件を満足する前者をとれば、形式解は

$$\phi = A H_0^{(1)}(k_i R) e^{-i\omega t} \quad (6-72)$$

となる。これを式(64)に入れて

$$\sigma_r = \frac{1}{a^2} A \cdot k_i \{2G \frac{1}{R} H_1^{(1)}(k_i R) - (\lambda+2G) k_i H_0^{(1)}(k_i R)\} e^{-i\omega t} \quad (6-73)$$

ここで式(67)の境界条件を考慮すれば、Aが次のように決定される。

$$A = \frac{p a^2}{k_i \{(\lambda+2G) k_i H_0^{(1)}(k_i) - 2G H_1^{(1)}(k_i)\}} \quad (6-74)$$

$$\text{よって} \quad \phi = \frac{p a^2 H_0^{(1)}(k_i R) e^{-i\omega t}}{k_i \{(\lambda+2G) k_i H_0^{(1)}(k_i) - 2G H_1^{(1)}(k_i)\}} \quad (6-75)$$

式(73)(74)より

$$\sigma_r = \frac{p \{2G \frac{1}{R} H_1^{(1)}(k_i R) - (\lambda+2G) k_i H_0^{(1)}(k_i R)\}}{(\lambda+2G) k_i H_0^{(1)}(k_i) - 2G H_1^{(1)}(k_i)} e^{-i\omega t} \quad (6-76)$$

また式(65)(66)と(75)より

$$\sigma_\theta = \frac{-p \{\lambda k_i H_0^{(1)}(k_i R) + 2G \frac{1}{R} H_1^{(1)}(k_i R)\}}{(\lambda+2G) k_i H_0^{(1)}(k_i) - 2G H_1^{(1)}(k_i)} e^{-i\omega t} \quad (6-77)$$

$$\sigma_z = \frac{-p \lambda k_i H_0^{(1)}(k_i R)}{(\lambda+2G) k_i H_0^{(1)}(k_i) - 2G H_1^{(1)}(k_i)} e^{-i\omega t} \quad (6-78)$$

式(76)(77)(78)が本問題に対する応力解である。

次に σ_r を例にとりて数値計算を行ってみよう。境界条件を複素数で与えたが、

実際には実数である。複素数で与えるのは解析的に取扱易いためであって、その実部または虚部が物理的に意味を有していると考えればよい。本問の場合、境界条件を $\sin t$ でもしくは $\cos t$ で与えた場合になる。いずれでもこの様な調和変動圧に対する振幅を考えるならば $e^{i\omega t}$ でも $\cos \omega t$ でも $\sin \omega t$ でも同値になる。これは絶対値をとることによって得られる。

$$\left| \frac{\sigma_z}{P} \right| = \left| \frac{2G \frac{1}{R} H_1''(k_1 R) - (\lambda + 2G) k_1 H_0''(k_1 R)}{(\lambda + 2G) k_1 H_0''(k_1) - 2G H_1''(k_1)} \cdot e^{-i\omega t} \right|$$

$$= \left| \frac{2G \frac{1}{R} H_1''(k_1 R) - (\lambda + 2G) k_1 H_0''(k_1 R)}{(\lambda + 2G) k_1 H_0''(k_1) - 2G H_1''(k_1)} \right| \quad (6-79)$$

ポアソン比 ν が 0.25, すなわち $\lambda = G$ とすると

$$\left| \frac{\sigma_z}{P} \right| = \sqrt{\frac{A^2 + B^2}{C^2 + D^2}} \quad (6-80)$$

ただし

$$\begin{aligned} A &= \frac{2}{R} J_1(k_1 R) - 3k_1 J_0(k_1 R) \\ B &= \frac{2}{R} Y_1(k_1 R) - 3k_1 Y_0(k_1 R) \\ C &= -2J_1(k_1) + 3k_1 J_0(k_1) \\ D &= -2Y_1(k_1) + 3k_1 Y_0(k_1) \end{aligned} \quad (6-81)$$

6-4. 往復動荷重による半無限体の応答

この問題は移動荷重問題の

一種であるが、いわゆる移動座標系を使わずに調和解析できる点で、ここで扱ってみる。往復移動しているために、物体を構成している要素の運動が周期性をもつことから調和振動の線形重ね合せとして解析できる。

作用荷重が境界面上に周期的に置かれている時には、しばしばフーリエ級数形に展開して解析される。

したがって図6-5のように直角座標系 (X, Z) をとったとき、なめらかな境界表面で

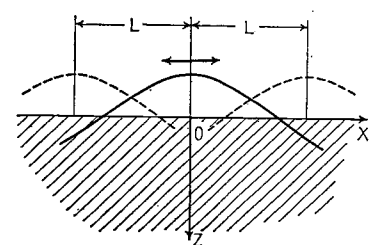


図6-5 半無限弾性体には作用する往復移動荷重

$$\sigma_z(X, 0) = P \cos\{n(X - L \sin \omega t)\} + \bar{P} \sin\{n(X - L \sin \omega t)\}, \quad (6-82)$$

$$\sigma_{xz}(X, 0) = 0 \quad (6-83)$$

のごとく境界条件を与える。ここに P, \bar{P} は荷重の大きさに関連するフーリエ展開係数であり、 n は展開パラメータである。 ω を角速度、 t を時間とすれば、式(82)は可変移動速度 $L\omega \cos \omega t$ で座標原点 O を中心に往復している荷重を示し、その移動振幅は L である。ここで無次元変数を導入する。

$$x = X/L, \quad z = Z/L, \quad \xi = nL \quad (6-84)$$

ここで式(82)を調和振動の級数に展開(ノイマン展開)すると $J_m(\xi)$ のベッセル関数表示で

$$\begin{aligned} \sigma_z(x, 0) &= (P \cos \xi x + \bar{P} \sin \xi x) \left(J_0(\xi) + \sum_{m=1}^{\infty} R_m \cos m \omega t \right) \\ &\quad + (P \sin \xi x - \bar{P} \cos \xi x) \sum_{m=1}^{\infty} S_m \sin m \omega t \end{aligned} \quad (6-85)$$

$$\text{ここに} \quad R_{2m} = 2J_{2m}(\xi), \quad S_{2m-1} = 2J_{2m-1}(\xi), \quad R_{2m-1} = S_{2m} = 0 \quad (6-86)$$

これらの展開については脚註の文献を参照されたい。さて式(85)には時間に無関係な項として $J_0(\xi)(P \cos \xi x + \bar{P} \sin \xi x)$ が含まれている。従って本問題は、この静荷重成分と残りの動荷重成分に対する解の重ね合せによって求められることになる。

動荷重成分に対する解を求める。例のごとく変位ポテンシャル ϕ と ψ を

$$u_L = \phi_{,x} - \psi_{,z} \quad w_L = \phi_{,z} + \psi_{,x} \quad (6-87)(6-88)$$

のごとく導入すれば波動方程式は

$$\phi_{,xx} + \phi_{,zz} = (L/C_L)^2 \phi_{,tt} \quad \psi_{,xx} + \psi_{,zz} = (L/C_T)^2 \psi_{,tt} \quad (6-89)(6-90)$$

となる。また応力は

$$\tau_{xz} = \frac{G}{L^2} (2\phi_{,xz} + \psi_{,xx} - \psi_{,zz}) \quad (6-91)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{L^2} \{ \lambda(\phi_{,xx} + \phi_{,zz}) + 2G(\phi_{,zz} + \psi_{,xz}) \} \quad (6-92)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{L^2} \{ \lambda(\phi_{,xx} + \phi_{,zz}) + 2G(\phi_{,xx} - \psi_{,xz}) \} \quad (6-93)$$

森口・ほか2名, 数学公式Ⅲ, (昭35), 145頁, 岩波書店

さて式(85)の m の値に対して 波動方程式の性格が項によってかわる。すなわち古典偏微分方程式論で分類されているところの楕円形、双曲形、そして特別な場合に放物形の偏微分方程式に帰着される。そこで各々の形式に対する解の特徴より ϕ と ψ の形を考えるため場合わけをするとうかりよい。ただ m が離散的値なので特別な放物形になるのは稀であるが、楕円形の解に含めることができるとして取扱う。

[$0 < Lm\omega/\xi C_T \leq 1$ のとき]

楕円形偏微分方程式の解析となり ϕ と ψ は次の形をとる。

$$\phi = \sum_{m=1}^K \{ (A_m^I \cos m\omega t + \bar{A}_m^I \sin m\omega t) \cos \xi x + (C_m^I \sin m\omega t + \bar{C}_m^I \cos m\omega t) \sin \xi x \} e^{-\alpha_m \xi z} \quad (6-94)$$

$$\psi = \sum_{m=1}^K \{ (B_m^I \cos m\omega t + \bar{B}_m^I \sin m\omega t) \sin \xi x + (D_m^I \sin m\omega t + \bar{D}_m^I \cos m\omega t) \cos \xi x \} e^{-\beta_m \xi z} \quad (6-95)$$

ここに

$$\alpha_m^2 = 1 - \left(\frac{Lm\omega}{\xi C_L} \right)^2, \quad \beta_m^2 = 1 - \left(\frac{Lm\omega}{\xi C_T} \right)^2 \quad (6-96), (6-97)$$

$$K = \text{Int}(\xi C_T / L\omega)$$

ただし $\text{Int}(\cdot)$ は 整数部をとることを意味する。境界条件を考慮して係数を求めれば

$$\left. \begin{aligned} A_m^I &= P\gamma(1+\beta_m^2)R_m/\Delta_m^I & \bar{A}_m^I &= -\bar{P}\gamma(1+\beta_m^2)S_m/\Delta_m^I \\ B_m^I &= 2P\gamma\alpha_m R_m/\Delta_m^I & \bar{B}_m^I &= -2\bar{P}\gamma\alpha_m S_m/\Delta_m^I \\ C_m^I &= P\gamma(1+\beta_m^2)S_m/\Delta_m^I & \bar{C}_m^I &= \bar{P}\gamma(1+\beta_m^2)R_m/\Delta_m^I \\ D_m^I &= -2P\gamma\alpha_m S_m/\Delta_m^I & \bar{D}_m^I &= -2\bar{P}\gamma\alpha_m R_m/\Delta_m^I \end{aligned} \right\} \quad (6-98)$$

$$\gamma = L^2/(G\xi^2)$$

$$\Delta_m^I = (1+\beta_m^2)^2 - 4\alpha_m\beta_m \quad (6-99)$$

したがって、この成分に対応する応力は上添字 I を付けて表わすと次のように求まる。

$$\sigma_{xz}^I = 2 \sum_{m=1}^K \alpha_m (1+\beta_m^2) \{ (PR_m \cos m\omega t - \bar{P}S_m \sin m\omega t) \sin \xi x - (PS_m \sin m\omega t + \bar{P}R_m \cos m\omega t) \cos \xi x \} (e^{-\alpha_m \xi z} - e^{-\beta_m \xi z}) / \Delta_m^I \quad (6-100)$$

$$\sigma_z^I = \sum_{m=1}^K \{ (PR_m \cos m\omega t - \bar{P}S_m \sin m\omega t) \cos \xi x + (PS_m \sin m\omega t + \bar{P}R_m \cos m\omega t) \sin \xi x \} \times \{ (1+\beta_m^2)^2 e^{-\alpha_m \xi z} - 4\alpha_m\beta_m e^{-\beta_m \xi z} \} / \Delta_m^I \quad (6-101)$$

$$\sigma_x^I = \sum_{m=1}^K \{ (PR_m \cos m\omega t - \bar{P}S_m \sin m\omega t) \cos \xi x + (PS_m \sin m\omega t + \bar{P}R_m \cos m\omega t) \sin \xi x \} \times \{ (1+\beta_m^2)(\beta_m^2 - 2\alpha_m^2 - 1) e^{-\alpha_m \xi z} + 4\alpha_m\beta_m e^{-\beta_m \xi z} \} / \Delta_m^I \quad (6-102)$$

ここに式(99)で与えられる Δ_m^I は $L-L$ 関数になっている。

[$Lm\omega/\xi C_T > 1$, $Lm\omega/\xi C_L \leq 1$ のとき]

この場合の m に対する解は次のように ϕ , ψ をとることによって得られる。

$$\phi = \sum_{m=K+1}^M \{ (A_m^II \cos m\omega t + \bar{A}_m^II \sin m\omega t) \cos \xi x + (C_m^II \sin m\omega t + \bar{C}_m^II \cos m\omega t) \sin \xi x \} e^{-\alpha_m \xi z} \quad (6-103)$$

$$\psi = \sum_{m=K+1}^M \{ (B_m^II \cos H_m^II + \bar{B}_m^II \sin H_m^II) \sin \xi x + (D_m^II \sin H_m^II + \bar{D}_m^II \cos H_m^II) \cos \xi x \} \quad (6-104)$$

$$\text{ここに } \bar{\beta}_m^2 = \left(\frac{Lm\omega}{\xi C_T} \right)^2 - 1, \quad H_m^II = \bar{\beta}_m \xi z - m\omega t, \quad M = \text{Int} \left(\frac{\xi C_L}{L\omega} \right) \quad (6-105)$$

$K=M$ となる時は $\phi = \psi = 0$ とする。式(104)は $z \rightarrow \infty$ で放射波となることを考慮している。

境界条件より未定係数を決定すれば

$$\left. \begin{aligned} A_m^II &= -\gamma \zeta_m (PR_m \zeta_m^2 - \bar{P}S_m \eta_m) / \Delta_m^II & \bar{A}_m^II &= \gamma \zeta_m (\bar{P}S_m \zeta_m^2 + PR_m \eta_m) / \Delta_m^II \\ B_m^II &= 2\gamma \alpha_m (PR_m \zeta_m^2 - \bar{P}S_m \eta_m) / \Delta_m^II & \bar{B}_m^II &= 2\gamma \alpha_m (\bar{P}S_m \zeta_m^2 + PR_m \eta_m) / \Delta_m^II \\ C_m^II &= -\gamma \zeta_m (PS_m \zeta_m^2 - \bar{P}R_m \eta_m) / \Delta_m^II & \bar{C}_m^II &= -\gamma \zeta_m (\bar{P}R_m \zeta_m^2 + PS_m \eta_m) / \Delta_m^II \\ D_m^II &= 2\gamma \alpha_m (PS_m \zeta_m^2 - \bar{P}R_m \eta_m) / \Delta_m^II & \bar{D}_m^II &= -2\gamma \alpha_m (\bar{P}R_m \zeta_m^2 + PS_m \eta_m) / \Delta_m^II \end{aligned} \right\} \quad (6-106)$$

$$\text{ただし } \zeta_m = \bar{\beta}_m^2 - 1, \quad \eta_m = 4\alpha_m \bar{\beta}_m, \quad \Delta_m^II = \zeta_m^4 + \eta_m^2$$

従って導かれる応力成分は

$$\sigma_{xz}^II = \sum_{m=K+1}^M 2\alpha_m \zeta_m \left[e^{-\alpha_m \xi z} \{ -(PR_m \zeta_m^2 - \bar{P}S_m \eta_m) \cos m\omega t \sin \xi x + (\bar{P}S_m \zeta_m^2 + PR_m \eta_m) \sin m\omega t \sin \xi x + (PS_m \zeta_m^2 - \bar{P}R_m \eta_m) \sin m\omega t \cos \xi x + (\bar{P}R_m \zeta_m^2 + PS_m \eta_m) \cos m\omega t \cos \xi x + (PR_m \zeta_m^2 - \bar{P}S_m \eta_m) \cos H_m^II \sin \xi x + (\bar{P}S_m \zeta_m^2 + PR_m \eta_m) \sin H_m^II \sin \xi x + (PS_m \zeta_m^2 - \bar{P}R_m \eta_m) \sin H_m^II \cos \xi x - (\bar{P}R_m \zeta_m^2 + PS_m \eta_m) \cos H_m^II \cos \xi x \} / \Delta_m^II \right]$$

$$\sigma_z^II = \sum_{m=K+1}^M \left[\zeta_m^2 e^{-\alpha_m \xi z} \{ (PR_m \zeta_m^2 - \bar{P}S_m \eta_m) \cos m\omega t \cos \xi x - (\bar{P}S_m \zeta_m^2 + PR_m \eta_m) \sin m\omega t \cos \xi x + (PS_m \zeta_m^2 - \bar{P}R_m \eta_m) \sin m\omega t \sin \xi x + (\bar{P}R_m \zeta_m^2 + PS_m \eta_m) \cos m\omega t \sin \xi x + \eta_m \{ -(PR_m \zeta_m^2 - \bar{P}S_m \eta_m) \sin H_m^II \cos \xi x + (\bar{P}S_m \zeta_m^2 + PR_m \eta_m) \cos H_m^II \cos \xi x - (PS_m \zeta_m^2 - \bar{P}R_m \eta_m) \cos H_m^II \sin \xi x - (\bar{P}R_m \zeta_m^2 + PS_m \eta_m) \sin H_m^II \sin \xi x \} \} / \Delta_m^II \right] \quad (6-107)$$

$$\sigma_x^{\text{II}} = \sum_{m=1}^M \left\{ \zeta_m (\bar{\beta}_m^2 + 2\alpha_m^2 + 1) e^{-\alpha_m \xi z} \left\{ (PR_m \zeta_m^2 - \bar{P}S_m \zeta_m) \cos m\omega t \cos \xi x - (\bar{P}S_m \zeta_m^2 + PR_m \zeta_m) \sin m\omega t \cos \xi x \right. \right. \\ \left. \left. + (PS_m \zeta_m^2 - \bar{P}R_m \zeta_m) \sin m\omega t \sin \xi x + (\bar{P}R_m \zeta_m^2 + PS_m \zeta_m) \cos m\omega t \sin \xi x \right\} \right. \\ \left. + \zeta_m \left\{ (PR_m \zeta_m^2 - \bar{P}S_m \zeta_m) \sin H_m^{\text{II}} \cos \xi x - (\bar{P}S_m \zeta_m^2 + PR_m \zeta_m) \cos H_m^{\text{II}} \cos \xi x \right. \right. \\ \left. \left. + (PS_m \zeta_m^2 - \bar{P}R_m \zeta_m) \cos H_m^{\text{II}} \sin \xi x + (\bar{P}R_m \zeta_m^2 + PS_m \zeta_m) \sin H_m^{\text{II}} \sin \xi x \right\} \right\} / \Delta_m^{\text{II}} \quad \dots\dots (6-110)$$

[$Lm\omega/\xi c_L > 1$ のとき]

双曲形偏微分方程式の解と考へ 次の形をとる。

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m^{\text{II}} \cos H_m^{\text{II}} + \bar{A}_m^{\text{II}} \sin H_m^{\text{II}}) \cos \xi x + (C_m^{\text{II}} \cos H_m^{\text{II}} + \bar{C}_m^{\text{II}} \sin H_m^{\text{II}}) \sin \xi x \right\} \quad (6-111)$$

$$\psi = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (B_m^{\text{II}} \sin H_m^{\text{II}} + \bar{B}_m^{\text{II}} \cos H_m^{\text{II}}) \sin \xi x + (D_m^{\text{II}} \sin H_m^{\text{II}} + \bar{D}_m^{\text{II}} \cos H_m^{\text{II}}) \cos \xi x \right\} \quad (6-112)$$

$$\bar{\alpha}_m^2 = \left(\frac{Lm\omega}{\xi c_L} \right)^2 - 1, \quad H_m^{\text{II}} = \bar{\alpha}_m \xi z - m\omega t \quad (6-113)$$

境界条件より未定係数を決定すると

$$\left. \begin{aligned} A_m^{\text{II}} &= -\gamma \zeta_m PR_m / \Delta_m^{\text{II}} & \bar{A}_m^{\text{II}} &= -\gamma \zeta_m \bar{P}S_m / \Delta_m^{\text{II}} \\ B_m^{\text{II}} &= 2\bar{\alpha}_m \gamma PR_m / \Delta_m^{\text{II}} & \bar{B}_m^{\text{II}} &= -2\bar{\alpha}_m \gamma \bar{P}S_m / \Delta_m^{\text{II}} \\ C_m^{\text{II}} &= -\gamma \zeta_m \bar{P}R_m / \Delta_m^{\text{II}} & \bar{C}_m^{\text{II}} &= \gamma \zeta_m PS_m / \Delta_m^{\text{II}} \\ D_m^{\text{II}} &= -2\bar{\alpha}_m \gamma \bar{P}R_m / \Delta_m^{\text{II}} & \bar{D}_m^{\text{II}} &= -2\bar{\alpha}_m \gamma PS_m / \Delta_m^{\text{II}} \end{aligned} \right\} \quad (6-114)$$

$$\Delta_m^{\text{II}} = \zeta_m^2 + \bar{\gamma}_m, \quad \bar{\gamma}_m = 4\bar{\alpha}_m \beta_m$$

従つて応力成分は

$$\tau_{xz}^{\text{II}} = \sum_{m=1}^{\infty} 2\bar{\alpha}_m \zeta_m \left\{ -(PR_m \sin H_m^{\text{II}} - \bar{P}S_m \cos H_m^{\text{II}}) \sin \xi x + (\bar{P}R_m \sin H_m^{\text{II}} + PS_m \cos H_m^{\text{II}}) \cos \xi x \right. \\ \left. + (PR_m \sin H_m^{\text{II}} - \bar{P}S_m \cos H_m^{\text{II}}) \sin \xi x - (\bar{P}R_m \sin H_m^{\text{II}} + PS_m \cos H_m^{\text{II}}) \cos \xi x \right\} / \Delta_m^{\text{II}} \quad (6-115)$$

$$\sigma_z^{\text{II}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \zeta_m^2 \left\{ (PR_m \cos H_m^{\text{II}} + \bar{P}S_m \sin H_m^{\text{II}}) \cos \xi x + (\bar{P}R_m \cos H_m^{\text{II}} - PS_m \sin H_m^{\text{II}}) \sin \xi x \right\} \right. \\ \left. + \bar{\gamma}_m \left\{ (PR_m \cos H_m^{\text{II}} + \bar{P}S_m \sin H_m^{\text{II}}) \cos \xi x + (\bar{P}R_m \cos H_m^{\text{II}} - PS_m \sin H_m^{\text{II}}) \sin \xi x \right\} \right\} / \Delta_m^{\text{II}} \quad (6-116)$$

$$\sigma_x^{\text{II}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \zeta_m (\bar{\beta}_m^2 - 2\bar{\alpha}_m^2 + 1) \left\{ (PR_m \cos H_m^{\text{II}} + \bar{P}S_m \sin H_m^{\text{II}}) \cos \xi x + (\bar{P}R_m \cos H_m^{\text{II}} - PS_m \sin H_m^{\text{II}}) \sin \xi x \right\} \right. \\ \left. - \bar{\gamma}_m \left\{ (PR_m \cos H_m^{\text{II}} + \bar{P}S_m \sin H_m^{\text{II}}) \cos \xi x + (\bar{P}R_m \cos H_m^{\text{II}} - PS_m \sin H_m^{\text{II}}) \sin \xi x \right\} \right\} / \Delta_m^{\text{II}} \quad (6-117)$$

[静荷重成分に対する解. すなわち $m=0$ のとき]

$$\text{Airy の応力関数を求めると } \chi = -J_0(\xi) \cdot \left(\frac{1+\xi z}{\xi^2} \right) e^{-\xi z} (P \cos \xi x + \bar{P} \sin \xi x) \quad \dots (6-118)$$

となり結局. 静的な成分に対する解は. 上添字 0 を付けて書くと

$$\tau_{xz}^0 = J_0(\xi) \cdot (P \sin \xi x - \bar{P} \cos \xi x) \xi z e^{-\xi z} \quad (6-119)$$

$$\sigma_z^0 = J_0(\xi) \cdot (P \cos \xi x + \bar{P} \sin \xi x) (1 + \xi z) e^{-\xi z} \quad (6-120)$$

$$\sigma_x^0 = J_0(\xi) \cdot (P \cos \xi x + \bar{P} \sin \xi x) (1 - \xi z) e^{-\xi z} \quad (6-121)$$

以上ですべての m に対する解が求められた. したがつて本問題の往復移動荷重によつて生ずる応力は

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^0 + \tau_{xz}^{\text{I}} + \tau_{xz}^{\text{II}} + \tau_{xz}^{\text{III}}, \quad \sigma_z = \sigma_z^0 + \sigma_z^{\text{I}} + \sigma_z^{\text{II}} + \sigma_z^{\text{III}} \quad (6-122)$$

なる総和によつて与えられる.

次に数値計算例を示す. ポアソン比 $\nu=0.25$ の弾性体とし. 荷重は対称分布 ($\bar{P}=0$) とした. 計算は Z 軸上 ($X=0$) で行ひ. 無次元時間 $\tau (=8\omega t/\pi)$ と無次元周波数 $\Omega (=L\omega/\xi c_L)$ で整理する. 図6-6, 図6-7, 図6-8 は $t=0$ で原点にあった荷重分布の山が $x \geq 0$ を移動している時間にわたつて求めたもので 実線が x の正方向へ, 点線が x の負方向へ移動する時の値を示し. 境界での値は同じであつても移動方向によつて内部の応力状態が異なることに注意されたい. これは放射波の成分によるもので Ω を小さくすれば 図6-9 のように移動方向依存性はなくなつてゆき 静的荷重による分布となつてゆく. 図6-10 には $t=0$ の瞬間における σ_z の分布を Ω をパラメタとして示した. 放射成分による変動は本問題を理想的な次元としているので無限遠まで減衰しないで残る.

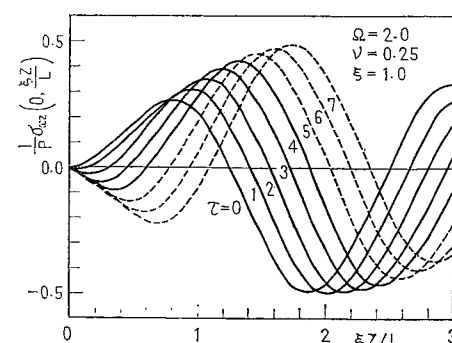


図6-6 時間をパラメータとした時の σ_{xz} の分布変動

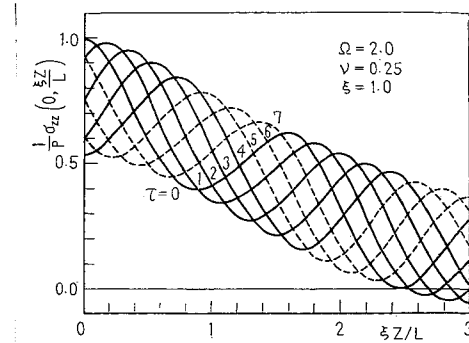


図6-7 時間をパラメータとした時の σ_{zz} の分布変動

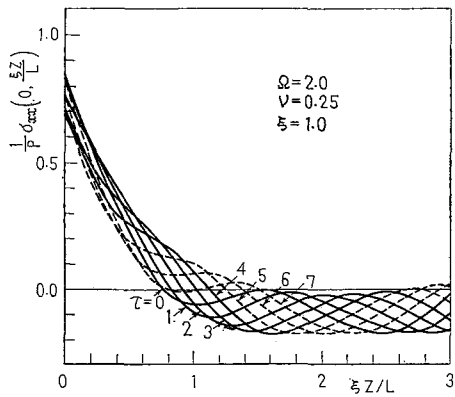


図 6-8 時間をパラメータとした時の σ_{zz} の分布変動

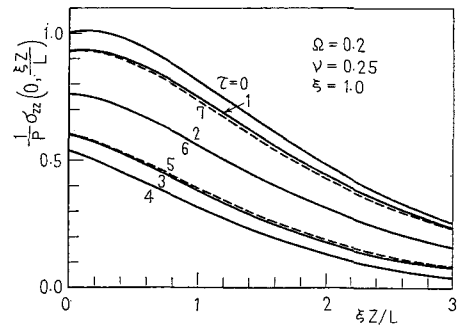


図 6-9 時間をパラメータとした時の $\Omega=0.2$ における σ_{zz} の分布変動

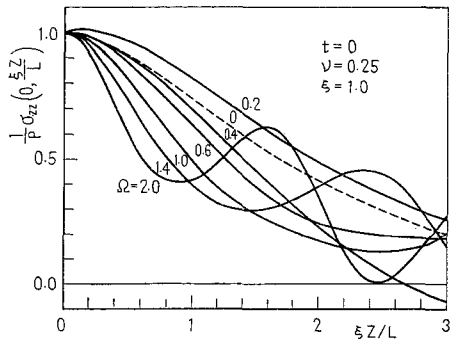
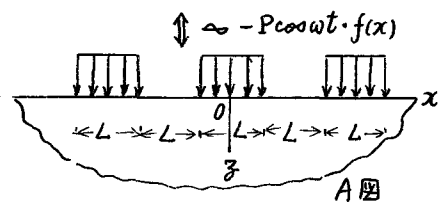


図 6-10 Ω をパラメータとした時の σ_{zz} の分布変動

[問 題]

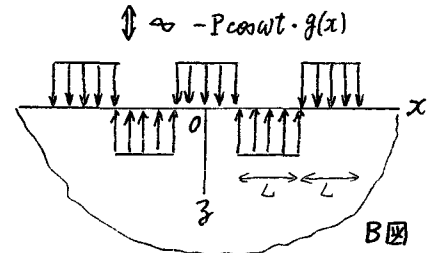
[I] A 図のように、なめらかな半無限体表面に周期 $2L$ で分布する垂直荷重が定常振動して作用している。この時の応力を平面ひずみ状態と考え、以下の手順によって解析せよ。



- (i) 境界条件はどのように与えたらよいか
- (ii) 境界条件の周期性を考えて級数展開せよ。
- (iii) 応力 σ_{zz} , σ_z , σ_x の表示式を求めよ。
- (iv) 次の特別な場合の σ_z の値を算出し、縦軸に σ_z/P を横軸に z/L をとってグラフを描け

$x=0, t=0, Lw/C_T = 1, \nu = 0.25$

(v) B 図のような荷重条件ではどのような応力分布となるか。(i)~(iv)の手順にならって分布を求めよ。A 図のような荷重のときとの違いはどのようになるか。



(vi) A 図の荷重条件の時間因子 $\cos \omega t$ が次の $f(t)$ に置きかわったとき、応力分布はどうなるか。その時の違いを調べよ。

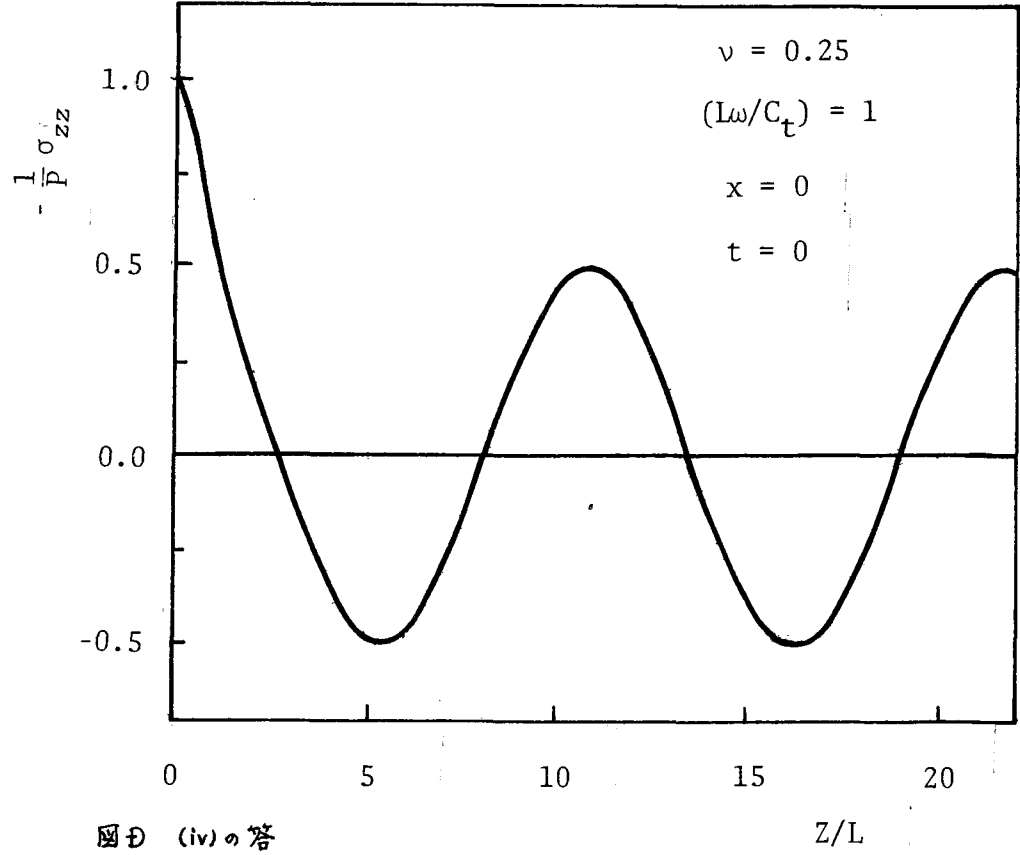
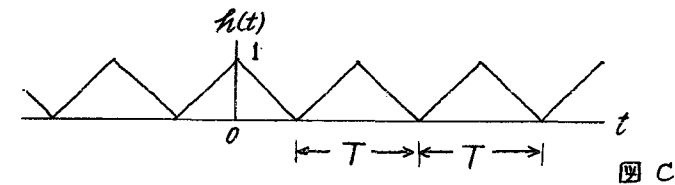


図 D (iv) の答

7. 移動荷重を受ける弾性体

動的荷重が作用する時の応答を弾性力学の問題として広く研究され始めたのは比較的新しい。それには弾性波の伝ば特性に関する研究の蓄積と解法の進展が必要であった。動的荷重の一つである移動荷重の問題は、フーリエ積分変換法の応用解析で著名な J. N. Sneddon たちによって取扱われ、彼らが成功をおさめた大きな要因は、いろいろ解析手法のある中でフーリエ積分変換法を用いた点にあると考えられる。さらに、超関数の概念を取り入れることにより、この手法がより強力な解析手段に育っている。積分変換するということは、前節で考えた級数展開のパラメータ空間の解析にすることであり、積分変換の場合その空間を像空間と呼んでいる。そこで境界条件などを満足する解の構成をその像空間で行い、できた解を逆変換(反転変換)し、目的とする解を得るわけである。これらの解析手順は形式化され、工学者にとっては非常に便利な方法である。積分変換による解析で最も大きな仕事となるのは、大方が得られた形式解が積分表示になるので、その評価を行うことである。そのため積分の評価に関連する種々の応用数学的手法に通じていると都合のよいことが多い。

7.1 無限体中の移動点荷重

一定大きさの作用力 P が弾性体中を一定速度 C で無限遠から無限遠まで一直線上を移動する状態を考える。荷重の作用方向を Z 座標方向に、移動方向を X 方向に一致するように直角座標系 (X, Y, Z) を設定してみる。(図7.1)

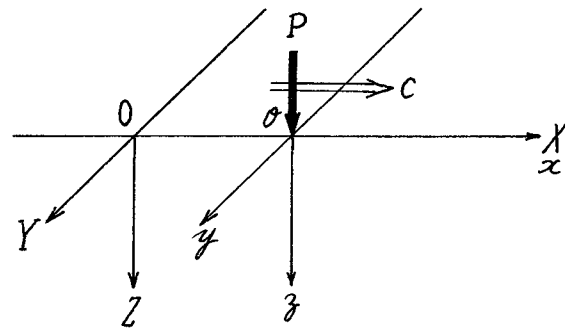


図7.1 静止座標系 (X, Y, Z) と移動座標系 (x, y, z)

動弾性問題でよく用いられる解き方の一つに、外荷重を境界条件として与えるのではなく、それに等価な物体力(体積力)を運動方程式に組み込んで

やり方もある。この手法を用いれば本問の場合、物体力成分を次のようにおけばよい。

$$F_x = 0, \quad F_y = 0, \quad F_z = P\delta(X-ct)\delta(Y)\delta(Z) \quad (7-1)$$

図7.1に示すような点荷重とともに移動する座標系 (x, y, z) を考えれば、その座標系より見た弾性体の挙動は、あたかも静的な状態に見えるだろう。変位、応力などは (x, y, z) 系で表わせば時間 t に依存しない形に表わせる。そこでこのような形に変換できる問題を準静的問題(quasi-static problem)と呼ぶ。移動座標系で考えるため静止系の基礎式を座標変換する。

$$x = X - ct, \quad y = Y, \quad z = Z \quad (7-2)$$

この変換をガリレー変換という。式(7-1)で与えられる物体力を考慮した運動方程式を、ガリレー変換すれば

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\nabla^2 u = C^2\rho\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7-3)$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\nabla^2 v = C^2\rho\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (7-4)$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\nabla^2 w + P\delta(x)\delta(y)\delta(z) = C^2\rho\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7-5)$$

ここで荷重点から遠く離れた点では変位及びその一次導関数(もしくは応力)が0に漸近する条件(有限性の条件)を考慮する。すなわち $x, y, z \rightarrow \pm\infty$ において

$$u = v = w = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7-6)$$

とする。式(7-3)-(7-5)はフーリエ積分法によって解析されるが、その前にフーリエ積分変換に必要な事柄について準備をする。積分変換対として

$$\bar{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \quad (7-7)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\xi)e^{i\xi x} d\xi \quad (7-8)$$

と定義するならば、 $\frac{\partial}{\partial x} f(x)$ はどのように与えられるだろうか。定義にしたがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} f(x) \cdot e^{-i\xi x} dx = [f(x)e^{-i\xi x}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-i\xi)e^{-i\xi x} dx \quad (7-9)$$

無限遠における有限性より式(7-9)の右辺第一項が0になるという仮定のもとに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x)}{\partial x} e^{-i\xi x} dx = (i\xi) \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx = (i\xi)\bar{f}(\xi) \quad (7-10)$$

同様にして二階導関数の変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \cdot e^{-i\beta x} dx = (i\beta)^2 \bar{f}(\beta) \quad (7-11)$$

一般に $f^{(n)}$ のフーリエ変換は無限遠の条件が許せば式(7-7)のもとで次式で与えられる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)} e^{-i\beta x} dx = (i\beta)^n \bar{f}(\beta) \quad (7-12)$$

なおデルタ関数のフーリエ変換は 1 である。さて次の三重積分変換を用いて像空間の解析にする。

$$\bar{u}(\xi, \zeta, \eta) = \iiint_{-\infty}^{\infty} u(x, y, z) e^{-i(\xi x + \zeta y + \eta z)} dx dy dz \quad (7-13)$$

$$u(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{u}(\xi, \zeta, \eta) e^{i(x\xi + y\zeta + z\eta)} d\xi d\zeta d\eta \quad (7-14)$$

変位成分 u, v, w に対しては同様な積分変換を定義する。以下簡便のため、それぞれの関数の引数を省略して単に $u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ と記す。いま式(7-6)の条件を考慮して式(3)-(5)を変換すれば次のようになる。

$$(\lambda + G)(\xi^2 \bar{u} + \zeta^2 \bar{v} + \eta^2 \bar{w}) + G(\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2) \bar{u} = C^2 \rho \xi^2 \bar{u} \quad (7-15)$$

$$(\lambda + G)(\xi^2 \bar{u} + \zeta^2 \bar{v} + \eta^2 \bar{w}) + G(\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2) \bar{v} = C^2 \rho \zeta^2 \bar{v} \quad (7-16)$$

$$(\lambda + G)(\xi^2 \bar{u} + \zeta^2 \bar{v} + \eta^2 \bar{w}) + G(\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2) \bar{w} - P = C^2 \rho \eta^2 \bar{w} \quad (7-17)$$

式(15)に注目して書きかえをする。

$$(\lambda + 2G)(\xi^2 \bar{u} + \zeta^2 \bar{v} + \eta^2 \bar{w}) + G\{(\xi^2 + \eta^2) \bar{u} - \zeta^2 \bar{v} - \eta^2 \bar{w}\} = C^2 \rho \xi^2 \bar{u}$$

$$C^2(\xi^2 \bar{u} + \zeta^2 \bar{v} + \eta^2 \bar{w}) + C^2\{(\xi^2 + \eta^2) \bar{u} - \zeta^2 \bar{v} - \eta^2 \bar{w}\} = C^2 \xi^2 \bar{u}$$

$$\alpha_1 = C/C_L, \quad \alpha_2 = C/C_T, \quad \beta^2 = (C_L/C_T)^2 \quad (7-18)$$

のおきかえをすれば

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2 (\xi^2 \bar{u} + \zeta^2 \bar{v} + \eta^2 \bar{w}) + \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^2 \{(\xi^2 + \eta^2) \bar{u} - \zeta^2 \bar{v} - \eta^2 \bar{w}\} = \xi^2 \bar{u} \quad (7-19)$$

式(16)(17)についても同様に整理でき、これら三本の式を連立させて $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ を求めれば

$$\bar{u} = -\frac{(\beta^2 - 1)P}{\beta^2 G} \cdot \frac{\xi \zeta}{\{(1 - \alpha_1^2)\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2\} \{(1 - \alpha_2^2)\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2\}} \quad (7-20)$$

$$\bar{v} = -\frac{(\beta^2 - 1)P}{\beta^2 G} \cdot \frac{\eta \zeta}{\{(1 - \alpha_1^2)\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2\} \{(1 - \alpha_2^2)\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2\}} \quad (7-21)$$

$$\bar{w} = \frac{P}{\beta^2 G} \left[\frac{\beta^2}{(1 - \alpha_1^2)\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2} - \frac{(\beta^2 - 1)\eta^2}{\{(1 - \alpha_1^2)\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2\} \{(1 - \alpha_2^2)\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2\}} \right] \quad (7-22)$$

式(20)-(22)は像空間における変位解である。これを原空間にもどすには(逆変換するには)次の二種類の積分評価ができればよい。

$$I_1 = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x\xi + y\zeta + z\eta)}}{\{(1 - \alpha_1^2)\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2\} \{(1 - \alpha_2^2)\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2\}} d\xi d\zeta d\eta \quad (7-23)$$

$$I_2 = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x\xi + y\zeta + z\eta)}}{(1 - \alpha_2^2)\xi^2 + \zeta^2 + \eta^2} d\xi d\zeta d\eta \quad (7-24)$$

この二つの積分評価は、移動速度 C の位相速度 C_L と C_T に対する大きさによって場合わけてなされる。 I_1 と I_2 による原空間の変位解の表示は結局、次のようにまとめられる。

$$u = \frac{(\beta^2 - 1)P}{8\pi^3 G \beta^2} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial z} \quad (7-25)$$

$$v = \frac{(\beta^2 - 1)P}{8\pi^3 G \beta^2} \cdot \frac{\partial^2 I_1}{\partial y \partial z} \quad (7-26)$$

$$w = \frac{P}{8\pi^3 G \beta^2} \left\{ \beta^2 I_2 + (\beta^2 - 1) \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} \right\} \quad (7-27)$$

[超音速移動荷重の場合 ($C < C_T < C_L$)] 式(18)から $\alpha_1 < \alpha_2 < 1$ であるから、次のように新変数を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \rho \cos \varphi, & \eta &= \rho \sin \varphi, & y &= \rho \cos \Phi, & z &= \rho \sin \Phi \\ \gamma_i &= x/a_i, & \rho_i &= \rho/a_i; & a_i^2 &= 1 - \alpha_i^2 & (i=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (7-28)$$

このとき $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\rho^2 = y^2 + z^2$ が成立している。式(28)を式(24)に入れて

$$I_2 = \frac{1}{a_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho \exp[i\{x\xi + \rho \cos(\Phi - \varphi)\}]}{\xi^2 + \rho^2} d\varphi \quad (7-29)$$

ここで Bessel 関数に関する Hansen の積分表示

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi i^n} \int_0^{\pi} e^{iz \cos \theta} \cos n\theta \cdot d\theta \quad (7-30)$$

を利用すれば

$$I_2 = \frac{2\pi}{a_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \frac{\rho J_0(\rho \rho)}{\xi^2 + \rho^2} d\rho = \frac{2\pi}{a_2^2} \int_0^{\infty} \rho J_0(\rho \rho) d\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + \rho^2} d\xi, \quad (7-31)$$

ξ についての積分の被積分関数の極は $\pm i\rho$ であるから ξ 複素面における留数定理を用いることにより次のようになる。

$$I_2 = \frac{2\pi^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-1/2\rho l} J_0(\rho r) d\rho \quad (7-32)$$

これは

$$I_2 = \frac{2\pi^2}{a_2(\alpha^2 + \gamma_2^2)^{1/2}} = \frac{2\pi^2}{R_2} \quad (7-33)^*$$

となる。ここに

$$R_i^2 = a_i^2(\gamma_i^2 + \alpha^2) \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (7-34)$$

このような手順は I_1 の評価にも応用できる。式(23)より

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{a_1^2 a_2^2} \int_{-\infty}^\infty d\xi \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \frac{\rho \exp[ii\xi x + \rho l \cos(\varphi - \varphi)]}{(\xi^2 + \rho^2)(\xi^2 + \rho_2^2)} \right\} \\ &= \frac{2\pi}{a_1^2 a_2^2} \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho r) e^{i\xi x}}{(\xi^2 + \rho_1^2)(\xi^2 + \rho_2^2)} d\xi d\rho \\ I_1 &= \frac{2\pi}{a_1^2(\alpha^2 - 1)} \int_0^\infty (a_2 e^{-1/2\rho l} - a_1 e^{-1/2\rho l}) \frac{J_0(\rho r)}{\rho^2} d\rho \end{aligned} \quad (7-35)$$

式(35)は式(25)-(27)で微分形で用いられていることを考えて次のように扱う。

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha} = \frac{2\pi^2}{a_1^2(\alpha^2 - 1)} \int_0^\infty (a_2 e^{-1/2\rho l} - a_1 e^{-1/2\rho l}) \frac{J_0(\rho r)}{\rho} d\rho \quad (7-36)$$

Bessel 関数に関する公式を用いて

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha} = \frac{2\pi^2}{a_1^2(\alpha^2 - 1)\alpha} (R_2 - R_1) \quad (7-37)^*$$

さらに $\partial I_1 / \partial z = (z/r) \partial I_1 / \partial r$ であるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial z} &= \frac{z}{r} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial r} \\ \frac{\partial^2 I_1}{\partial y \partial z} &= -\frac{yz}{r^3} \frac{\partial I_1}{\partial r} + \frac{yz}{r^3} \frac{\partial^2 I_1}{\partial r^2} \\ \frac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} &= \frac{yz^2}{r^3} \frac{\partial I_1}{\partial r} + \frac{z^2}{r^2} \frac{\partial^2 I_1}{\partial r^2} \end{aligned} \right\} \quad (7-38)$$

よって、式(37)から
$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial r} = \frac{2\pi^2}{a_1^2(\alpha^2 - 1)} \frac{x}{r} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (7-39)$$

* Bessel 関数を含む積分公式： 森口・ほか「数学公式Ⅲ」岩波全書より

- $\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{(a^2 + b^2)^{1/2}} ; \text{Re}[a \pm ib] > 0$
- $\int_0^\infty e^{-ax} \frac{1}{x} J_\nu(bx) dx = \frac{[(a^2 + b^2)^{1/2} - a]^\nu}{\nu b^\nu} ; \text{Re} \nu > 0, \text{Re}[a \pm ib] > 0$

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial r^2} = \frac{2\pi^2 x^2}{a_1^2(\alpha^2 - 1)r^2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (7-40)$$

従って、式(25)-(27)は

$$u = \frac{P}{4\pi G \alpha_2^2} \cdot \frac{xz}{r^2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (7-41)$$

$$v = -\frac{P}{4\pi G \alpha_2^2} \cdot \frac{yz}{r^4} [R_2 - R_1 + x^2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)] \quad (7-42)$$

$$w = \frac{P}{4\pi G \alpha_2^2} \left[\frac{\alpha_2^2}{R_2} + \frac{yz^2}{r^4} (R_2 - R_1) - \frac{x^2 z^2}{r^4} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \right] \quad (7-43)$$

亜音速移動荷重に対する解(41)-(43)は閉じた解析解(closed form solution)として得られた。

[遷音速移動荷重の場合 ($C_T < C < C_L$)] 横波と縦波の中間の速度を遷音速(trans-sonic velocity)という。この時 $\alpha_1 < 1 < \alpha_2$ となる。ここでは次の置換を用いる。

$$a_1^2 = 1 - \alpha_1^2, \quad a_2^2 = \alpha_2^2 - 1, \quad R_1^2 = x^2 + a_1^2 r^2, \quad R_2^2 = x^2 - a_2^2 r^2 \quad (7-44)$$

他は式(28)と同じである。すると式(24)は

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{1}{a_2^2} \iiint_{-\infty}^\infty \frac{e^{i(\alpha\xi + \gamma\xi + \beta\eta)}}{\xi^2 - (\xi^2 + \eta^2)/a_2^2} d\xi \cdot d\xi \cdot d\eta \\ &= -\frac{1}{a_2^2} \int_{-\infty}^\infty d\xi \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\rho e^{i[x\xi + \rho l \cos(\varphi - \varphi)]}}{\xi^2 - \rho^2} d\varphi \\ &= -\frac{2\pi}{a_2^2} \int_{-\infty}^\infty d\xi \int_0^\infty \frac{\rho J_0(\rho r) e^{i\xi x}}{\xi^2 - \rho^2} d\rho \\ &= \frac{2\pi^2}{a^2} \int_0^\infty J_0(\rho r) \sin(\gamma_2 \rho) d\rho \end{aligned} \quad (7-45)$$

この積分は次のようにヘビサイドのステップ関数 $H(\cdot)$ によって表わされ*

$$I_2 = \frac{2\pi^2}{R_2} \cdot H(x - a_2 r) \quad (7-47)$$

* Bessel 関数を含む積分公式： $\text{Re} \nu > -2, \varphi \equiv \arcsin(a/b)$ とすると

$$\int_0^\infty J_\nu(bx) \sin ax dx = \begin{cases} \frac{\sin \nu \varphi}{(b^2 - a^2)^{1/2}} & ; (b > a > 0) \\ \frac{b^\nu \cos(\nu\pi/2)}{(a^2 - b^2)^{1/2} [a + (a^2 - b^2)^{1/2}]^\nu} & ; (a > b > 0) \end{cases}$$

一方、式(23)から I_1 は

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -\frac{1}{a_1^2 a_2^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x\xi + y\zeta + \eta\tau)}}{\{\xi^2 + (\zeta^2 + \eta^2)/a_1^2\} \{\xi^2 - (\zeta^2 + \eta^2)/a_2^2\}} d\xi d\zeta d\eta \\
 &= -\frac{1}{a_1^2 a_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cdot e^{i[x\xi + \rho \cos(\theta - \varphi)]}}{(\xi^2 + \rho^2)(\xi^2 - \rho^2)} d\varphi \\
 &= -\frac{2\pi}{a_1^2 a_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \frac{\rho J_0(\rho\rho) e^{i x \xi}}{(\xi^2 + \rho^2)(\xi^2 - \rho^2)} d\rho \\
 &= \frac{2\pi^2}{a_1^2 (b^2 - 1)} \int_0^{\infty} (-a_1 e^{-|\gamma_1 \rho|} + a_2 \sin \gamma_2 \rho) \frac{J_0(\rho\rho)}{\rho^2} d\rho \quad (7-48)
 \end{aligned}$$

I_1 の ρ による偏導関数がわかればよから

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_1}{\partial \rho} &= -\frac{2\pi^2}{a_1^2 (b^2 - 1)} \int_0^{\infty} (a_1 e^{-|\gamma_1 \rho|} + a_2 \sin \gamma_2 \rho) \frac{J_1(\rho\rho)}{\rho} d\rho \\
 &= \frac{2\pi^2}{a_1^2 (b^2 - 1) \rho} [-R_1 + R_2 H(x - a_2 \rho)] \quad (7-49)
 \end{aligned}$$

また、

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial \rho} = \frac{2\pi^2}{a_1^2 (b^2 - 1) \rho} \left[-\frac{x}{R_1} + \frac{x}{R_2} H(x - a_2 \rho) + R_2 \delta(x - a_2 \rho) \right] \quad (7-50)$$

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial \rho^2} = \frac{2\pi^2 x^2}{a_1^2 (b^2 - 1) \rho^2} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} H(x - a_2 \rho) - \frac{\rho}{x^2} a_2 R_2 \delta(x - a_2 \rho) \right] \quad (7-51)$$

ここに ディラックのデルタ関数 $\delta(\cdot)$ は ステップ関数の微分により出て来たものである。式(41)

(42)(43)に入れて変位を求めると、

$$u = \frac{P}{4\pi G \alpha_2^2} \cdot \frac{x\eta}{\rho^2} \left[-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} H(x - a_2 \rho) + \frac{R_2}{x} \delta(x - a_2 \rho) \right] \quad (7-52)$$

$$v = -\frac{P}{4\pi G \alpha_2^2} \cdot \frac{y\eta}{\rho^2} \left[-R_1 + R_2 H(x - a_2 \rho) - \frac{x^2}{R_1} + \frac{x^2}{R_2} H(x - a_2 \rho) + a_2 \rho R_2 \delta(x - a_2 \rho) \right] \quad (7-53)$$

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{P}{4\pi G \alpha_2^2} \left\{ \frac{\alpha_2^2}{R_2} H(x - a_2 \rho) + \frac{y^2}{\rho^2} \left[-R_1 + R_2 H(x - a_2 \rho) \right] - \frac{x^2 \eta^2}{\rho^4} \left[-\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} H(x - a_2 \rho) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a_2 \rho R_2}{x^2} \delta(x - a_2 \rho) \right\} \quad (7-54)
 \end{aligned}$$

式(52)-(54)の超音速移動荷重解は $x=0$ に頂点をもつ円錐の面 ($\frac{x^2}{a_2^2} = y^2 + \eta^2$) において特異性を有し、これはせん断波の波頭面に対応し、 τ による。次頁

の図7-2を参照

[超音速移動荷重の場合 ($C_T < C_L < C$)] $1 < \alpha_1 < \alpha_2$ なので、次の置き換え

$$a_i^2 = \alpha_i^2 - 1, \quad R_i^2 = x^2 - a_i^2 \rho^2, \quad (i=1, 2) \quad (7-55)$$

を採用すれば

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{a_1^2 a_2^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(x\xi + y\zeta + \eta\tau)}}{\{\xi^2 - (\zeta^2 + \eta^2)/a_1^2\} \{\xi^2 - (\zeta^2 + \eta^2)/a_2^2\}} d\xi d\zeta d\eta \\
 &= \frac{1}{a_1^2 a_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\rho \cdot e^{i[x\xi + \rho \cos(\theta - \varphi)]}}{(\xi^2 - \rho^2)(\xi^2 - \rho^2)} d\varphi \\
 &= \frac{2\pi}{a_1^2 a_2^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} \frac{\rho J_0(\rho\rho) \cdot e^{i x \xi}}{(\xi^2 - \rho^2)(\xi^2 - \rho^2)} d\rho \\
 &= \frac{2\pi^2}{a_1^2 (b^2 - 1)} \int_0^{\infty} (-a_1 \sin \gamma_1 \rho + a_2 \sin \gamma_2 \rho) \frac{J_0(\rho\rho)}{\rho^2} d\rho \quad (7-56)
 \end{aligned}$$

式(56)の微分は

$$\frac{\partial I_1}{\partial \rho} = \frac{2\pi^2}{a_1^2 (b^2 - 1) \rho} [-R_1 H(x - a_1 \rho) + R_2 H(x - a_2 \rho)] \quad (7-57)$$

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial \rho} = \frac{2\pi^2}{a_1^2 (b^2 - 1) \rho} \left[-\frac{x}{R_1} H(x - a_1 \rho) - R_1 \delta(x - a_1 \rho) + \frac{x}{R_2} H(x - a_2 \rho) + R_2 \delta(x - a_2 \rho) \right], \quad (7-58)$$

$$\frac{\partial^2 I_1}{\partial \rho^2} = \frac{2\pi^2 x^2}{a_1^2 (b^2 - 1) \rho^2} \left[\frac{1}{R_1} H(x - a_1 \rho) - \frac{1}{R_2} H(x - a_2 \rho) + \frac{\rho}{x^2} \{ a_1 R_1 \delta(x - a_1 \rho) - a_2 R_2 \delta(x - a_2 \rho) \} \right], \quad (7-59)$$

I_2 は式(47)で与えられる。したがって式(41)-(43)は

$$u = \frac{P}{4\pi G \alpha_2^2} \cdot \frac{x\eta}{\rho^2} \left[-\frac{1}{R_1} H(x - a_1 \rho) - \frac{R_1}{x} \delta(x - a_1 \rho) + \frac{1}{R_2} H(x - a_2 \rho) + \frac{R_2}{x} \delta(x - a_2 \rho) \right], \quad (7-60)$$

$$\begin{aligned}
 v &= -\frac{P}{4\pi G \alpha_2^2} \cdot \frac{y\eta}{\rho^2} \left[-R_1 H(x - a_1 \rho) + R_2 H(x - a_2 \rho) \right. \\
 &\quad \left. - x \left\{ \frac{1}{R_1} H(x - a_1 \rho) - \frac{1}{R_2} H(x - a_2 \rho) + \frac{\rho}{x^2} (a_1 R_1 \delta(x - a_1 \rho) - a_2 R_2 \delta(x - a_2 \rho)) \right\} \right], \quad (7-61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{P}{4\pi G \alpha_2^2} \left\{ \frac{\alpha_2^2}{R_2} H(x - a_2 \rho) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{y^2}{\rho^2} \left[-R_1 H(x - a_1 \rho) + R_2 H(x - a_2 \rho) \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{x^2 \eta^2}{\rho^4} \left[-\frac{1}{R_1} H(x - a_1 \rho) + \frac{1}{R_2} H(x - a_2 \rho) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\rho}{x^2} (a_1 R_1 \delta(x - a_1 \rho) - a_2 R_2 \delta(x - a_2 \rho)) \right] \right\} \quad (7-62)
 \end{aligned}$$

C_L で広がる膨張波頭面 ($\frac{x^2}{a_1^2} = y^2 + \eta^2$) で特異性を有する。右図参照

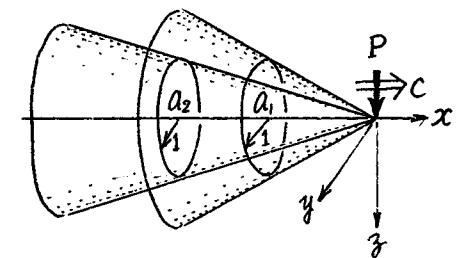


図7-2: 超音速のときの波頭

本節で求めた解は変位解であったが変位が定まればフックの法則などを考慮して応力解を得ることができる。例として移動荷重によって生ずる垂直応力 σ_z を考えてみよう。

$$\sigma_z = (\lambda + 2G) \frac{\partial W}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (7-63)$$

であるから、移動速度が亜音速の場合は式(41)-(43)を上式に入れて整理すると

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \frac{P}{2\pi\alpha_2^2} \left[\frac{(1-\alpha_2^2)z}{R_2^3} \left\{ \frac{y^2 R_2^2 - x^2 z^2}{\alpha_2^2} - \alpha_2^2 \right\} - \frac{(1-\alpha_2^2)z}{R_1^3 \alpha_2^4} (y^2 R_1^2 + x^2 z^2) - \frac{4y^2 z (R_2 - R_1)}{\alpha_2^6} + \frac{2x^2 z (y^2 - z^2) (R_2 - R_1)}{\alpha_2^6 R_1 R_2} \right] \\ & + \frac{\lambda P}{4\pi G \alpha_2^2} \left[\frac{z(R_1 - R_2)}{\alpha_2^2 R_1 R_2} + \frac{x^2 z (R_2^3 - R_1^3)}{\alpha_2^2 R_1^3 R_2^3} - \frac{z(\alpha_2^2 - 4y^2)}{\alpha_2^6} \left\{ R_2 - R_1 + \frac{x^2 (R_1 - R_2)}{R_1 R_2} \right\} - \frac{y^2 z \{ (1-\alpha_2^2)^2 - (1-\alpha_2^2)^2 \}}{\alpha_2^2} - \frac{(1-\alpha_2^2)^2}{R_1^3} \right] \\ & + (1-\alpha_2^2) \frac{z}{R_2^3} \left\{ \frac{y^2 R_2^2 - x^2 z^2}{\alpha_2^2} - \alpha_2^2 \right\} - \frac{(1-\alpha_2^2)(y^2 R_1^2 + x^2 z^2)z}{R_1^3 \alpha_2^4} + \frac{4y^2 z (R_1 - R_2)}{\alpha_2^6} - \frac{2x^2 z (y^2 - z^2) (R_1 - R_2)}{\alpha_2^6 R_1 R_2} \end{aligned} \quad (7-64)$$

この応力成分は、荷重の真下のz軸上で最大となるので $x=y=0$ として調べると

$$\sigma_z(0, 0, z) = \sigma_z^{(st)} \cdot D \quad (7-65)$$

ただし $\sigma_z^{(st)}$ は移動速度0のときの静的応力である

$$\sigma_z^{(st)} = - \frac{P}{4\pi z^2} \left(\frac{2-\nu}{1-\nu} \right) \quad (7-66)$$

また D は動的効果をあらわす動荷重係数(dynamic load factor)で、ここでは

$$D = \left(\frac{1-\nu}{2-\nu} \right) \left[\frac{2}{(1-\alpha_2^2)^{1/2}} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} \right) \frac{1}{(1-\alpha_2^2)^{1/2}} \right] \quad (7-67)$$

で与えられる。式(66)(67)より $\nu=0.25$ の時のようすをグラフにすれば、図7-3、図7-4を得る。

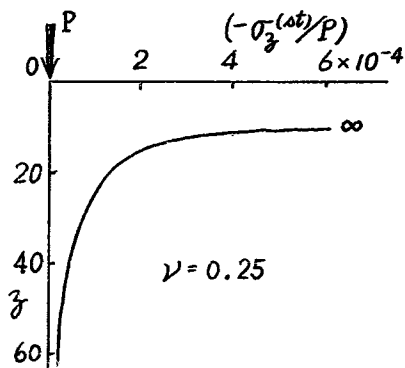


図7-3：応力の減衰状態

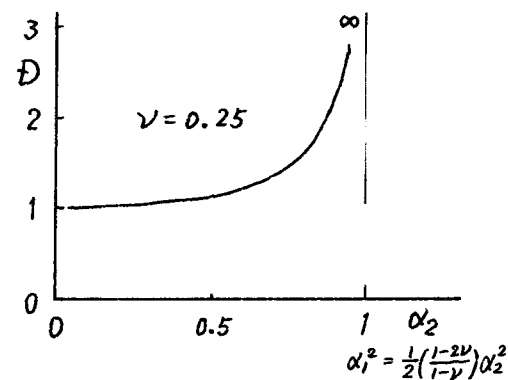


図7-4：動荷重係数の移動速度依存性

7.2 半無限体表面の移動点荷重

この種の問題は弾性体の動的応答を調べる上で非常に重要な基本問題として多くの研究者の興味をそそり、また工学的にも注目されたものである。前問のように仮想物体力を考えて基礎運動方程式とするような手法は取らないで、境界値問題として解くやり方を紹介する。移動速度Cが一定であるとし、ガリレー変換によって移動座標系で問題を考えるならば、準静的状態が現われるものとして解析する。すなわち、物体力のない運動方程式は、その移動座標系では次のようになる。

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G \nabla^2 u = C^2 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7-68)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G \nabla^2 v = C^2 \rho \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (7-69)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G \nabla^2 w = C^2 \rho \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7-70)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (7-71)$$

一定大きさの集中点荷重が $z=0$ で境界づけられる半無限体表面上を移動するとき、この問題に対する境界条件は、

$$[\sigma_z]_{z=0} = -P \delta(x) \delta(y) \quad (7-72)$$

$$[\tau_{xz}]_{z=0} = 0 \quad (7-73)$$

$$[\tau_{yz}]_{z=0} = 0 \quad (7-74)$$

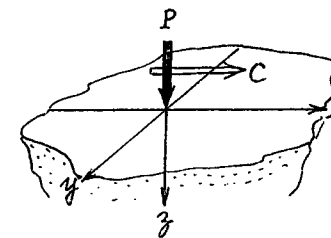


図7-5：半無限体床土上の移動荷重

さらに無限遠における有限性の条件として

$$u = v = w = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (x^2 + y^2 + z^2 \rightarrow \infty) \quad (7-75)$$

を与える。式(68)-(71)の解の形を

$$u = f_1 x + g_1, \quad v = f_2 y + g_2, \quad w = f_3 z + g_3 \quad (7-76)$$

とおく、ここに f_i と g_i ($i=1, 2, 3$) は未知関数で変位ポテンシャル ϕ と ψ_i とは

$$f = \phi, \quad g_1 = \psi_1 y - \psi_2 z, \quad g_2 = -\psi_3 x + \psi_4 z, \quad g_3 = \psi_5 x - \psi_6 y \quad (7-77)$$

で関係づけられる*。式(76)を式(68)-(70)に代入すると関数 f と g_i は次式を満足すればよい。

* 一般に変位ベクトル U は $U = \text{grad } \phi + \text{rot } \psi$

直角座標系で $u = \phi_{,x} + \psi_1 y - \psi_2 z$; $v = \phi_{,y} - \psi_3 x + \psi_4 z$; $w = \phi_{,z} + \psi_5 x - \psi_6 y$

$$(\nabla^2 - \alpha_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) f = 0 \quad (7-78)$$

$$(\nabla^2 - \alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}) g_i = 0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (7-79)$$

$$\Theta_i = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = 0 \quad (7-80)$$

ここに α_1 と α_2 は式(18)で定義されている無次元速度(マッハ数)である。いま式(78)

(79)に次のような x と y 座標に関する二次元フーリエ積分変換を施す。

$$\left. \begin{aligned} F &= \iint_{-\infty}^{\infty} f e^{-i(x\beta_1 + y\beta_2)} dx dy, & f &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F \cdot e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \\ G_i &= \iint_{-\infty}^{\infty} g_i \cdot e^{-i(x\beta_1 + y\beta_2)} dx dy, & g_i &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G_i \cdot e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (7-81)$$

式(78)(79)より

$$(D^2 - \eta_1^2) F = 0, \quad (D^2 - \eta_2^2) G_i = 0 \quad ; \quad i=1, 2, 3 \quad (7-82)$$

$$\text{ここに } D = \frac{\partial}{\partial z}, \quad D^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \eta_1^2 = (1 - \alpha_1^2)\beta_1^2 + \beta_2^2, \quad \eta_2^2 = (1 - \alpha_2^2)\beta_1^2 + \beta_2^2, \quad (7-83)$$

式(82)は像空間における常微分方程式となっている。

[亜音速移動の場合 ($c < C_T < C_L$)] $\alpha_1 < \alpha_2 < 1$ であるから $\eta_i^2 > 0$ 。したがって式(82)の解形は

$$F = A_0 e^{-\eta_1 z}, \quad G_i = A_i e^{-\eta_2 z}; \quad i=1, 2, 3 \quad (7-84)$$

A_0, A_i は β_1 と β_2 の関数である。これらの解には $z \rightarrow +\infty$ における解の収束性を考慮し、 $e^{\eta_1 z}$ と $e^{\eta_2 z}$ の項を省いている。4つの未知関数 A_1, A_2, A_3, A_0 は三つの境界条件(72)(73)(74)と式(80)の条件より決定される。像空間における変位が式(76)(81)

(84)によって、 A_0 と A_i で表現できるから、像空間における応力表示は次のようになる。

$$\bar{\sigma}_z = 2G(\eta_1^2 A_0 e^{-\eta_1 z} - \eta_2 A_3 e^{-\eta_2 z}) - \lambda \alpha_1^2 \beta_1^2 A_0 e^{-\eta_1 z} \quad (7-85)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = G(-2i\beta_1 \eta_1 A_0 e^{-\eta_1 z} - \eta_2 A_1 e^{-\eta_2 z} + i\beta_1 A_3 e^{-\eta_2 z}) \quad (7-86)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = G(-2i\beta_2 \eta_1 A_0 e^{-\eta_1 z} - \eta_2 A_2 e^{-\eta_2 z} + i\beta_2 A_3 e^{-\eta_2 z}) \quad (7-87)$$

$$\bar{\Theta}_i = i\beta_1 G_1 + i\beta_2 G_2 + D G_3 = 0 \quad (7-88)$$

上付バーは像空間に変換されていることを示す。なお式(85)を導く過程で、式(80)を考慮

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \Theta_i + \nabla^2 f = \nabla^2 f \quad (7-89)$$

となることを考慮している。 $z=0$ で式(72)(73)(74)が成り、(80)の条件も成り立つことより

$$\left. \begin{aligned} -2\eta_2 A_3 + (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2) A_0 &= -P/G \\ -\eta_2 A_1 + i\beta_1 A_3 - 2i\beta_1 \eta_1 A_0 &= 0 \\ -\eta_2 A_2 + i\beta_2 A_3 - 2i\beta_2 \eta_1 A_0 &= 0 \\ \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + i\eta_2 A_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7-90)$$

これを解いて

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= -\frac{P}{G} \cdot \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2}{B}, & A_1 &= \frac{P}{G} \cdot \frac{2i\beta_1 \eta_1 \eta_2}{B} \\ A_2 &= \frac{P}{G} \cdot \frac{2i\beta_2 \eta_1 \eta_2}{B}, & A_3 &= -\frac{P}{G} \cdot \frac{2\eta_1(\beta_1^2 + \beta_2^2)}{B} \end{aligned} \right\} \quad (7-91)$$

$$\text{ここに } B = (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2)^2 - 4\eta_1 \eta_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) \quad (7-92)$$

式(91)を式(84)に入れ逆変換すれば f, g_i が求まるから式(76)より変位成分は

$$u = \frac{Pi}{4\pi^2 G} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} \{ -\beta_1(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2) e^{-\eta_1 z} + 2\beta_1 \eta_1 \eta_2 e^{-\eta_2 z} \} e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \quad (7-93)$$

$$v = \frac{Pi}{4\pi^2 G} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} \{ -\beta_2(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2) e^{-\eta_1 z} + 2\beta_2 \eta_1 \eta_2 e^{-\eta_2 z} \} e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \quad (7-94)$$

$$w = \frac{Pi}{4\pi^2 G} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} \{ \eta_1(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2) e^{-\eta_1 z} - 2\eta_1(\beta_1^2 + \beta_2^2) e^{-\eta_2 z} \} e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \quad (7-95)$$

一方、応力成分は式(91)を(85)-(87)に入れて逆変換すると

$$\bar{\sigma}_z = -\frac{P}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} \{ (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2)^2 e^{-\eta_1 z} + 4\eta_1 \eta_2 (\beta_1^2 + \beta_2^2) e^{-\eta_2 z} \} e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \quad (7-96)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{Pi}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2\beta_1 \eta_1}{B} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2) (e^{-\eta_1 z} - e^{-\eta_2 z}) e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \quad (7-97)$$

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{Pi}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2\beta_2 \eta_1}{B} (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2) (e^{-\eta_1 z} - e^{-\eta_2 z}) e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \quad (7-98)$$

他の応力については式(85)-(87)の形を求め式(91)を入れて逆変すれば

$$\bar{\sigma}_x = \frac{P}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_1^2}{B} \{ (2 - 2\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2) e^{-\eta_1 z} - 4\eta_1 \eta_2 e^{-\eta_2 z} \} e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \quad (7-99)$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{P}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} \{ (2\beta_2^2 - 2\alpha_1^2 \beta_1^2 + \alpha_2^2 \beta_1^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_2^2) e^{-\eta_1 z} - 4\beta_2^2 \eta_1 \eta_2 e^{-\eta_2 z} \} e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \quad (7-100)$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\beta_1\beta_2}{B} \{(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \eta_1^2) e^{-\eta_1 z} - 2\eta_1\eta_2 e^{-\eta_2 z}\} e^{i(x\beta_1 + y\beta_2)} d\beta_1 d\beta_2 \quad (7-101)$$

式(93)-(101)の二重積分を評価するためには、関数Bの特性を調べる。また η_i が多価関数であるのでその分岐の選択を考える必要がある。変換パラメータ β_i が大きくなると η_i も大きくなるので、 β_i がゼロならば指数関数的に被積分関数値が減少するので直接電算機による数値積分して求めてよい。

[亜音速移動の場合 ($C_T < C < C_L$)] $\alpha_1 < 1 < \alpha_2$ であるから η_i を

$$\eta_1^2 = (1 - \alpha_1^2)\beta_1^2 + \beta_2^2, \quad \eta_2^2 = (\alpha_2^2 - 1)\beta_1^2 - \beta_2^2 \quad (7-102)$$

とおけば、あとは亜音速の場合と同様な手順で、次が導ける。

$$(\mathcal{D}^2 - \eta_1^2)F = 0, \quad (\mathcal{D}^2 + \eta_2^2)G_i = 0 \quad (7-103)$$

η_1^2 は常に正值となるが、 η_2^2 は $(\alpha_2^2 - 1)\beta_1^2 < \beta_2^2$ で負値となり、この場合は式(103)の代りに式(82)を用い、解形は式(84)である。それ以外は式(103)の解として

$$F = A_0 e^{-\eta_1 z}, \quad G_i = A_i e^{i\eta_2 z}; \quad i = 1, 2, 3 \quad (7-104)$$

の形で与える。

この時、 η_2 の分岐の選択は放射

の条件を考慮して決定される。その他の解析手順は亜音速時の解析と同じである。

[超音速移動の場合 ($C_T < C_L < C$)] $\alpha_2 < \alpha_1 < 1$ となり

$$\eta_1^2 = (\alpha_1^2 - 1)\beta_1^2 - \beta_2^2, \quad \eta_2^2 = (\alpha_2^2 - 1)\beta_1^2 - \beta_2^2 \quad (7-105)$$

従って $(\mathcal{D}^2 + \eta_1^2)F = 0, \quad (\mathcal{D}^2 + \eta_2^2)G_i = 0 \quad (7-106)$

超音速に対しては、次の4つの場合のそれぞれに応じて解の形を考える。

$(\alpha_1^2 - 1)\beta_1^2 < \beta_2^2$ すなわち $\eta_1^2 < 0$ の時 式(84)

$(\alpha_1^2 - 1)\beta_1^2 < \beta_2^2, (\alpha_2^2 - 1)\beta_1^2 > \beta_2^2$ すなわち $\eta_1^2 < 0, \eta_2^2 > 0$ の時、式(104)

$(\alpha_1^2 - 1)\beta_1^2 > \beta_2^2, (\alpha_2^2 - 1)\beta_1^2 < \beta_2^2$ すなわち $\eta_1^2 > 0, \eta_2^2 < 0$ の時

$$F = A_0 e^{i\eta_1 z}, \quad G_i = A_i e^{-\eta_2 z} \quad (7-107)$$

$(\alpha_1^2 - 1)\beta_1^2 > \beta_2^2$ すなわち $\eta_1^2 > 0$ の時: $F = A_0 e^{i\eta_1 z}, \quad G_i = A_i e^{i\eta_2 z} \quad (7-108)$

の、それぞれの解形を採用する。これらの場合わけは積分パラメータ β_1 と β_2 によって異なるから、逆変換を行う場合の積分路上の位置によって被積分関数の取りうる形が異なってくるので積分評価の際、十分注意を以て行なわれる。

7.3 半無限体表面の移動線荷重

単位長さあたりの大きさがPの集中線荷重が一定移動速度Cで無限遠から無限遠までxの正方向に動く場合を考える。線荷重の作用方向は表面に垂直でz方向に一律に分布している(図7-6)ならば、平面ひずみ状態と考えられ、この時の基礎式は二次元となる。

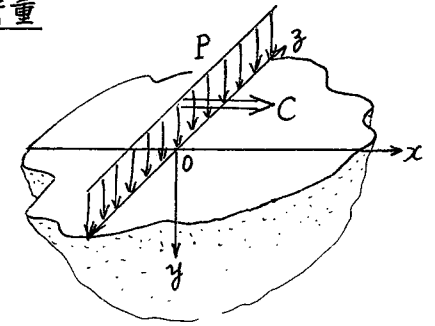


図7-6: 半無限体上の移動荷重

これを、ガリレオ変換により移動座標で表示すれば

$$(\lambda + G) \frac{\partial \phi}{\partial x} + G \nabla^2 u = C^2 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7-109)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \phi}{\partial y} + G \nabla^2 v = C^2 \rho \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (7-110)$$

$$\text{ただし } \phi = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (7-111)$$

境界条件は表面($y=0$)で与えられ

$$\sigma_y = -P \delta(x), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (7-112)$$

また無限遠($x^2 + y^2 = \infty$)において

$$u = v = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (7-113)$$

式(113)の条件は微分形の関数をフーリエ変換するさいに考慮される。ここでは次のフーリエ変換対を用いる。

$$\left. \begin{aligned} U &= \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-ix\beta} d\beta, & u &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U e^{ix\beta} d\beta \\ V &= \int_{-\infty}^{\infty} v e^{-ix\beta} d\beta, & v &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V e^{ix\beta} d\beta \end{aligned} \right\} \quad (7-114)$$

ここで $\mathcal{D} = \partial/\partial y$, $\mathcal{D}^2 = \partial^2/\partial y^2$ なる記号を用いると式(109)(110)の変換形は、次のようになる。

$$(\lambda+G)i\beta(i\beta U+\mathcal{D}V)+G(-\beta^2+\mathcal{D}^2)U=-C^2\rho\beta^2U \quad (7-115)$$

$$(\lambda+G)\mathcal{D}(i\beta U+\mathcal{D}V)+G(-\beta^2+\mathcal{D}^2)V=-C^2\rho\beta^2V \quad (7-116)$$

これは変数 y に対する常微分方程式である。これを書きかえると

$$\{\mathcal{D}^2-(\beta^2-\alpha_2^2)\beta^2\}U+i(\beta^2-1)\beta\mathcal{D}V=0 \quad (7-117)$$

$$i(\beta^2-1)\beta\mathcal{D}U+\{\beta^2\mathcal{D}^2-(1-\alpha_2^2)\beta^2\}V=0 \quad (7-118)$$

式(118)を y で偏微分して

$$i(\beta^2-1)\beta\mathcal{D}^2U+\{\beta^2\mathcal{D}^2-(1-\alpha_2^2)\beta^2\}\mathcal{D}V=0 \quad (7-119)$$

式(117)より $\mathcal{D}V=i\frac{\mathcal{D}^2-(\beta^2-\alpha_2^2)\beta^2}{(\beta^2-1)\beta}U$ であるからこれを上式に代入して整理すれば

$$[\beta^2\mathcal{D}^4-\{(\beta^2-1)^2+(1-\alpha_2^2)+\beta^2(\beta^2-\alpha_2^2)\}\beta^2\mathcal{D}^2+(1-\alpha_2^2)(\beta^2-\alpha_2^2)\beta^4]U=0 \quad (7-120)$$

これを $n_i^2=\alpha_i^2\beta$, $\alpha_i^2=1-\alpha_i^2$, $\beta^2=(\alpha_2/\alpha_1)^2$ の関係を用いて書きかえると

$$\beta^2(\mathcal{D}^2-n_1^2)(\mathcal{D}^2-n_2^2)U=0 \quad (7-121)$$

を得る。 V についても同様な手順で

$$\beta^2(\mathcal{D}^2-n_1^2)(\mathcal{D}^2-n_2^2)V=0 \quad (7-122)$$

[亜音速 ($c < C_T < C_L$)] $\alpha_1 < \alpha_2 < 1$ であるから常に $\alpha_i^2 > 0$, $n_i^2 > 0$ であり、こ

の時の式(121)(122)の解形は

$$U=A_1e^{-n_1y}+A_2e^{-n_2y} \quad (7-123)$$

$$V=B_1e^{-n_1y}+B_2e^{-n_2y} \quad (7-124)$$

A_1, A_2, B_1, B_2 はいずれも β の関数で境界条件より定まる未知関数である。また $y \rightarrow +\infty$ の条件(113)を考慮し e^{n_1y} や e^{n_2y} の項は含まれていない。平面ひずみ状態

における $\bar{\sigma}_y$ と $\bar{\tau}_{xy}$ の式を積分変換して

$$\bar{\sigma}_y = -(\lambda+2G)(n_1B_1e^{-n_1y}+n_2B_2e^{-n_2y})+i\lambda\beta(A_1e^{-n_1y}+A_2e^{-n_2y}) \quad (7-125)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = G\{-n_1A_1e^{-n_1y}-n_2A_2e^{-n_2y}+i\beta(B_1e^{-n_1y}+B_2e^{-n_2y})\} \quad (7-126)$$

ここで境界条件(112)を考慮して

$$\beta^2(2-\alpha_2^2)B_1+2n_1n_2B_2=\frac{P}{G}n_1 \quad (7-127)$$

$$2B_1+(2-\alpha_2^2)B_2=0 \quad (7-128)$$

また式(123)(124)を式(117)(118)に入れれば

$$n_1A_1=-i\beta B_1 \quad (7-129), \quad \beta A_2=-in_2B_2 \quad (7-130)$$

を得る。式(127)-(130)を連立させ A_1, A_2, B_1, B_2 を求めれば

$$A_1=-\frac{iP}{G\beta}C_1, \quad A_2=\frac{iPA_2}{G\beta}C_2, \quad B_1=\frac{PA_1}{G\beta}C_1, \quad B_2=-\frac{P}{G\beta}C_2 \quad (7-131)$$

$$\text{ここに } C_1=\frac{2-\alpha_2^2}{(2-\alpha_2^2)^2-4\alpha_1\alpha_2}, \quad C_2=\frac{2\alpha_1}{(2-\alpha_2^2)^2-4\alpha_1\alpha_2} \quad (7-132)$$

未知関数が式(131)のように定まるので式(123)(124)に入れて逆変換を行うことになる。

このとき、次の積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+ix)\beta} d\beta = \frac{2y}{x^2+y^2}, \quad i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(y+ix)\beta} d\beta = -\frac{2x}{x^2+y^2}$$

が利用できる。結果のみを示すと応力成分に対し

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi} \left\{ C_1(\alpha_2^2-2\alpha_1^2+2)\frac{\alpha_1y}{r_1^2} - 2C_2\alpha_2\frac{\alpha_2y}{r_2^2} \right\} \quad (7-133)$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{\pi} \left\{ C_1(2-\alpha_2^2)\frac{\alpha_1y}{r_1^2} - 2C_2\alpha_2\frac{\alpha_2y}{r_2^2} \right\} \quad (7-134)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi} C_1\alpha_1x \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \quad (7-135)$$

ここに $r_i^2 = x^2 + \alpha_i^2 y^2$ ($i=1, 2$) である。一方変位成分の u は応力成分のように一

義的に定まらない。これは二次元問題によく現われる不定性であって数学的に理想

化した二次元モデルを用いているためである。定まらない定数分だけを除外すれば、本問題

の変位解の一つとして、次のように与えることができる。ただし $\phi_i = \arctan(\alpha_i y/x)$
 $0 \leq \phi_i \leq \pi$

$$u = \frac{P}{\pi G} \left\{ C_1(\pi-\phi_1) - C_2\alpha_2(\pi-\phi_2) \right\} \quad (7-136)$$

$$v = \frac{P}{\pi G} \left\{ C_2 \log|r_2| - C_1\alpha_1 \log|r_1| \right\} \quad (7-137)$$

[遷音速 ($C_T < C < C_L$)] $\alpha_1 < 1 < \alpha_2$ であるから

$$\alpha_i^2 = a_i^2 / c^2 \quad (i=1, 2), \quad a_1^2 = 1 - \alpha_1^2, \quad a_2^2 = \alpha_2^2 - 1 \quad (7-138)$$

この場合も前と同様な手順で解析できるが積分評価がむづかくなるので別法を紹介する。式(109)(110)の解として次の様においてみる。

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \quad (7-139)(7-140)$$

ここに $f(x, y)$ と $g(x, y)$ は新しく導入した未知関数である。上式を式(109)(110)に入れば、 f と g が次式を満足すればよいことがわかる。

$$(\nabla^2 - \alpha_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})f = 0, \quad (\nabla^2 - \alpha_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2})g = 0 \quad (7-141)(7-142)$$

式(138)を用いて書きかえると

$$a_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad a_2^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0 \quad (7-143)(7-144)$$

式(143)は複素変数 $(x + ia_1 y)$ の任意解析関数の実部によって満足できる楕円形偏微分方程式となっている。すなわち、 $z_1 = x + ia_1 y$ とおけば

$$f = \text{Re}f(z_1) + i \text{Im}f(z_1) \quad (7-145)$$

とにおいて f を解析的な複素関数と考へて取扱える。実関数を複素関数にわざわざ拡張して扱うのは、解析関数に対する性質を利用し手際よく解を求めたためである。後の便宜のため偏導関数を示しておく

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \text{Re}f'(z_1) + i \text{Im}f'(z_1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -a_1 \text{Im}f'(z_1) + i a_1 \text{Re}f'(z_1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \text{Re}f''(z_1) + i \text{Im}f''(z_1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -a_1 \text{Im}f''(z_1) + i a_1 \text{Re}f''(z_1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -a_1^2 \text{Re}f''(z_1) - i a_1^2 \text{Im}f''(z_1) \end{aligned} \right\} \quad (7-146)$$

ここに ' は関数 f の z_1 による微分を示す。上式の右辺第一項がそれぞれの偏導関数

の実部である。 $\partial^2 f / \partial x^2$ と $\partial^2 f / \partial y^2$ を式(143)の左辺に代入すれば任意の関数 f について 0 となることが確かめられる。式(144)は変数 $x \pm a_2 y$ の任意実関数 $g(x \pm a_2 y)$ によって満足される双曲形偏微分方程式である。その解は

$$g = g(x + a_2 y) \quad (7-147)$$

で与える。この理由は荷重が x の正方向に横波速度より速く移動している時、横波波頭が $x > 0, y > 0$ の領域に生ずることは物理的にあり得ないので $g(x - a_2 y)$ の解を除いているためである。図7-7を参照。 f と g の具体的な関数の形は境界条件より定められる。変位表示の応力式に式(139)(140)を入れ、 $y=0$ における境界条件(112)を考慮すると

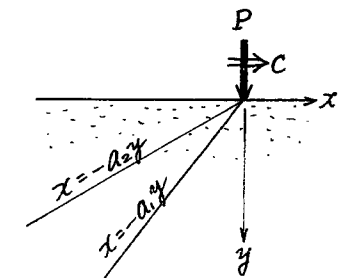


図7-7: 超音速時の波頭(遷音速のときは $x = -a_2 y$ のみとなる)

$$\sigma_y = G \left\{ (\alpha_2^2 - 2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right\} = -P \delta(x) \quad (7-148)$$

$$\tau_{xy} = G \left\{ 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (2 - \alpha_2^2) \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (7-149)$$

ここで上式を x で積分する。積分定数は剛体変位に関するものであるため 0 とおき、

$$G \left\{ (\alpha_2^2 - 2) \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{\partial g}{\partial y} \right\} = -P H(x) \quad (7-150)$$

$$G \left\{ 2 \frac{\partial f}{\partial y} + (2 - \alpha_2^2) \frac{\partial g}{\partial x} \right\} = 0 \quad (7-151)$$

式(146)(147)を入れると次式を得る。

$$(2 - \alpha_2^2) \text{Re}f' - 2 a_2 g' = \frac{P}{G} H(x) \quad (7-152)$$

$$-2 a_1 \text{Im}f' + (2 - \alpha_2^2) g' = 0 \quad (7-153)$$

g' は $(x + a_2 y)$ による微分を示す。この式より g' を消去すれば

$$(2 - \alpha_2^2)^2 \text{Re}f' - 4 a_1 a_2 \text{Im}f' = \frac{P}{G} (2 - \alpha_2^2) H(x) \quad (7-154)$$

式(154)を満足する解は、 z_1 空間において f が解析関数であること、解析的領域を囲む境界で(この場合は $y=0$ で与えられる)荷重点($x=0$)で不連続値を与えるが境界上

で実数となることを考慮して形が与えられる。すなわち解析関数である対数関数を考えれば $x > 0$ と $x < 0$ で z_1 の偏角が π だけの差があることに注目すれば、未知係数 C_3, C_4 を用いて次のように仮定できる。

$$f'(z_1) = \frac{P}{\pi G} (C_3 + iC_4)(\ln z_1 - i\pi) \quad (7-155)$$

実部と虚部にかけて

$$f'(z_1) = \frac{P}{\pi G} \{C_3 \ln |z_1| + C_4(\pi - \phi_1) + i[C_4 \ln |z_1| - C_3(\pi - \phi_1)]\} \quad (7-156)$$

$$\text{ここに} \quad \phi_1 = \arctan(a_1 y/x), \quad r_1 = |z_1| \quad (7-157)$$

式(156)を(154)に代入して C_3, C_4 を決定すれば

$$C_3 = \frac{4a_1 a_2 (2 - \alpha_2^2)}{(2 - \alpha_2^2)^2 + 16a_1^2 a_2^2} \quad (7-158)$$

$$C_4 = \frac{(2 - \alpha_2^2)^2}{(2 - \alpha_2^2)^2 + 16a_1^2 a_2^2} \quad (7-159)$$

式(153)(156)から関数 g を求めれば

$$g'(x) = \frac{P}{\pi G} \cdot \frac{2a_1}{2 - \alpha_2^2} \{C_4 \ln r_1 - C_3(\pi - \phi)\}$$

$$g'(x+a_2 y) = \frac{P}{\pi G} \cdot \frac{2a_1}{2 - \alpha_2^2} \{C_4 \ln |x+a_2 y| - \pi C_3 H(x+a_2 y)\} \quad (7-160)$$

式(156)(160)より式(139)(140)にしたがって変位を求めれば

$$u = \frac{P}{\pi G} \left\{ C_3 \ln r_1 + C_4(\pi - \phi_1) - \frac{2a_1 a_2}{2 - \alpha_2^2} [C_4 \ln |x+a_2 y| - \pi C_3 H(x+a_2 y)] \right\} \quad (7-161)$$

$$v = \frac{P}{\pi G} \left\{ -a_1 C_4 \ln r_1 + a_1 C_3(\pi - \phi_1) + \frac{2a_1}{2 - \alpha_2^2} [C_4 \ln |x+a_2 y| - \pi C_3 H(x+a_2 y)] \right\} \quad (7-162)$$

この変位から、応力は通常の方法により求められ

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi} \left\{ C_4 \left[(2\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \frac{a_1 y}{r_1^2} - \frac{4a_1 a_2}{2 - \alpha_2^2} \cdot \frac{1}{x+a_2 y} \right] + C_3 \left[(2\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \frac{x}{r_1^2} + \frac{4a_1 a_2}{2 - \alpha_2^2} \pi \delta(x+a_2 y) \right] \right\} \quad (7-163)$$

$$\sigma_y = -\frac{P}{\pi} (2 - \alpha_2^2) \left\{ C_4 \left[\frac{a_1 y}{r_1^2} - \frac{4a_1 a_2}{(2 - \alpha_2^2)^2} \cdot \frac{1}{x+a_2 y} \right] + C_3 \left[\frac{x}{r_1^2} + \frac{4a_1 a_2}{(2 - \alpha_2^2)^2} \pi \delta(x+a_2 y) \right] \right\} \quad (7-164)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2Pa_1}{\pi} \left\{ C_3 \left[\frac{a_1 y}{r_1^2} - \pi \delta(x+a_2 y) \right] + C_4 \left[-\frac{x}{r_1^2} + \frac{1}{x+a_2 y} \right] \right\} \quad (7-165)$$

これらの式が境界条件を満足しているかを吟味するためには式(150)(151)ではなく式(148)(149)を用いて行なわなければならない。解は $x = -a_2 y$ で特異性を示している。
(横波波頭)

[超音速 ($C_T < C_L < C$)] この場合、 $1 < \alpha_1 < \alpha_2$ であるから

$$n_i^2 = \alpha_i^2 \beta^2 > 0, \quad \alpha_i^2 = \alpha_i^2 - 1 \quad (i=1, 2) \quad (7-166)$$

といて解析を進める。このとき式(7-121)(122)に対応する変換された場の方程式は

$$G^2(D^2 + n_1^2)(D^2 + n_2^2)(U, V) = 0 \quad (7-167)$$

となり、^{XFの}解析手順は亜音速の場合と同様である。常微分方程式(167)の解は次のように与えることができる。

$$U = A_1 e^{in_1 y} + A_2 e^{in_2 y} \quad (7-168)$$

$$V = B_1 e^{in_1 y} + B_2 e^{in_2 y} \quad (7-169)$$

ここに図7-7に示したように移動荷重の左側にのみ波が残るような解のみを採用しており、 $e^{-n_1 y}, e^{-n_2 y}$ の項を落している。この時の波動特性から $x = \pm \infty, y = \pm \infty$ において放射波となること及び有限であることを考慮して n_i の分岐が決まる。未知関数 A_1, A_2, B_1, B_2 は積分変換パラメータ β の関数であり、それらは式(168)(169)を式(117)(118)に代入して得られる関係式と、式(112)を考慮して得られる式とから求められる。すなわち、以下の連立式によって定まる。

$$n_1 A = \beta B_1, \quad \beta A_2 = -n_2 B_2 \quad (7-170)$$

$$i(\lambda + 2G)(n_1 B_1 + n_2 B_2) + i\lambda \beta (A_1 + A_2) = -P \quad (7-172)$$

$$iG \{ n_1 A_1 + n_2 A_2 + \beta (B_1 + B_2) \} = 0 \quad (7-173)$$

これらを解けば

$$A_1 = -\frac{iPC_5}{G\beta}, \quad A_2 = -\frac{iPa_2 C_6}{G\beta}, \quad B_1 = -\frac{iPa_1 C_5}{G\beta}, \quad B_2 = \frac{iPC_6}{G\beta} \quad (7-174)$$

ここに

$$C_5 = \frac{2 - \alpha_2^2}{(2 - \alpha_2^2) + 4a_1 a_2}, \quad C_6 = \frac{2a_1}{(2 - \alpha_2^2)^2 + 4a_1 a_2} \quad (7-175)$$

係数が求まったから、式(168)(169)に入れてフーリエ逆変換することを考える。ところで、 \wedge サイド関数 $H(\cdot)$ と ディラックのデルタ関数 $\delta(\cdot)$ の複素面におけるフーリエ変換は、

$$H(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta} e^{ix\beta} d\beta, \quad \delta(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\beta} d\beta \quad (7-176)$$

$$(7-177)$$

であるから、変位と応力の表示は原空間で次のように求められる。

$$u = \frac{P}{G} \{ C_5 H(x+a_1 y) + a_2 C_6 H(x+a_2 y) \} \quad (7-178)$$

$$v = \frac{P}{G} \{ a_1 C_5 H(x+a_1 y) - C_6 H(x+a_2 y) \} \quad (7-179)$$

$$\sigma_x = P \{ (\alpha_2^2 - 2\alpha_1^2 + 2) C_5 \delta(x+a_1 y) + 2a_2 C_6 \delta(x+a_2 y) \} \quad (7-180)$$

$$\sigma_y = -P \{ (2 - \alpha_2^2) C_5 \delta(x+a_1 y) + 2a_2 C_6 \delta(x+a_2 y) \} \quad (7-181)$$

$$\tau_{xy} = -P \{ -2a_1 C_5 \delta(x+a_1 y) + (2 - \alpha_2^2) C_6 \delta(x+a_2 y) \} \quad (7-182)$$

これらの式からわかるように $x = -a_1 y$, $x = -a_2 y$ 上の変位と応力に特異性を有していることがわかる。図7-7では応力波頭となってあらわれている。

【平面ひずみから平面応力への換算】 いままで平面ひずみ状態のもとで解析を行って来た。では薄い板のように平面応力状態近似が許される場合はどのようになるだろうか。この違いは一般の三次元空間で与えられる基礎式を平面ひずみ条件により二次元問題に帰着させた時と、平面応力条件

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (7-183)$$

を用いて二次元問題に帰着させた時を比較検討すればよい。弾性係数を λ と G で与えるならば Lamé の定数だけ置換すれば基礎式の形は全く同一になることがわかるだろう。すなわち平面応力状態の場合には、平面ひずみ状態の解析で用いた λ の代わりに

$$\lambda' = \frac{(1-2\nu)\lambda}{1-\nu} = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (7-184)$$

を用いればよい。たとえば縦波の位相速度は

$$c_L \rightarrow \left(\frac{\lambda' + 2G}{\rho} \right)^{1/2} = \left(\frac{E}{\rho(1-\nu^2)} \right)^{1/2} \quad (7-185)$$

となって5.4節の式(290) [69頁]に一致し板波速度となる。また

$$c^2 = \left(\frac{C_t}{C_r} \right)^2 = \frac{\lambda + 2G}{G} \rightarrow \frac{\lambda' + 2G}{G} = \frac{2}{1-\nu} \quad (7-186)$$

となる。

7.4 円孔縁の回転移動荷重

回転移動座標を用いて、弾性無限体中にある円柱空洞の内壁に作用する回転荷重による応答を平面ひずみ状態のもとで解析する。移動負速度を ω とし、図7-8のような静止円柱座標系 (r, θ, z) と荷重とともに移動する座標系 (r_0, θ_0, z_0) を考える。ここでは解析の汎用性のため任意関数状分布荷重が半径 $r_0 = a$ に作用する

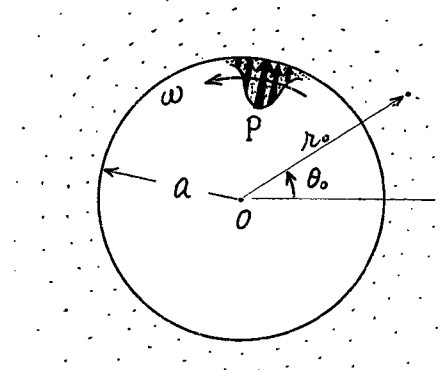


図7-8 : 回転移動荷重

としてみよう。この問題は周座標 θ に関する周期性より無限級数形の解を導出することになる。積分変換を用いないで調和バランス法で解析する。変位ポテンシャル ϕ と ψ を次のように定義する。

$$u_r = \phi_{,r} + \frac{1}{r} \psi_{,\theta} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \phi_{,\theta} - \psi_{,r} \quad u_z = 0 \quad (7-187)$$

そうすれば場を支配する運動方程式は

$$\frac{1}{r} (r \phi_{,r})_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} = \frac{1}{c_L^2} \phi_{,tt} \quad (7-188)$$

$$\frac{1}{r} (r \psi_{,r})_{,r} + \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta\theta} = \frac{1}{c_T^2} \psi_{,tt} \quad (7-189)$$

また、応力式もポテンシャル表示すれば

$$\sigma_r = \lambda \nabla^2 \phi + 2G (\phi_{,rr} + \frac{1}{r} \psi_{,r\theta} - \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta}) \quad (7-190)$$

$$\sigma_\theta = \lambda \nabla^2 \phi + 2G (\frac{1}{r} \phi_{,r} + \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta} - \frac{1}{r} \psi_{,r\theta}) \quad (7-191)$$

$$\tau_{r\theta} = G (\frac{2}{r} \phi_{,r\theta} - \frac{2}{r^2} \phi_{,\theta} + \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta\theta} - \psi_{,rr} + \frac{1}{r} \psi_{,r}) \quad (7-192)$$

以上が本問題に関連する基礎式である。さて、回転荷重分布を一般に $f(\theta_0 - \omega t_0)$ で与えれば境界条件は

$$[\sigma_r]_{r=a} = -P f(\theta_0 - \omega t_0) \quad , \quad [\tau_{r\theta}]_{r=a} = 0 \quad (7-193)$$

と書ける。線形弾性論では重ね合せが可能であるからフーリエ級数に $f(\theta_0 - \omega t_0)$ を

展開した成分について解析し、その後で級数和をとつてよい。従つて $f(\cdot)$ を $C_n \cos(\cdot)$

とおいて解析する。すなわち

$$[O_n]_{r=a} = -PC_n \cos\{m(\theta_0 - \omega t_0)\} \quad (7-194)$$

$m = 0, 1, 2, 3, \dots$

におきかえる。さて、 r 軸を回転軸とする回転座標系に変換する。

$$r_0 = r, \quad \theta_0 = \theta + \omega t, \quad t_0 = t \quad (7-195)$$

運動方程式はこの回転座標系で

$$\varphi_{,rr} + \frac{1}{r} \varphi_{,r} + \left(-\frac{\omega^2}{C_L^2} + \frac{1}{r^2}\right) \varphi_{,\theta\theta} = 0 \quad (7-196)$$

$$\psi_{,rr} + \frac{1}{r} \psi_{,r} + \left(-\frac{\omega^2}{C_T^2} + \frac{1}{r^2}\right) \psi_{,\theta\theta} = 0 \quad (7-197)$$

上式を、変数分離法によつて解く。式(196)で

$$\varphi = R(r) \cdot \Theta(\theta) \quad (7-198)$$

とおけば

$$R_{,rr} + \frac{1}{r} R_{,r} + m^2 \left(\frac{\omega^2}{C_L^2} - \frac{1}{r^2}\right) R = 0 \quad (7-199)$$

$$\Theta_{,\theta\theta} + m^2 \Theta = 0 \quad (7-200)$$

ここに m は分離定数で $m=0$ のときと $m \neq 0$ のときに分けて考える。 $m=0$ のときの

一般解は $R = A \log r + B$, $\Theta = C\theta + D$ の形になる。よつて

$$\varphi_0 = A_{01} \theta \log r + A_{02} \log r + A_{03} \theta + A_{04} \quad (7-201)$$

ψ については

$$\psi_0 = B_{01} \theta \log r + B_{02} \log r + B_{03} \theta + B_{04} \quad (7-202)$$

一方、 $m > 0$ の時の解は θ に関し周期性を有することから正整数となり、また対称性を考慮する。式(199)のベッセルの微分方程式の解としてハンケル関数を用ひ、結局、

$$\varphi_m = A_m H_m^{(1)}\left(\frac{m\omega r}{C_L}\right) \cos m\theta \quad (7-203)$$

同様に

$$\psi_m = B_m H_m^{(1)}\left(\frac{m\omega r}{C_T}\right) \sin m\theta \quad (7-204)$$

又一種ハンケル関数を採用し、又一種ハンケル関数を採用しないのは無限遠の放射性を考慮し

のためにある。ところで回転座標系では式(190)-(192)は

$$O_r = \frac{\lambda \omega^2}{C_L^2} \varphi_{,\theta\theta} + 2G \left(\varphi_{,r\theta} + \frac{1}{r} \psi_{,r\theta} - \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta} \right) \quad (7-205)$$

$$O_\theta = \frac{\lambda \omega^2}{C_L^2} \varphi_{,\theta\theta} + 2G \left(\frac{1}{r} \varphi_{,r} + \frac{1}{r^2} \varphi_{,\theta\theta} + \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta} - \frac{1}{r} \psi_{,r\theta} \right) \quad (7-206)$$

$$T_{r\theta} = G \frac{\omega^2}{C_T^2} \psi_{,\theta\theta} + 2G \left(\frac{1}{r} \varphi_{,r\theta} - \frac{1}{r^2} \varphi_{,\theta} - \psi_{,r\theta} \right) \quad (7-207)$$

[$m=0$ の場合] 式(201)(202)を(205)に入れて

$$O_r^{(0)} = -\frac{2G}{r^2} (A_{01} + B_{03}) \quad (7-208)$$

また式(207)から $T_{r\theta}^{(0)} = \frac{2G}{r^2} (B_{01} - A_{03})$ (7-209)

式(194)より $-\frac{2G}{r^2} (A_{01} + B_{03}) = -PC_0$ (7-210)

また式(193)より $\frac{2G}{r^2} (B_{01} - A_{03}) = 0$ (7-211)

従つて $O_r^{(0)} = -\frac{r^2}{r^2} PC_0$, $T_{r\theta}^{(0)} = 0$ (7-212)

また式(206)より $O_\theta^{(0)} = \frac{r^2}{r^2} PC_0$ (7-213)

を得る。

[$m \geq 1$ の場合] 式(203)(204)を(205)(206)(207)に入れると

$$O_r^{(m)} = \left[A_m \left\{ -\frac{\lambda \omega^2}{C_L^2} m^2 \bar{h}_L(r) + 2G \bar{h}_L(r) \right\} + B_m \left\{ \frac{2G}{r} m \bar{h}_T(r) - \frac{2G}{r^2} m h_T(r) \right\} \right] \cos m\theta \quad (7-215)$$

$$O_\theta^{(m)} = \left[A_m \left\{ \left(-\frac{\lambda \omega^2}{C_L^2} - \frac{2G}{r^2}\right) m^2 h_L(r) + \frac{2G}{r} \bar{h}_L(r) \right\} - B_m \left\{ \frac{2G}{r} m \bar{h}_T(r) - \frac{2G}{r^2} h_T(r) \right\} \right] \cos m\theta \quad (7-216)$$

$$T_{r\theta}^{(m)} = \left[A_m \left\{ \frac{2G}{r^2} m h_L(r) - \frac{2G}{r} m \bar{h}_L(r) \right\} - B_m \left\{ G \frac{m^2 \omega^2}{C_T^2} h_T(r) + 2G \bar{h}_T(r) \right\} \right] \sin m\theta \quad (7-217)$$

$$\therefore \left[\begin{aligned} h_L(r) &= H_m\left(\frac{m\omega}{C_L} r\right), & \bar{h}_L(r) &= \frac{m\omega}{C_L} \left\{ H_{m-1}\left(\frac{m\omega}{C_L} r\right) - \frac{C_L}{\omega r} H_m\left(\frac{m\omega}{C_L} r\right) \right\} \\ \bar{h}_L(r) &= \left(\frac{m\omega}{C_L}\right)^2 \left\{ \frac{m(m+1)C_L^2}{m^2 \omega^2} - 1 \right\} H_m\left(\frac{m\omega}{C_L} r\right) - \frac{C_L}{m\omega r} H_{m-1}\left(\frac{m\omega}{C_L} r\right) \\ h_T(r) &= H_m\left(\frac{m\omega}{C_T} r\right), & \bar{h}_T(r) &= \frac{m\omega}{C_T} \left\{ H_{m-1}\left(\frac{m\omega}{C_T} r\right) - \frac{C_T}{\omega r} H_m\left(\frac{m\omega}{C_T} r\right) \right\} \\ \bar{h}_T(r) &= \left(\frac{m\omega}{C_T}\right)^2 \left\{ \frac{m(m+1)C_T^2}{m^2 \omega^2} - 1 \right\} H_m\left(\frac{m\omega}{C_T} r\right) - \frac{C_T}{m\omega r} H_{m-1}\left(\frac{m\omega}{C_T} r\right) \end{aligned} \right] \quad (7-218)$$

式(194)の境界条件を考慮して A_m, B_m を求めれば

$$A_m = \frac{PC_m}{G\Delta_m} \left\{ 2\bar{h}_r(a) + \left(\frac{m\omega a}{C_T}\right)^2 h_r(a) \right\} \quad (7-219)$$

$$B_m = -\frac{2PC_m m}{G\Delta_m} \left\{ h_l(a) - a\bar{h}_l(a) \right\} \frac{1}{a^2} \quad (7-220)$$

ここに分母の Δ_m は

$$\Delta_m = \left\{ \frac{\lambda}{G} \left(\frac{m\omega a}{C_L} \right)^2 h_l(a) - 2\bar{h}_l(a) \right\} \left\{ 2\bar{h}_r(a) + \left(\frac{m\omega a}{C_T}\right)^2 h_r(a) \right\} + 4m^2 \left\{ h_l(a) - a\bar{h}_l(a) \right\} \left\{ h_r(a) - a\bar{h}_r(a) \right\} \frac{1}{a^2} \quad (7-221)$$

結局 $m \geq 1$ に対する解は 式(219)(220)を(215)(216)(217)に入れて求めると

$$-\frac{\sigma_r^{(m)}}{P} = \left[\left\{ \left(\frac{m\omega a}{C_T}\right)^2 h_r(a) + 2\bar{h}_r(a) \right\} \left\{ -\frac{\lambda}{G} \left(\frac{m\omega a}{C_L}\right)^2 h_l(r) + 2\bar{h}_l(r) \right\} + \frac{4m^2}{\lambda a^2} \left\{ h_l(a) - a\bar{h}_l(a) \right\} \left\{ \bar{h}_r(r) - \frac{1}{r} h_r(r) \right\} \right] \frac{\cos m\theta}{\Delta_m} C_m \quad (7-222)$$

$$-\frac{\sigma_\theta^{(m)}}{P} = \left[\left\{ \left(\frac{m\omega a}{C_T}\right)^2 h_r(a) + 2\bar{h}_r(a) \right\} \left\{ \left(\frac{\lambda\omega^2 a^2}{G} + \frac{2}{r^2}\right) m^2 h_l(r) - \frac{2}{r} \bar{h}_l(r) \right\} - \frac{4m^2}{\lambda a^2} \left\{ h_l(a) - a\bar{h}_l(a) \right\} \left\{ \bar{h}_r(r) - \frac{1}{r} h_r(r) \right\} \right] \frac{\cos m\theta}{\Delta_m} C_m \quad (7-223)$$

$$-\frac{\tau_{r\theta}^{(m)}}{P} = \left[-\frac{1}{r} \left(\frac{m\omega a}{C_T}\right)^2 h_r(a) + 2\bar{h}_r(a) \right] \left\{ \frac{1}{r} h_l(r) - \bar{h}_l(r) \right\} - \frac{1}{a^2} \left\{ h_l(a) - a\bar{h}_l(a) \right\} \left\{ \left(\frac{m\omega a}{C_T}\right)^2 h_r(r) + 2\bar{h}_r(r) \right\} \right] \frac{2m}{\Delta_m} C_m \quad (7-224)$$

具体的に $f(\cdot)$ を与えれば 以上の解の C_m に応じた重ね合せを行うことにより 円孔周囲の動的応力解が求められる。これらの解析は 高速回転軸受等の評価のために役立つ。

問題

[1] ディラックのデルタ関数は 形式的に

$$\delta(\theta) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \cos m\theta \right)$$

の形に展開できることを知って $f(\theta) = P\delta(\theta)$ と与えられる時の応力解を求めよ。

8. 衝撃荷重を受ける弾性体

6章で、半無限弾性体表面に、分布荷重が調和振動で作用する時の応答を考えた。ここでは、ある時刻に急激に負荷の作用する衝撃荷重の応答を考える。衝撃解析は、特別の場合を除いて高度な取扱が必要となることが多く、一つ一つ物理現象と解析式との対応を考え手順よく進めることが大切である。時間に対して荷重作用に周期性のない衝撃であっても、その周期を無限大に極限したものと考れば、調和波の重ね合せであると考えられよう。しかし、その重ね合せは級数和によるものではなく、積分による形をとる。すなわち、級数表示の解を導く代わりに積分表示の解を導くことである。このためには、積分変換法を用いる。その代表的なものが 時間 t に関するラプラス積分変換である。

8.1 一様な衝撃圧を受ける半無限体

非常に簡単な問題として ただ一つの空間座標 y のみに依存する衝撃を考える。図 8-1 のように直角座標系をとれば、用いる基礎式は

$$v = \phi, y \quad (8-1)$$

$$\phi,_{tt} = C_L^2 \phi,_{yy} \quad (8-2)$$

$$\sigma_y = (\lambda + 2G)\phi,_{yy} \quad (8-3)$$

$$\sigma_x = \lambda\phi,_{yy} = \left(\frac{\lambda}{\lambda + 2G}\right)\sigma_y = \left(1 - 2\frac{G}{C_L^2}\right)\sigma_y \quad (8-4)$$

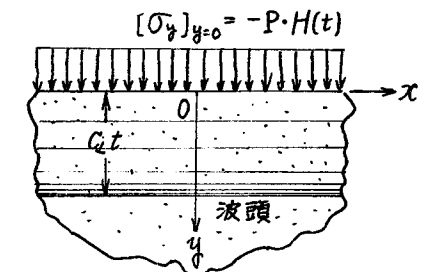


図 8-1. 半無限体の衝撃

初期条件を表式化すると、衝撃を受ける以前は、すべての場所において静止し、ひずみがないから $t \leq 0$ に対して

$$\phi = \phi,_{,t} = 0 \quad (8-5)$$

また表面 ($y=0$) で与えられる境界条件は、 $t > 0$ で一様な圧力を与えるとして

$$[\sigma_y]_{y=0} = -P \cdot H(t) \quad (8-6)$$

$H(\cdot)$ はヘビサイド関数である。式(2)の解を求めるため、通常ラプラス変換対を用いて

式(2)を変換すれば x を変換パラメータとして

$$x^2 \phi^* = c_l^2 \phi_{,yy}^* \quad (8-7)$$

ここに式(5)の条件を用いて時間微分形のラプラス変換をしている。*は変換された関数であることを示す。式(7)は常微分方程式となっておりその解として

$$\phi^* = A e^{-x\sqrt{\lambda}/c_l} \quad (8-8)$$

を採用する。式(6)の変換形は

$$[\phi_{,y}^*]_{y=0} = -P/x \quad (8-9)$$

また、式(3)と(8)より

$$[\phi_{,y}^*]_{y=0} = [(\lambda+2G)A \cdot \frac{x^2}{c_l^2} e^{-x\sqrt{\lambda}/c_l}]_{y=0} = -P/x \quad (8-10)$$

となるから

$$A = -\frac{P}{x} \cdot \frac{c_l^2}{(\lambda+2G)x^2} = -\frac{P}{\rho x^3} \quad (8-11)$$

これを式(8)に入れてラプラス逆変換を行う。

$$\phi = \mathcal{L}^{-1}[\phi^*] = -\frac{P}{\rho} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{x^3} e^{-x\sqrt{\lambda}/c_l}\right] = -\frac{P}{2\rho} \left(t - \frac{y}{c_l}\right)^2 H\left(t - \frac{y}{c_l}\right) \quad (8-12)$$

したがって、式(3)より

$$\sigma_y = \rho c_l^2 \left\{ -\frac{P}{2\rho} \cdot \frac{2}{c_l^2} \cdot H\left(t - \frac{y}{c_l}\right) \right\} = -P \cdot H\left(t - \frac{y}{c_l}\right) \quad (8-13)$$

また式(1)より

$$v = \phi_{,y} = \frac{P}{\rho c_l} \left(t - \frac{y}{c_l}\right) \cdot H\left(t - \frac{y}{c_l}\right) \quad (8-14)$$

σ_x は式(4)に式(13)を代入すれば得られる。

$$\sigma_x = -P \left(1 - 2 \frac{c_l^2}{c_t^2}\right) \cdot H\left(t - \frac{y}{c_l}\right) \quad (8-15)$$

これらの解より、本問の衝撃現象は次のようにまとめられる。

波頭(wave front)の伝は速度は縦波の速度 c_l で、深さ方向に擾乱が伝わっていく。波頭後方の応力 σ_y は一定値 $(-P)$ であり、変位 v は波頭からの距離に比例して単調に増大する。

問題

- [1] 半無限体表面に衝撃せん断力を与えた時、どうなるか。図8-1で境界条件を $[\tau_{yz}]_{y=0} = QH(t)$ で与え解析せよ。 Q は定数。基礎式に注意せよ。

8.2 有限幅せん断衝撃を受ける半無限体

空間座標についてはフーリエ積分変換を、時間についてはラプラス変換を用いることにより半無限体表面にある幅にわたって一定荷重がある時間にわたって作用する衝撃問題がエレガントに取扱えることを示そう。この解析は任意分布荷重に対する応答の解明への手掛を解析的に与えるということでも重要であり、分布荷重による応答を固有寸法という考えを用いて整理できる。固有寸法は形状を与える長さであったり、又は荷重分布幅であったり、荷重の作用時間であったりする。異種材料を考える時は、波の伝は距離をとることでも、応答を特徴づけるものである。インパルス衝撃解又は集中荷重ステップ衝撃解を組合せて(積分して)固有寸法をもつ衝撃を得るには、二通り考えられる。たとえば、図8-2(a)のように時間積分形にする場合と(b)のように空間積分形にする場合とがある。ここでは前者の考えにしたがって解析する。解析手法はCagniard法を併用するフーリエ・ラプラス=重積分変換(以下FL変換という)により、逆三角関数と対数関数表示の閉じた解析解(厳密解)が得られる。

図8-2(a)に示す直角座標系 (x, y) で問題を設定する。半無限体表面 $(y=0)$ の有限幅領域 $|x| < a$ に、時間 T にわたって作用する一定大きさ Q の縦せん断荷重とすれば、境界条件は複数個のヘビサイド関数 $H(\cdot)$ により、次のように表わされる。

$$[\tau_{yz}]_{y=0} = Q \cdot \{ H(t) - H(t-T) \} \{ H(x+a) - H(x-a) \} \quad (8-16)$$

ここに、 T と a が固有寸法で線荷重などの問題と異なる特徴を与える。衝撃以前で弾性体が静止している次の初期条件

$$[w]_{t=0} = [\dot{w}]_{t=0} = 0 \quad (8-17)$$

と、無限遠点で応答が無限大にならない条件を考慮する。ただし w は x 方向変位を示す。縦せん断変形に対する波動方程式は、

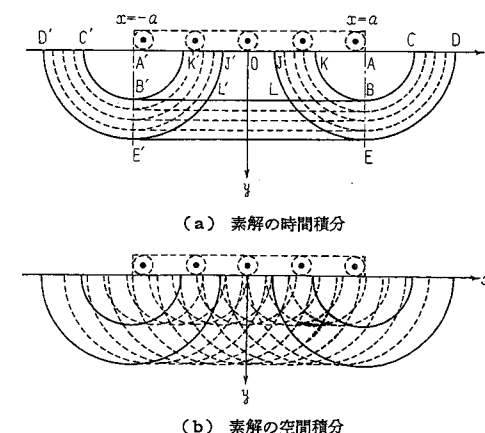


図8-2 直角座標系と衝撃波の様相

$$w_{,xx} + w_{,yy} = \frac{1}{c_T^2} \ddot{w} \quad (8-18)$$

また、恒等的に 0 とならない応力の変位表示は

$$\tau_{yz} = Gw_{,y}, \quad \tau_{xz} = Gw_{,x} \quad (8-19)(8-20)$$

次のようにフーリエ変換とラプラス変換を定義して解析する。

$$\mathcal{F}[w(x)] \equiv \bar{w}(s\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x) e^{-i s \xi x} dx \quad (8-21)$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\bar{w}(s\xi)] \equiv w(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{w}(s\xi) e^{i s \xi x} d(s\xi) \quad (8-22)$$

$$\mathcal{L}[w(t)] \equiv w^*(s) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-st} dt \quad (8-23)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[w^*(s)] \equiv w(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} w^*(s) e^{st} dt \quad (8-24)$$

ここにフーリエ変換パラメータをラプラス変換パラメータ \$s\$ を含む \$s\xi\$ にとっている。式(17)

を考慮して式(18)をFL変換すれば

$$\bar{w}_{,yy} - s^2(\xi^2 + \nu^2) \bar{w}^* = 0 \quad \text{ただし } \nu^2 = c_T^2 \quad (8-25)$$

式(25)の基本解のうち \$y \to +\infty\$ で発散しないものは \$\text{Re} \sqrt{\xi^2 + \nu^2} > 0\$ の分岐をとるならば

\$\text{Re } s > 0\$ のとき

$$\bar{w}^* = Z \exp[-s y \sqrt{\xi^2 + \nu^2}] \quad (8-26)$$

\$Z\$ は境界条件より定められる \$s\$ と \$\xi\$ の未知関数である。式(19)(20)をFL変換し、式(26)

を代入すれば

$$\bar{\tau}_{yz}^* = -GZ s \sqrt{\xi^2 + \nu^2} \exp[-s y \sqrt{\xi^2 + \nu^2}] \quad (8-27)$$

$$\bar{\tau}_{xz}^* = iG s \xi Z \exp[-s y \sqrt{\xi^2 + \nu^2}] \quad (8-28)$$

関数 \$H(\cdot)\$ のフーリエ変換は、超関数の意味で存在しうるので、ここでは

$$\mathcal{F}[H(x)] = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-\beta x} e^{-i s x} dx \right]; \quad \text{Re } \beta > 0 \quad (8-29)$$

と定義すれば式(16)より

$$[\bar{\tau}_{yz}^*]_{y=0} = \frac{Q}{s} (1 - e^{-sT}) (e^{i s \xi a} - e^{-i s \xi a}) \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\beta + i s \xi} \right) \quad (8-30)$$

式(27)(30)より \$Z\$ を求めれば

$$Z = - \frac{Q}{G s^2 \sqrt{\xi^2 + \nu^2}} (1 - e^{-sT}) (e^{i s \xi a} - e^{-i s \xi a}) \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\beta + i s \xi} \right) \quad (8-31)$$

これを式(26)に入れ、フーリエ逆変換する

$$w^* = - \frac{Q(1 - e^{-sT})}{2\pi s G} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \nu^2}} \left[\exp[-s y \sqrt{\xi^2 + \nu^2} - i \xi(x+a)] - \exp[-s y \sqrt{\xi^2 + \nu^2} - i \xi(x-a)] \right] \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\beta + i s \xi} \right) d\xi \quad (8-32)$$

\$\beta \to 0\$ の極限では

$$w^* = Q i (1 - e^{-sT}) (W_1^* - W_2^*) / (2\pi s^2 G) \quad (8-33)$$

$$\text{ここへ } W_1^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 + \nu^2}} \exp[-s y \sqrt{\xi^2 + \nu^2} - i \xi(x+a)] d\xi \quad (8-34)$$

$$W_2^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi \sqrt{\xi^2 + \nu^2}} \exp[-s y \sqrt{\xi^2 + \nu^2} - i \xi(x-a)] d\xi \quad (8-35)$$

一方、応力については次を得る。

$$\tau_{yz}^* = -Q i (1 - e^{-sT}) (M_1^* - M_2^*) / (2\pi s) \quad (8-36)$$

$$\tau_{xz}^* = -Q (1 - e^{-sT}) (N_1^* - N_2^*) / (2\pi s) \quad (8-37)$$

$$\text{ここへ } M_{1/2}^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp[-s y \sqrt{\xi^2 + \nu^2} - i \xi(x \pm a)] d\xi \quad (\text{複号同順}) \quad (8-38)$$

$$N_{1/2}^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \nu^2}} \exp[-s y \sqrt{\xi^2 + \nu^2} - i \xi(x \pm a)] d\xi \quad (\text{複号同順}) \quad (8-39)$$

式(34)(35)(38)(39)の原空間表示が得られれば変位と応力は、たまたみ込みの定理(convolution theorem)*

により求まる。そのためには以下に述べるCagniard法が好適である。

まず式(34)の逆変換を考える。変換パラメータ \$s\$ の実部が正で対象空間が \$y > 0\$ のとき、

図8-3のように複素 \$\xi\$ 面に分岐点 \$\xi = \pm i\nu\$

から虚軸に沿って無限遠 \$\xi = \pm i\infty\$ にのびる

分岐線を入れ、分岐 \$\text{Re} \sqrt{\xi^2 + \nu^2} > 0\$ を

選んで解析する。この一面の \$\xi\$ 面で実軸

上に沿う積分路 \$\Gamma_0\$ がフーリエ逆変換の

ためのものである。ところで式(32)の被積

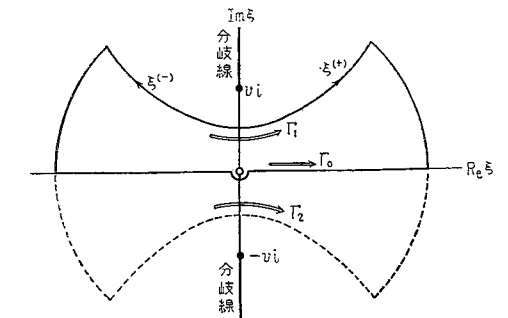


図8-3 複素 \$\xi\$ 面における積分路の変換

(*) \$g_1(s), g_2(s)\$ を \$f_1(t), f_2(t)\$ のラプラス変換とするとき、\$\int_0^t f_1(s) f_2(t-s) ds\$ は \$\{g_1(s) g_2(s)\}\$ のラプラス逆変換になっているという定理

分関数の形より B を 0 に極限にゆくにつれ上側 ($\text{Im} \xi > 0$) から限りなく原点に近づく一位の極が存在する。したがって積分路 Γ_0 は図 8-3 のように原点にある極の下側をまわる。任意な正の $(x+a)$ に対し Γ_0 を変形して式(34)から W_1 を求めるには十分大きな $|\xi|$ における積分値が消失するよう $\text{Im} \xi > 0$ の領域に変形する。これを考慮して Cauchy 法の特徴である補助変数変換 $\xi \rightarrow t$ を行う。すなわち

$$t = y\sqrt{\xi^2 + v^2} - i\xi(x+a) \quad (8-40)$$

ξ について解き $\xi^{(+)}$, $\xi^{(-)}$ とすれば

$$\xi^{(\pm)} = \frac{it(x+a) \pm y\sqrt{t^2 - c_1^2}}{y^2 + (x+a)^2}, \quad (\text{複号同順}) \quad (8-41)$$

ただし $c_1 = v\sqrt{y^2 + (x+a)^2} \quad (8-42)$

すなわち c_1 は荷重分布端 $(-a, 0)$ から任意点 (x, y) まで横波が伝はする時間である。いま、 t を c_1 から $+\infty$ まで変化させると式(40)を満たす点 $\xi^{(+)}$ と点 $\xi^{(-)}$ は分岐点より原点に近い虚軸上の点 $\xi = i v(x+a) / \sqrt{y^2 + (x+a)^2}$ を出発点として図 8-3 のようにそれぞれ無限遠にのびる双曲線上を動く。この軌跡を Γ_0 の変換された新積分路として利用する。 $(x+a)$ が正のときコーシーの積分定理より Γ_0 と等価なものを求めれば、 σ -象限と σ -象限の無限遠弧による積分がジョルダンの補助定理により消失するので、 σ -象限内のみ向きを逆にした積分路 Γ_1 によるものと、原点の留数から得られるものとの和になる。一方、 $(x+a)$ が負の場合は $\text{Im} \xi < 0$ の領域の積分路 Γ_2 を利用する。この時、 $(x+a) > 0$ の場合とことなり閉回路内に原点の極が入らないので留数計算は必要としない。結局 $(x+a)$ の正負に共用できる形でまとめれば

$$W_1^* = \int_{c_1}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi^{(+)}\sqrt{\xi^{(+)^2 + v^2}} \cdot \frac{\partial \xi^{(+)}}{\partial t} - \frac{1}{\xi^{(-)}\sqrt{\xi^{(-)^2 + v^2}} \cdot \frac{\partial \xi^{(-)}}{\partial t}} \right) e^{-\xi t} dt + 2\pi i \cdot e^{-iyv} \cdot \frac{1}{v} \cdot H(x+a) \quad (8-43)$$

式(43)の右辺第1項は時間 t が c_1 だけ移行したラプラス変換となっているから、逆変換は視察によってできる。式(41)の $\xi^{(\pm)}$ を代入して整理すれば

$$W_1 = - \frac{2i(x+a)t}{(t^2 - y^2v^2)\sqrt{t^2 - c_1^2}} \cdot H(t - c_1) + 2\pi i \cdot \delta(t - yv) \cdot \frac{1}{v} \cdot H(x+a) \quad (8-44)$$

これは式(34)の原空間表示である。式(35)は式(34)の $(x+a)$ を $(x-a)$ に置きかえただけである

から
$$W_2 = - \frac{2i(x-a)t}{(t^2 - y^2v^2)\sqrt{t^2 - c_2^2}} \cdot H(t - c_2) + 2\pi i \delta(t - yv) \cdot \frac{1}{v} \cdot H(x-a) \quad (8-45)$$

こゝに
$$c_2 = v\sqrt{y^2 + (x-a)^2} \quad (8-46)$$

M_1, M_2, N_1, N_2 のそれぞれは式(38)(39)から図 8-3 の積分路 Γ_1 と Γ_2 を利用する同様な手順によって求まり、整理すれば次のようになる。ただし N_1, N_2 を求める時、複素面の原点に極が存在しないことに注意する。

$$M_1 = - \frac{2i(x+a)v^2y}{(t^2 - y^2v^2)\sqrt{t^2 - c_1^2}} \cdot H(t - c_1) + 2\pi i \delta(t - yv) H(x+a) \quad (8-47)$$

$$M_2 = - \frac{2i(x-a)v^2y}{(t^2 - y^2v^2)\sqrt{t^2 - c_2^2}} \cdot H(t - c_2) + 2\pi i \delta(t - yv) H(x-a) \quad (8-48)$$

$$N_1 = \frac{2}{\sqrt{t^2 - c_1^2}} \cdot H(t - c_1) \quad (8-49)$$

$$N_2 = \frac{2}{\sqrt{t^2 - c_2^2}} \cdot H(t - c_2) \quad (8-50)$$

次に、式(33)のラプラス逆変換を考える。 T - t 入りの定理より

$$\mathcal{L}^{-1}[(W_1^* - W_2^*)(1 - e^{-T})/s^2] = \int_0^t \{ (t-\eta)H(t-\eta) - (t-T-\eta)H(t-T-\eta) \} (W_1 - W_2) d\eta \quad (8-51)$$

式(44)(45)を式(51)に入れて変位を求めれば

$$W = \frac{Q}{\pi G} \left[(x+a)(I_1 - I_2) - (x-a)(I_3 - I_4) - \frac{\pi}{v} \{ H(x+a) - H(x-a) \} (I_5 - I_6) \right] \quad (8-52)$$

こゝに
$$I_1 = \begin{cases} 0 & (t \leq c_1) \\ \int_{c_1}^t \frac{\eta(t-\eta)}{(\eta^2 - y^2v^2)\sqrt{\eta^2 - c_1^2}} d\eta & (t > c_1) \end{cases} \quad (8-53)$$

$$I_2 = \begin{cases} 0 & (t \leq c_1 + T) \\ \int_{c_1}^{t-T} \frac{\eta(t-T-\eta)}{(\eta^2 - y^2v^2)\sqrt{\eta^2 - c_1^2}} d\eta & (t > c_1 + T) \end{cases} \quad (8-54)$$

$$I_3 = \begin{cases} 0 & (t \leq c_2) \\ \int_{c_2}^t \frac{\eta(t-\eta)}{(\eta^2 - y^2v^2)\sqrt{\eta^2 - c_2^2}} d\eta & (t > c_2) \end{cases} \quad (8-55)$$

$$I_4 = \begin{cases} 0 & (t \leq c_2 + T) \\ \int_{c_2}^{t-T} \frac{\eta(t-T-\eta)}{(\eta^2 - y^2v^2)\sqrt{\eta^2 - c_2^2}} d\eta & (t > c_2 + T) \end{cases} \quad (8-56)$$

$$I_5 = \begin{cases} 0 & (t \leq yv) \\ \int_0^t \delta(\eta - yv) \cdot (t - \eta) d\eta & (t > yv) \end{cases} \quad (8-57)$$

$$I_6 = \begin{cases} 0 & (t \leq yv + T) \\ \int_0^{t-T} \delta(\eta - yv) \cdot (t - T - \eta) d\eta & (t > yv + T) \end{cases} \quad (8-58)$$

I_1 から I_6 の値が t により、いずれか = 通りあるのは、それぞれに対応する波頭を境にして解が異なるため、図 8-2(a) でこの対応を考れば

$$\begin{aligned} I_1 &\leftrightarrow \text{波頭 } \widehat{D'E'J} & I_2 &\leftrightarrow \text{波頭 } \widehat{C'B'K'} \\ I_3 &\leftrightarrow \text{波頭 } \widehat{DEJ} & I_4 &\leftrightarrow \text{波頭 } \widehat{CBK} \\ I_5 &\leftrightarrow \text{波頭 } \widehat{EE'} & I_6 &\leftrightarrow \text{波頭 } \widehat{BB'} \end{aligned}$$

となる。また、 I_1 から I_6 に現われる積分は境界の荷重を時間について $d(t)$ で与えた時の素解を 図 8-2(a) のように時間積分している形となっている。これらは被積分関数を部分分数にすれば次の等式より不定積分できる。

$$\int \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^2 - \tau_1^2}} = 2 \log(\sqrt{\eta - \tau_1} + \sqrt{\eta + \tau_1}) \quad (\eta > \tau_1 > 0) \quad (8-59)$$

$$\int \frac{d\eta}{(\eta - yv)\sqrt{\eta^2 - \tau_1^2}} = \frac{1}{v|x+a|} \text{Arccsin} \left\{ \frac{yv\eta - \tau_1^2}{\tau_1(\eta - yv)} \right\} \quad (\eta > \tau_1 > yv) \quad (8-60)$$

(主値をとる)

式(60)には式(42)の関係が考慮されている。ここで簡潔のため

$$G(\eta, \tau, \eta) \equiv \text{Arccsin} \left\{ \frac{yv\eta - \tau_1^2}{\tau_1(\eta - yv)} \right\} \quad (8-61)$$

$$F(\tau, \eta) \equiv \log(\sqrt{\eta - \tau_1} + \sqrt{\eta + \tau_1}) \quad (8-62)$$

を定義すれば、図 8-2(a) の各々の領域に対して次式を得る。

$$I_1 - I_2 = \begin{cases} -2\{F(\tau, t) - F(\tau, t-T)\} + [(t-yv)\{G(\eta, \tau, t) - G(\eta, \tau, t-T)\} \\ + (t+yv)\{G(-\eta, \tau, t) - G(-\eta, \tau, t-T)\} + T\{G(\eta, \tau, t-T) - G(\eta, \tau, \tau) \\ + G(-\eta, \tau, t-T) - G(-\eta, \tau, \tau)\}] / (2v|x+a|) & (t > \tau + T : \text{図 8-2(a) の領域 } C'B'K'C' \text{ 内}) \\ -2\{F(\tau, t) - F(\tau, \tau)\} + [(t-yv)\{G(\eta, \tau, t) - G(\eta, \tau, \tau)\} \\ + (t+yv)\{G(-\eta, \tau, t) - G(-\eta, \tau, \tau)\}] / (2v|x+a|) & (\tau + T \geq t > \tau : \text{領域 } B'C'D'E'J'K'B' \text{ 内}) \\ 0 & (t < \tau : \text{領域 } D'E'J'D' \text{ 外}) \end{cases} \quad (8-63)$$

$$I_3 - I_4 = \begin{cases} -2\{F(\tau_2, t) - F(\tau_2, t-T)\} + [(t-yv)\{G(\eta, \tau_2, t) - G(\eta, \tau_2, t-T)\} \\ + (t+yv)\{G(-\eta, \tau_2, t) - G(-\eta, \tau_2, t-T)\} + T\{G(\eta, \tau_2, t-T) - G(\eta, \tau_2, \tau_2) \\ + G(-\eta, \tau_2, t-T) - G(-\eta, \tau_2, \tau_2)\}] / (2v|x-a|) & (t > \tau_2 + T ; \text{領域 } CBKC \text{ 内}) \\ -2\{F(\tau_2, t) - F(\tau_2, \tau_2)\} + [(t-yv)\{G(\eta, \tau_2, t) - G(\eta, \tau_2, \tau_2)\} \\ + (t+yv)\{G(-\eta, \tau_2, t) - G(-\eta, \tau_2, \tau_2)\}] / (2v|x-a|) & (\tau_2 + T \geq t > \tau_2 ; \text{領域 } BCDEJKB \text{ 内}) \\ 0 & (t < \tau_2 ; \text{領域 } DEJD \text{ 外}) \end{cases} \quad (8-64)$$

$$I_5 - I_6 = \begin{cases} T & (t > yv + T ; \text{長方形 } AA'B'B \text{ 内}) \\ t - yv & (yv + T \geq t > yv ; \text{長方形 } BB'E'E \text{ 内}) \\ 0 & (t < yv ; \text{長方形 } AA'E'E \text{ の外}) \end{cases} \quad (8-65)$$

式(65)で長方形領域について値を与えているのは、式(52)の右辺第2項から明らかのように $|x| > a$ で消失するためである。以上で変位 w は式(52)より容易に求まる。

次に応力について考える。 M_1, M_2, N_1, N_2 が式(47)-(50)で与えらるるので式(36)(37)のラプラス逆変換をすれば

$$\tau_{yz} = -\frac{Qv^2y}{\pi} \int_{t-T}^t \frac{1}{\eta^2 y^2} \left\{ \frac{(x+a)H(\eta - \tau_1)}{\sqrt{\eta^2 - \tau_1^2}} - \frac{(x-a)H(\eta - \tau_2)}{\sqrt{\eta^2 - \tau_2^2}} \right\} d\eta + Q \{ H(x+a) - H(x-a) \} \{ H(t-yv) - H(t-T-yv) \} \quad (8-66)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Q}{\pi} \int_{t-T}^t \left\{ \frac{H(\eta - \tau_1)}{\sqrt{\eta^2 - \tau_1^2}} - \frac{H(\eta - \tau_2)}{\sqrt{\eta^2 - \tau_2^2}} \right\} d\eta \quad (8-67)$$

したがって

$$\tau_{yz} = -\frac{Q}{2\pi} \{ (x+a)I_7 - (x-a)I_8 \} + Q \{ H(x+a) - H(x-a) \} \{ H(t-yv) - H(t-T-yv) \} \quad (8-68)$$

$$\tau_{xz} = -\frac{Q}{2\pi} (I_9 - I_{10}) \quad (8-69)$$

ただし

$$I_7 = \begin{cases} \{ G(\eta, \tau, t) - G(-\eta, \tau, t) - G(\eta, \tau, t-T) + G(-\eta, \tau, t-T) \} / |x+a| & (t > \tau + T) \\ \{ G(\eta, \tau, t) - G(-\eta, \tau, t) - G(\eta, \tau, \tau) + G(-\eta, \tau, \tau) \} / |x+a| & (\tau + T \geq t > \tau) \\ 0 & (t \leq \tau) \end{cases} \quad (8-70)$$

$$I_8 = \begin{cases} \{G(y, \tau_2, t) - G(-y, \tau_2, t) - G(y, \tau_2, t-T) + G(-y, \tau_2, t-T)\} / \sqrt{x-a} & ; (t > \tau_2 + T) \\ \{G(y, \tau_2, t) - G(-y, \tau_2, t) - G(y, \tau_2, \tau_2) + G(-y, \tau_2, \tau_2)\} / \sqrt{x-a} & ; (\tau_2 + T \geq t > \tau_2) \\ 0 & ; (t \leq \tau_2) \end{cases} \quad (8-71)$$

$$I_9 = \begin{cases} 2\{F(\tau_1, t) - F(\tau_1, t-T)\} & ; (t > \tau_1 + T) \\ 2\{F(\tau_1, t) - F(\tau_1, \tau_1)\} & ; (\tau_1 + T \geq t > \tau_1) \\ 0 & ; (t \leq \tau_1) \end{cases} \quad (8-72)$$

$$I_{10} = \begin{cases} 2\{F(\tau_2, t) - F(\tau_2, t-T)\} & ; (t > \tau_2 + T) \\ 2\{F(\tau_2, t) - F(\tau_2, \tau_2)\} & ; (\tau_2 + T \geq t > \tau_2) \\ 0 & ; (t \leq \tau_2) \end{cases} \quad (8-73)$$

このように導かれた解は、逆三角関数と対数関数の関じた形であるため変位や応力分布はきわめて簡単に求まり、分布は等値線図で説明することができる。無次元量として

- $T^\circ = C_T T / a$; 無次元作用時間
- $t^\circ = C_T t / a$; 無次元経過時間
- $x^\circ = x/a, y^\circ = y/a$; 無次元座標
- $w^\circ = Gw/aQ$; 無次元変位
- $\tau_{yz}^\circ = \tau_{yz}/Q, \tau_{xz}^\circ = \tau_{xz}/Q$; 無次元応力

を用いて整理する。その結果を図8-4から図8-9に掲げる。

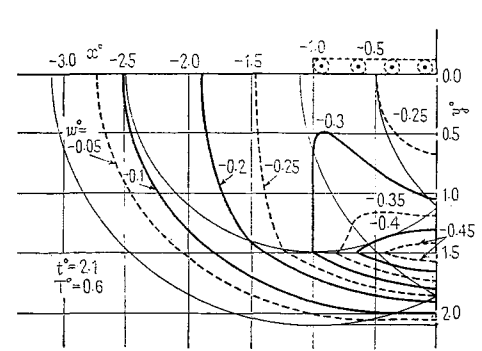


図 8-4, 等変位線図

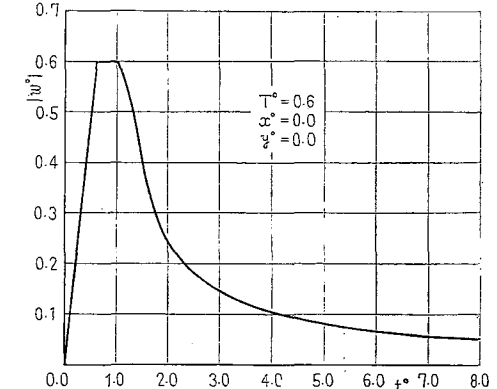


図8-5, 座標原点の変位の時間変化

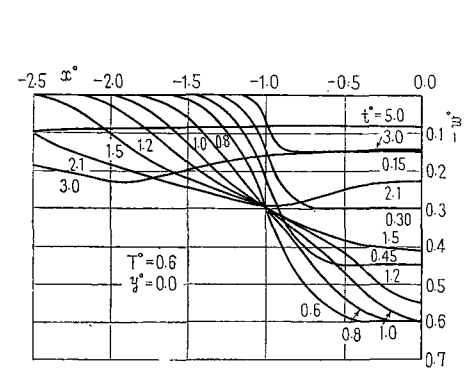


図8-6, 表面変形の推移

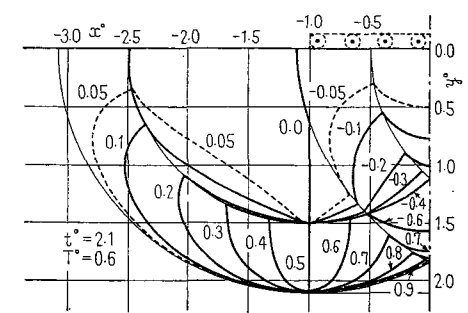


図 8-8, \tau_{yz}^\circ の等応力線図

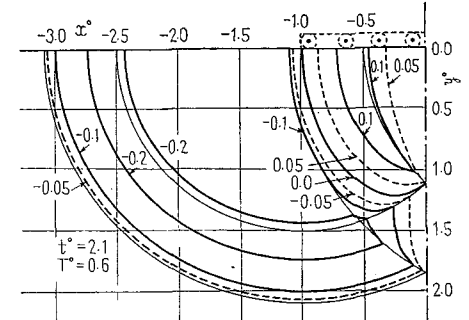


図8-7: \tau_{xz}^\circ の等応力線図

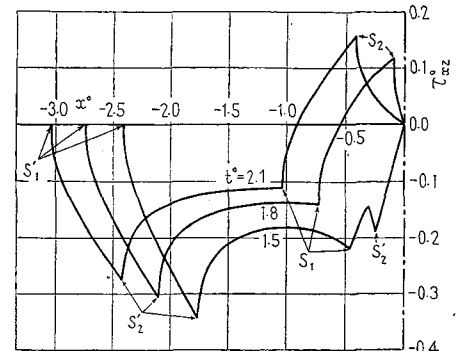


図 8-9, y^\circ = 0.5 における \tau_{xz}^\circ の分布

図で細実線は波頭を示す。変位 $|w^\circ|$ の最大値は y 軸上の二次平面波頭 (BB') 近辺に生ずる。 τ_{yz}° の最大値は、平面一次波頭が到着した時に生ずる。図8-8にもあらわれているように与えたせん断が正であっても負となる領域 A'B'L'J' がある。これは扇形波と平面波の干渉によって明らかにされるもので荷重幅と作用時間の固有寸法を考慮することによって明らかにされる筈である。図8-9は $y^\circ = 0.5$ における τ_{xz}° の様子を時間をパラメータとして描いたものである。図8-2(a)と関連づければ荷重端 A' から生じた一次と二次の扇形波頭のそれぞれを S_1', S_2' または A' からのものを S_1, S_2 とすれば、分布曲線の折れた所に各々の波頭が位置している。 $x < 0$ の領域では S_2' が最小, S_2 が最大となる。

以上の解析は FL 変換を Cagniard 法により逆変換し、波形パターンも予想された通りになり、手法が適切であることを示している。ことに荷重の作用点近傍の短時間における過渡的応答をよく説明することができる。他の解析にも応用できよう。

8.3 有限厚平板端の保護材の衝撃応答

前節の解析法の拡張した応用として固有寸法をふやした形状の問題を考慮しよう。すなわち、○数種類の均質等弾性体が図8-10のように有限厚さ l の弾性平板端を保護する形で組合せられているとする。形状寸法や弾性係数を図のようにする。本問題の境界条件は

$$\tau_{xz}^{(1)}(0, y) = 0 \quad (8-74)$$

$$\tau_{xz}^{(2)}(0, y) = 0 \quad (8-75)$$

$$\tau_{xz}^{(1)}(l, y) = 0 \quad (8-76)$$

$$\tau_{xz}^{(2)}(l, y) = 0 \quad (8-77)$$

$$\tau_{yz}^{(1)}(x, 0) = Q\delta(x-a)H(t) \quad (8-78)$$

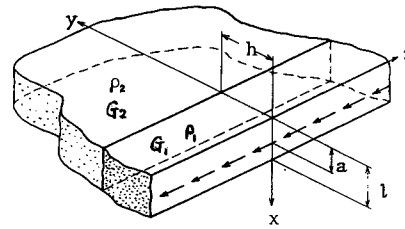


図8-10:有限厚弾性平板端に取付けられた異種弾性材に線状縦せん断衝撃

また接合面($y=l$)で τ_{yz} と W が連続。および衝撃以前で静止している初期条件を加える。ところで縦せん断衝撃を受けるこの複合体の上下表面($x=0$ と $x=l$)が自由面となるのは、これらの面が荷重分布の対称面になれば実現できるので、鏡像の方法により、図8-11のごとく半無限体上の表層保護材に周期 $2l$ で荷重を配置した時と等価である。

いま $x=a$ にある単一の荷重に対する解を $W_0(x;a)$ で表現する。第一番目の引数は観測点の x 座標を

第二番目の引数は衝撃点の x 座標を示す。このとき図8-11の荷重点列に対する解は

$$W(x;a) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{W_0(x; -2jl+a) + W_0(x; 2jl-a)\} \quad (8-79)$$

そして縦せん断問題の特性より $W_0(x;a)$ が $x=a$ に対して対称分布であり、また衝撃点と観測点を同じ距離だけ x 方向に移動しても値が変わらないことから

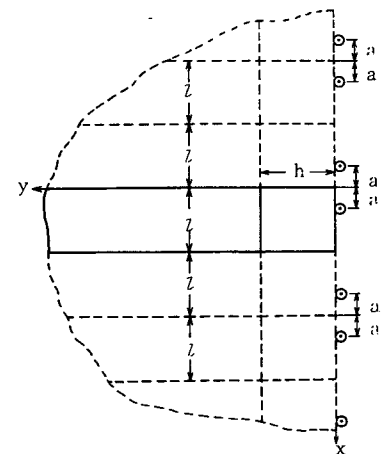


図8-11 鏡像による荷重点列

$$W_0(x;a) = W_0(-x;-a) = W_0(x+d;a+d) \quad (8-80)$$

(d :平行移動距離)

が成立つ。よって式(79)は次のように書きかえられる。

$$W(x;a) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{W_0(2jl+x;a) + W_0(2jl-x;a)\} \quad (8-81)$$

従って $W_0(x;a)$ の形が求まれば上式より本問の応答解が求まる。応力成分の $\tau_{yz}(x;a)$ が $x=a$ に対して対称 また、 $\tau_{xz}(x;a)$ が反対称であることに注意すれば同様な重ね合せで求めることができる。

単一衝撃点($a, 0$)に作用する問題の解 $W_0(x;a)$ すなわち $W_0(x-a;0)$ を求める。以下において $X=x-a$ の座標変換をし、下添字 0 と引数表示を省略して考える。また対称性より $X \geq 0$ の領域のみ取扱えば十分である。前節の基礎式をそのまま用いる。FL変換した波動方程式は式(25)より、 α によって材料を区別すれば次のように書ける

$$\bar{W}_{,yy}^{*(\alpha)} - \lambda^2(\xi^2 + \nu^{(\alpha)2})\bar{W}^{*(\alpha)} = 0 \quad ; \quad \alpha=1,2 \quad (8-82)$$

$$\nu^{(\alpha)2} = [c_T^{(\alpha)}]^{-2} \quad (8-83)$$

そして、この基本解は

$$\bar{W}^{*(\alpha)} = A^{(\alpha)}(\xi, \lambda) e^{-\lambda y \sqrt{\xi^2 + \nu^{(\alpha)2}}} + B^{(\alpha)}(\xi, \lambda) e^{\lambda y \sqrt{\xi^2 + \nu^{(\alpha)2}}} \quad (8-84)$$

$Re \lambda > 0, \quad Re \sqrt{\xi^2 + \nu^{(\alpha)2}} > 0$

式(84)より導出される像空間の応力成分は

$$\bar{\tau}_{yz}^{*(\alpha)} = G^{(\alpha)} \lambda \sqrt{\xi^2 + \nu^{(\alpha)2}} (-A^{(\alpha)} e^{-\lambda y \sqrt{\xi^2 + \nu^{(\alpha)2}}} + B^{(\alpha)} e^{\lambda y \sqrt{\xi^2 + \nu^{(\alpha)2}}}) \quad (8-85)$$

$$\bar{\tau}_{xz}^{*(\alpha)} = G^{(\alpha)} i \lambda \xi (A^{(\alpha)} e^{-\lambda y \sqrt{\xi^2 + \nu^{(\alpha)2}}} + B^{(\alpha)} e^{\lambda y \sqrt{\xi^2 + \nu^{(\alpha)2}}}) \quad (8-86)$$

また $y=0$ で式(78)より $\bar{\tau}_{yz}^{*(1)} = Q/\lambda \quad (8-87)$

であること、および $y=l$ で τ_{yz} と W とが連続であること、そして $y \rightarrow \infty$ で解が有界であることから $A^{(\alpha)}, B^{(\alpha)}$ を求めれば

$$A^{(1)} = - \frac{Q}{\lambda^2 G^{(1)} \sqrt{\xi^2 + \nu^{(1)2}} \cdot \Delta} \quad (8-88)$$

$$B^{(1)} = -\frac{Q \cdot \eta}{\lambda^2 G^{(1)} \sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}} \Delta} e^{-2\lambda h \sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}}} \quad (8-89)$$

$$A^{(2)} = -\frac{2Q \{ e^{-\lambda h (\sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}} - \sqrt{\xi^2 + V^{(2)2}})} \}}{\lambda^2 (G^{(1)} \sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}} + G^{(2)} \sqrt{\xi^2 + V^{(2)2}}) \cdot \Delta} \quad (8-90)$$

$$B^{(2)} = 0 \quad (8-91)$$

ここに $\Delta = 1 - \eta e^{-2\lambda h \sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}}} \quad (8-92)$

$$\eta = \frac{G^{(1)} \sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}} - G^{(2)} \sqrt{\xi^2 + V^{(2)2}}}{G^{(1)} \sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}} + G^{(2)} \sqrt{\xi^2 + V^{(2)2}}} \quad (8-93)$$

さて解析の焦点を接合せん断応力にあわせる。(1/Δ)を無限級数形に展開すれば式(85)(90)より

$$[\bar{c}_{y\bar{z}}^{*(2)}]_{y=h} = \frac{2QG^{(2)}\sqrt{\xi^2 + V^{(2)2}}}{\lambda(G^{(1)}\sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}} + G^{(2)}\sqrt{\xi^2 + V^{(2)2}})} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{n-1} e^{-\lambda(2n-1)h\sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}}} \quad (8-94)$$

フーリエ逆変換すれば

$$[\bar{c}_{y\bar{z}}^{*(2)}]_{y=h} = Q \sum_{n=1}^{\infty} I_n^*(\lambda) \quad (8-95)$$

ここに $I_n^*(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M(\xi) \exp[-\lambda \{ (2n-1)h \sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}} - i\xi X \}] d\xi \quad (8-96)$

$$M(\xi) = \left(\frac{G^{(2)} \sqrt{\xi^2 + V^{(2)2}}}{G^{(1)} \sqrt{\xi^2 + V^{(1)2}} + G^{(2)} \sqrt{\xi^2 + V^{(2)2}}} \right) \eta^{n-1} \quad (8-97)$$

式(96)のFL逆変換を前節で用いたCagniard法により評価することができ、その結果は

$$V^{(1)} \frac{X}{\sqrt{(2n-1)^2 h^2 + X^2}} \leq V^{(2)} \text{ のとき}$$

$$I_n(X) = \frac{1}{\pi} H(t - V^{(1)} \sqrt{(2n-1)^2 h^2 + X^2}) \left\{ M(\xi_1^+) \frac{\partial \xi_1^+}{\partial t} - M(\xi_1^-) \frac{\partial \xi_1^-}{\partial t} \right\} \quad (8-98)$$

ただし

$$\xi_1^{\pm} = \frac{iXt \pm (2n-1)h \sqrt{t^2 - V^{(1)2} \{ (2n-1)^2 h^2 + X^2 \}}}{(2n-1)^2 h^2 + X^2} \quad (8-99)$$

$$\frac{\partial \xi_1^{\pm}}{\partial t} = \frac{iX}{(2n-1)^2 h^2 + X^2} \pm \frac{(2n-1)h t}{\{ (2n-1)^2 h^2 + X^2 \} \sqrt{t^2 - V^{(1)2} \{ (2n-1)^2 h^2 + X^2 \}}} \quad (8-100)$$

また、 $V^{(1)} \frac{X}{\sqrt{(2n-1)^2 h^2 + X^2}} > V^{(2)}$ のときは、

$$I_n(X) = \frac{1}{\pi} H(t - V^{(1)} \sqrt{(2n-1)^2 h^2 + X^2}) \left\{ M(\xi_1^+) \frac{\partial \xi_1^+}{\partial t} - M(\xi_1^-) \frac{\partial \xi_1^-}{\partial t} \right\} + \frac{1}{\pi} H\left(\frac{X}{\sqrt{(2n-1)^2 h^2 + X^2}} - \frac{V^{(2)}}{V^{(1)}} \right) H\left(t - \{ V^{(2)} X + (2n-1)h \sqrt{V^{(1)2} - V^{(2)2}} \} \right) \times H(V^{(1)} \sqrt{(2n-1)^2 h^2 + X^2} - t) \left\{ M(\xi_2^+) - M(\xi_2^-) \right\} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \quad (8-101)$$

ここに

$$\xi_2^{\pm} = i \frac{Xt - (2n-1)h \sqrt{V^{(1)2} \{ (2n-1)^2 h^2 + X^2 \} - t^2}}{(2n-1)^2 h^2 + X^2} \pm \epsilon \quad (8-102)$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial t} = i \left[\frac{X}{(2n-1)^2 h^2 + X^2} + \frac{(2n-1)h t}{\{ (2n-1)^2 h^2 + X^2 \} \sqrt{V^{(1)2} \{ (2n-1)^2 h^2 + X^2 \} - t^2}} \right], \quad (8-103)$$

式(102)の±εは分岐線の右側と左側を治う時の値をとること示す。式(98)(101)で与えられる $I_n(X)$ は実数になる。これで関数が具体的に変わったので接合部のせん断応力は

$$[\bar{c}_{y\bar{z}}(x; a)]_{y=h} = Q \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [I_n(|x+2j\bar{a}|) + I_n(|-x+2j\bar{a}|)] \quad (8-104)$$

のごとくなる。ここに式(95)と式(81)の形とを利用して重ね合わせている。上式は n と j についての二重級数となっているが、これらのパラメータは、ある値より大きくなると式(98)(101)中のヘビサイド関数により恒等的に0となるので有限時間範囲においては実質上有限級数であり、計算は非常に容易である。

$$\bar{\lambda} = G^{(2)}/G^{(1)}, \quad \bar{\gamma} = C_T^{(2)}/C_T^{(1)}$$

$$\bar{X} = x/l, \quad \bar{t} = C_T^{(1)} t/l$$

$$\bar{k} = a/l, \quad m = h/l$$

$$(8-105)$$

の無次元変数をとって計算した一例

を図8-12に示す。

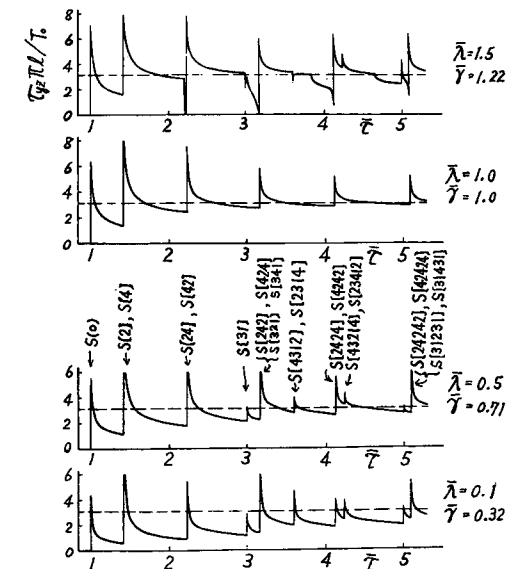


図 8.12: $\bar{\lambda} = 0.5$ の接合せん断応力の変動 ($m=1, \bar{k}=0.5, \bar{a}/\bar{t}=1$)

8.4 衝撃内圧の球形空洞(球窩) 6-2節で用いた基礎式が、そのまま利用

できる。球座標系 (r, θ, ϕ) で点対称問題を考えれば式(6-45)のように

$$u = \phi, r \tag{8-106}$$

で定義すると

$$\frac{\partial^2(r\phi)}{\partial r^2} = \frac{1}{c_t^2} \cdot \frac{\partial^2(r\phi)}{\partial t^2} \tag{8-107}$$

また、応力は、式(6-49)(6-50)より $\sigma_r = (\lambda + 2G)\phi, r, r + 2\lambda\phi, r / r$ (8-108)

$$\sigma_\theta = \lambda\phi, r, r + 2(\lambda + G)\phi, r / r \tag{8-109}$$

さて、ここで具体的に境界条件を与える。内壁 $(r=a)$ に作用するステップ変動圧力を

$$[\sigma_r]_{r=a} = -PH(t) \tag{8-110}$$

で与え、また $t \leq 0$ の時、すべての弾性要素は静止状態であるとして $\phi(0) = \dot{\phi}(0) = 0$ とする。

無限遠では球形空洞の影響がなくなるだろうから圧力をかけたことによつて生ずる変位や応力が0になる。いま式(107)(108)(110)をラプラス変換すると

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi^*) = \frac{1}{c_t^2}(r\phi^*) = \left(\frac{s}{c_t}\right)^2 r\phi^* \tag{8-111}$$

この解は、無限遠の状態を考慮して次をとる。

$$\phi^* = (A e^{-s r / c_t}) / r \tag{8-112}$$

式(110)より $[\sigma_r^*]_{r=a} = -P/s$ (8-113)

また式(108)より $\sigma_r^* = (\lambda + 2G)\phi^*, r, r + 2\lambda\phi^*, r / r$ (8-114)

式(112)を式(114)に入れて

$$\sigma_r^* = [(\lambda + 2G)\left(\frac{2}{r^3} + \frac{2s}{r^2 c_t} + \frac{s^2}{r c_t^2}\right) + 2\lambda\left(-\frac{1}{r^3} - \frac{s}{r^2 c_t}\right)] e^{-s r / c_t} \cdot A \tag{8-115}$$

式(113)の条件より

$$[\sigma_r^*]_{r=a} = [(\lambda + 2G)\frac{1}{a}\left(\frac{s}{c_t}\right)^2 + \frac{4G}{a^2}\frac{s}{c_t} + \frac{4G}{a^3}] e^{-s a / c_t} \cdot A = -P/s \tag{8-116}$$

したがって

$$A = -\frac{aP}{\rho} \frac{1}{s[s^2 + \left(\frac{4G}{a c_t}\right)s + \left(\frac{4G}{a^2}\right)]} e^{s a / c_t} \tag{8-117}$$

式(112)に入れて

$$\phi^* = -\frac{aP}{\rho r} \cdot \frac{1}{s[s^2 + \left(\frac{4G}{a c_t}\right)s + \left(\frac{4G}{a^2}\right)]} e^{-(r-a)s/c_t} \tag{8-118}$$

式(118)の逆変換をたみ込みの定理(134頁脚註参照)を用いて行うため準備する。

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} e^{-(r-a)s/c_t}\right] = H\left(t - \frac{r-a}{c_t}\right) \tag{8-119}$$

また

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + \left(\frac{4G}{a c_t}\right)s + \left(\frac{4G}{a^2}\right)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2}\right)(s_1-s_2)\right], \tag{8-120}$$

ただし s_1 と s_2 は左辺の分母をゼロとする根

$$= (s_1 - s_2)(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \tag{8-121}$$

ここで式(118)を逆変換すれば

$$\phi = \mathcal{L}^{-1}[\phi^*] = -\frac{aP}{\rho r} \int_0^t H\left(\xi - \frac{r-a}{c_t}\right) \cdot (s_1 - s_2) \{e^{s_1(t-\xi)} - e^{s_2(t-\xi)}\} d\xi \tag{8-122}$$

いま、 $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)} \frac{c_t}{a}, \quad \beta^2 = \frac{1-2\nu}{(1-\nu)^2} \cdot \frac{c_t^2}{a^2}, \quad \gamma = t - \frac{r-a}{c_t} \\ \gamma = \cot^{-1}(1-2\nu)^{1/2} \quad \text{ただし } \frac{\pi}{4} \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \tag{8-123}$

のおきかえをして整理すれば

$$\phi = -\frac{a^3 P}{4G r} [1 - (2-2\nu)^{1/2} e^{-\alpha \gamma} \sin(\beta \gamma + \gamma)] H(\gamma) \tag{8-124}$$

を得る。これを式(108)(109)に代入すれば σ_r と σ_θ の応答解を得ることができる。図8-14は σ_r の計算例である。

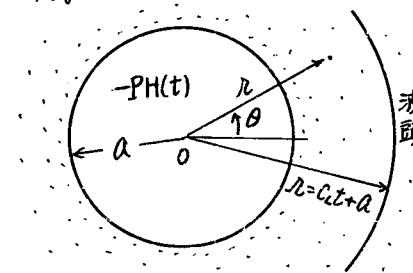


図8-13; 球形空洞

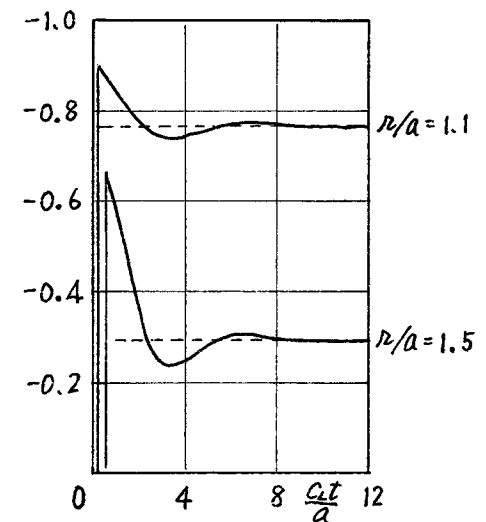
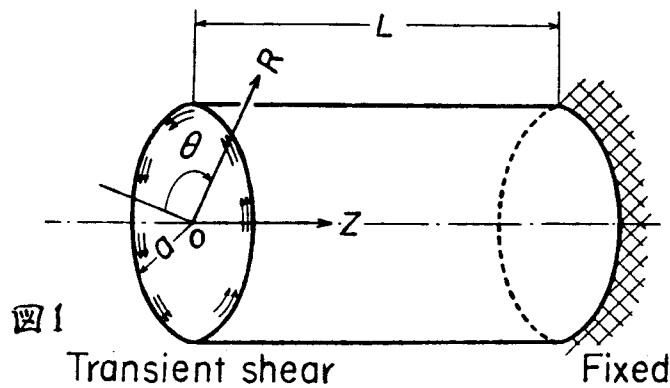


図8-14; 半径応力 σ_r
---は静的解

8.5 端面ねじり衝撃を受ける弾性円柱

ねじり負荷に対する変形が円柱半径に比例するとして解析する簡便な初等理論は、半径に比べて十分長い丸棒に対して有効であるが、本節では端の影響の無視できない端近辺の衝撃応答を考えてみよう。端面作用衝撃ねじり剪断の分布は半径 \$R\$ の関数とし、その時間変化はステップ状とする。解法は主にラプラス変換と固有函数展開の一種であるテイ展開法を用いる。具体的数値計算として不連続な端面負荷分布に対して行うが、級数和をランチョスの考え方に基いて変換しているため、ギブス現象の現われな良好な近似となっている。さらに解に現われる積分は二重双曲線函数変換によって、その評価を容易にしている。

図1のように円柱の衝撃端面に原点を有する円柱座標系 \$(R, \theta, Z)\$ をとる。\$Z=L\$ の面は剛拘束とする。問題を標準化するため半径 \$a\$ で無次元化し



$$v = V/a, \quad r = R/a, \quad z = Z/a, \quad \tau = ct/a, \quad l = L/a \quad (1)$$

ここに \$C\$ は剪断波速度である。本問題の場合を支配する円柱座標表示の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \quad (2)$$

\$v\$ は \$\theta\$ 方向変位成分である。また、^{恒等的に} \$\tau=0\$ とはならない応力成分は、その変位 \$v\$ と

$$\tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad \tau_{\theta z} = \mu \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3), (4)$$

の関係がある。境界条件を次の様に与える。

$$[\tau_{\theta z}]_{z=0} = g f(x) H(\tau), \quad [\tau_{rz}]_{r=1} = 0, \quad [v]_{z=l} = 0 \quad (5) (6) (7)$$

式(5)は \$r\$ の関数として分布するせん断応力がステップ衝撃で端面に与えられていることを示す。円柱側面は外力に対して自由であり、衝撃面に反対の端面は剛拘束されている。また衝撃

以前では何の擾乱も受けていないから初期条件

$$[v]_{\tau=0} = [\dot{v}]_{\tau=0} = 0 \quad (8)$$

を考慮する。

さて次に解析について述べる。ねじり変形の対称性と反射波の特性を考慮して半無限長円柱に対する解の鏡像法による重ね合せにより有限長円柱の解を組立てれば、

$$v = v^*(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{ v^*(2nl-z) + v^*(2nl+z) \} \quad (9)$$

$$\tau_{\theta z} = \tau_{\theta z}^*(z) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{ \tau_{\theta z}^*(2nl-z) - \tau_{\theta z}^*(2nl+z) \} \quad (10)$$

$$\tau_{rz} = \tau_{rz}^*(z) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \{ \tau_{rz}^*(2nl-z) + \tau_{rz}^*(2nl+z) \} \quad (11)$$

ただし \$0 \leq z \leq l\$ で、上添字 \$*\$ をつけたものが半無限長円柱に対する解である。従って、まず条件式(7)を外した時の解を求めることを考える。いま、ラプラス変換の定義を

$$\mathcal{L}[v^*] = \bar{v} = \int_0^{\infty} v^* e^{-s\tau} d\tau, \quad \mathcal{L}^{-1}[\bar{v}] = v^* = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \bar{v} e^{s\tau} ds \quad (12)$$

とすれば、式(2)~(6)の変換形は、初期条件(8)を考慮して次のようになる。

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r^2} - s^2 \bar{v} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} = 0, \quad \bar{\tau}_{rz} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r} \right), \quad \bar{\tau}_{\theta z} = \mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (13) (14) (15)$$

$$[\bar{\tau}_{\theta z}]_{z=0} = \frac{g}{s} f(r), \quad [\bar{\tau}_{rz}]_{r=1} = 0 \quad (16) (17)$$

式(13)の解は \$r=0\$ における有限性を考慮して、次の基本解を採用する。

$$\bar{v} = A \cdot J_1(\lambda r) \cdot e^{-s z}, \quad (\lambda = \sqrt{s^2 \pm s^2}, \quad \text{Re } \lambda > 0, \quad z \geq 0) \quad (18)$$

\$J_1(\cdot)\$ は1次の第1種ベッセル関数であり \$A\$ は未知関数とする。ところで円柱側面で式(17)が成立つ条件より固有方程式

$$\lambda J_2(\lambda) = 0 \quad (19)$$

を得る。式(19)の \$0\$ を含む正実根を小さい方から順序付けて \$\lambda_m\$ (\$m=0, 1, 2, \dots\$) と置く。この固有値による展開形で変位解を与え、式(16)の端条件が満足されるようにすることを考える。

$$\bar{v} = -\frac{g}{\mu s} \left\{ \frac{1}{s} B_0 r e^{-s z} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{s_m} J_1(\lambda_m r) e^{-s_m z} \right\} \quad (20)$$

$$\text{ただし } B_0 = 4 \int_0^1 \xi^2 f(\xi) d\xi, \quad B_m = \frac{2}{J_2^2(\lambda_m)} \int_0^1 \xi f(\xi) J_1(\lambda_m \xi) d\xi \quad (21) (22)$$

また式(18)より $\zeta_m = \sqrt{\lambda_m^2 + S^2}$ (Re $\zeta_m \geq 0$) (23)

式(20)を式(15)に代入し $z=0$ とおけば、式(16)の右辺の $\tau_i =$ 展開形⁽¹⁾ となっている。次に式(20)のラプラス逆変換 $\mathcal{L}^{-1}[\bar{v}]$ を考えれば、式(19)によって定まる λ_m が S に独立なことから

$$\mathcal{L}^{-1}[\bar{v}] = v^* = -\frac{q}{\mu} \left[B_0 Y \chi_1(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \{ B_m J_1(\lambda_m Y) \chi_2(z) \} \right] \quad (24)$$

ここに $\chi_1(z) = (\tau-z)H(\tau-z)$, $\chi_2(z) = \int_z^{\tau} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - z^2}) d\eta H(\tau-z)$ (25)(26)

である⁽²⁾。また応力成分に関しては式(14)(15)より

$$\tau_{30}^* = q \left[B_0 Y \chi_3(z) + \sum_{m=1}^{\infty} \{ B_m J_1(\lambda_m Y) \chi_4(z) \} \right], \quad (27)$$

$$\tau_{r\theta}^* = q \sum_{m=1}^{\infty} \{ B_m \lambda_m J_2(\lambda_m Y) \chi_2(z) \} \quad (28)$$

ここに $\chi_3(z) = H(\tau-z)$, $\chi_4(z) = H(\tau-z) - \int_z^{\tau} \frac{\eta \lambda_m}{\sqrt{\tau^2 - \eta^2}} J_1(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - \eta^2}) d\eta$. (29)(30)

式(30)を変形して積分区間内の被積分関数の特異性を取除けば

$$\chi_4(z) = z \left\{ \frac{1}{\tau} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - z^2}) + \int_z^{\tau} \frac{1}{\eta^2} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - \eta^2}) d\eta \right\} H(\tau-z) \quad (30)'$$

これで式(24)(27)(28)を式(9)~(11)に代入することにより、本向の変位および応力が定まる。

具体的に $f(z)$ を与えて数値的に求めることを考える。円柱端分布の効果を見るため $f(z)$ は図2の様に外周辺にのみ分布し、 $Y=Y_0$ で不連続性を示す関数とする。この時、 $\tau_i =$ 級数展開の係数は

$$B_0 = 4 \int_{Y_0}^1 \xi^3 d\xi = 1 - Y_0^4, \quad B_m = \frac{2}{J_1^2(\lambda_m)} \int_{Y_0}^1 \xi^2 J_1(\lambda_m \xi) d\xi = -\frac{2Y_0^2 J_2(\lambda_m Y_0)}{\lambda_m J_1^2(\lambda_m)} \quad (31)(32)$$

また $t > 0$ における^端ねじり合要素は $q(1 - Y_0^4)\pi/2$ である。結局

$$\mu v^*/q = -(1 - Y_0^4)H(\tau-z) \left[Y(\tau-z) - \frac{2Y_0^2}{1 - Y_0^4} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_2(\lambda_m Y_0)}{\lambda_m J_1^2(\lambda_m)} J_1(\lambda_m Y) \int_z^{\tau} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - \eta^2}) d\eta \right\} \right], \quad (33)$$

$$\tau_{30}^*/q = (1 - Y_0^4)H(\tau-z) \left[Y - \frac{2Y_0^2}{1 - Y_0^4} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_2(\lambda_m Y_0)}{\lambda_m J_1^2(\lambda_m)} J_1(\lambda_m Y) \left(\frac{z}{\tau} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - z^2}) + z \int_z^{\tau} \frac{1}{\eta^2} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - \eta^2}) d\eta \right) \right\} \right] \quad (34)$$

$$\tau_{r\theta}^*/q = -2Y_0^2 H(\tau-z) \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_2(\lambda_m Y_0)}{J_1^2(\lambda_m)} J_2(\lambda_m Y) \int_z^{\tau} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - \eta^2}) d\eta \right\} \quad (35)$$

次に数値計算評価を考える。式(33)(34)の無限級数は有限項で打ち切つて近似評価され

るが $z=0$ の端面で空間的に不連続分布を与えているため、級数和にギブス現象が生じ、境界値近傍が一般に難しくなる。そこで理想分布に近づけるため、変数 Y に関し、ランチョスの平滑化法⁽³⁾ に準じ、次の様な操作をほどこす。この結果、境界値は項数 N に応じて図2に示すようにうまく近似される。

$$\frac{\mu v^*}{q} \sim -(1 - Y_0^4)H(\tau-z) \frac{\lambda_N}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\lambda_N}}^{\frac{\pi}{\lambda_N}} \left[S(\tau-z) - \frac{2Y_0^2}{1 - Y_0^4} \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{J_2(\lambda_m Y_0) J_1(\lambda_m \xi)}{\lambda_m J_1^2(\lambda_m)} \int_z^{\tau} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - \eta^2}) d\eta \right\} \right] d\xi$$

$$\sim -(1 - Y_0^4)H(\tau-z) \left[Y(\tau-z) + \frac{\lambda_N Y_0^2}{\pi(1 - Y_0^4)} \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{J_2(\lambda_m Y_0)}{\lambda_m^2 J_1^2(\lambda_m)} \left(J_0(\lambda_m Y + \frac{\lambda_m \pi}{\lambda_N}) - J_0(\lambda_m Y - \frac{\lambda_m \pi}{\lambda_N}) \right) \int_z^{\tau} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - \eta^2}) d\eta \right\} \right], \quad (36)$$

$$\frac{\tau_{30}^*}{q} \sim (1 - Y_0^4)H(\tau-z) \left[Y + \frac{\lambda_N Y_0^2}{\pi(1 - Y_0^4)} \sum_{m=1}^N \left\{ \frac{J_2(\lambda_m Y_0)}{\lambda_m^2 J_1^2(\lambda_m)} \left(J_0(\lambda_m Y + \frac{\lambda_m \pi}{\lambda_N}) - J_0(\lambda_m Y - \frac{\lambda_m \pi}{\lambda_N}) \right) \left(\frac{z}{\tau} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - z^2}) + z \int_z^{\tau} \frac{1}{\eta^2} J_0(\lambda_m \sqrt{\tau^2 - \eta^2}) d\eta \right) \right\} \right]. \quad (37)$$

ところで式(36)(37)に現れる積分は、級数和の項数が増加するにつれ、ベッセル関数の振動特性より評価が容易でなくなる。そこで次の=重双曲線関数変換⁽⁴⁾を行って、引数 U が 0 の近傍にある時、大きな値を有する様な被積分関数の無限積分にする。 $\eta = \frac{\tau+z}{2} + \frac{\tau-z}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sinh} U\right)$ (38)

その数値評価は、台形公式で精度よく評価できる。図3に τ_{30}^* の表面における値を示す。端に作用する衝撃応力の分布効果が初等理論との差となって明瞭に現われている。これらの解を(10)式に従って重ね合わせれば、円柱に対する本問の解を得ることができ⁽⁵⁾。

(文献)

(1) Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, pp. 596-605, Cambridge Univ. Press. (1966)
 (2) 近藤, 演算子法 207 培風館 (1956)
 (3) 吉澤, 数値解析II, 116, (岩波講座基礎工学)岩波書店(1973)
 (4) 高橋, *BIT*, 7-14 (1975-12), 84., (5) 大好, 機講論(日工), (1978-9)

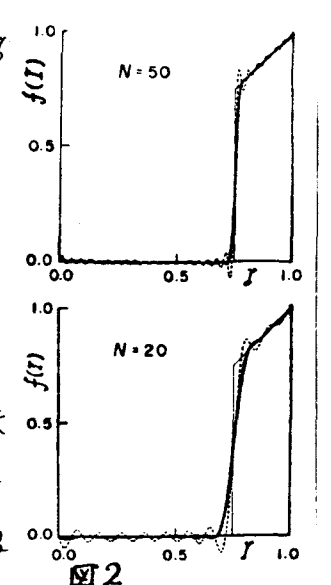


図2

