

# 弾性波の伝播と応答解析

大好 直 (秋田大学)

- 0 はじめに (1)
- 1 弾性体を伝える一次元波 (1)
  - 1.1 弾性単層の伝達マトリックスと反射透過 (1)
  - 1.2 多層積層体に対する反射と透過の解析 (3)
- 2 波の伝播方向 (4)
  - 2.1 スローネスペクトル (4)
  - 2.2 波動エネルギーの伝搬方向 (6)
- 3 調和波の反射と透過 (7)
  - 3.1 調和波による応力場とパワー (7)
  - 3.2 伝播ベクトル (9)
  - 3.3 変位と応力の連続性 (10)
  - 3.4 反射波と透過波 (12)
  - 3.5 エネルギーの反射と分配 (14)
- 4 界面を伝播する波 (15)
  - 4.1 界面波 (15)
  - 4.2 表面波 (17)
- 5 弾性単層を伝播する波 (18)
  - 5.1 面外変形モードの波(SH波) (18)
  - 5.2 SH波によって層内を伝えるエネルギー (20)
  - 5.3 面内変形波(ラム波) (21)
- 6 弾性積層材を伝播する波 (22)
  - 6.1 特性方程式 (23)
  - 6.2 エネルギー伝搬の速さ (24)
- 7 応答の近似解法と実験検証 (27)
  - 7.1 波動特性チャートによる浸水板の解析 (27)
  - 7.2 平板の横衝撃実験 (30)
  - 7.3 板端を伝播するエッジ波の実験検証 (30)
- 参考文献 (32)

## 0 はじめに

動弾性学研究の興味は数理解析の美しさもあるが、何といても動的現象の多様性に惹かれて興味を持つことが出来ることであると思う。解析技法が数学的に高度になるとその巧みさに感心することもあるが、本来の研究目的からすれば技術現場からの課題があって、要求される精度に応じて現象解明が出来れば良いと考える。動弾性研究の受け持つ範囲が拡大するにつれ、技術開発のための基礎的知見として様々な分野へ応用されるようになった。このようなことから応用を考えた合理的な解法の開発が重要である。特に衝撃応答の現象を把握するためには、波動特性をよく取り込んだ近似解法の開発が望まれる。

工業界で対象とする力学的構造体のほとんどが、いわゆる板や棒といわれる幾何学的形状の組み合わせになっている。したがって観測できる衝撃応答とは、波が構造体を伝わる過程で、システム固有のフェルター効果によって波動成分の取捨選択が行われ、支配的な成分のみが卓越して現れたものである。その支配的な成分によって構成された波が特性波である。したがって、特性波を手掛かりにして近似解法を開発することが最も合理的な接近法である。

そこで、いろいろな動弾性解析のある中から、実験によっても確認できているいくつかの近似解法例を選んで紹介する。2・3の低いモード次数の特性波の寄与を組み込んだ近似理論で十分であることが理解できるはずだ。合理的な方法を求めるという観点から本章の内容を読んでいただければ幸いです。

## 1 弾性体を伝わる一次元波

衝撃荷重が作用すれば、その影響は局所質量の慣性効果のため、波動となって固体中を伝わる。波動は一般に減衰を伴う現象であり、やがて静的状態にもどる。本章では、それらの基礎となる波動現象を理解するために、簡単な問題から順次に説明する。

### 1.1 弾性単層の伝達マトリックスと反射透過

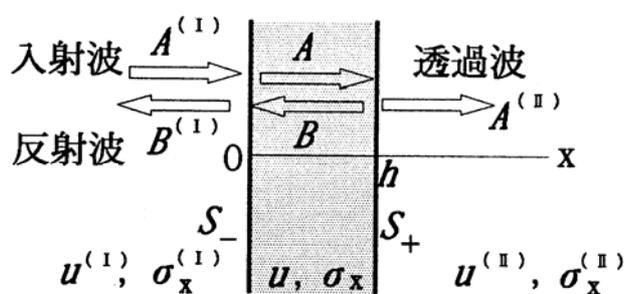


図1 界面条件の状態ベクトル  $S_-$  と  $S_+$  による表現

反射透過問題の一解法として、「伝達マトリックス法」を説明する。これは解析が形式化されるばかりでなく、多層構造となってもマトリックスの次元が大きくなり、取り扱いが容易になるという特長を有する。簡単のため、図 1 のように層に垂直に入射する一軸ひずみ波を考える。

弾性体を  $x$  軸方向に伝播する一次元平面波に対し、一軸ひずみ状態の応力は

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1)$$

また波動場を支配する方程式は

$$\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (2)$$

界面 ( $x=0, h$ ) での応力  $\sigma_x(x)$  と変位  $u(x)$  が連続となる条件は次のように書ける。

$$u(0) = u(0), \quad \sigma_x(0) = \sigma_x(0) \quad (3)$$

$$u(h) = u(h), \quad \sigma_x(h) = \sigma_x(h) \quad (4)$$

$h$  は層厚である。上添字の  $-$  と  $+$  は反射側と透過側の量であることを示す。いま、ベクトル

$$\mathbf{S}_- = \begin{bmatrix} u(0) \\ \sigma_x(0) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_+ = \begin{bmatrix} u(h) \\ \sigma_x(h) \end{bmatrix} \quad (5)$$

を定義し、この 2 つのベクトル間に成り立つ関係を求める。層内の変位は波動方程式の解でなければならないから時間調和の波動場とすれば

$$u(x, t) = A \exp\{ik(x - c_L t)\} + B \exp\{-ik(x + c_L t)\} \quad (6)$$

$$\sigma_x(x, t) = (\lambda + 2\mu) ik \left[ A \exp\{ik(x - c_L t)\} - B \exp\{-ik(x + c_L t)\} \right] \quad (7)$$

式(6)(7)を式(5)に入れれば  $\lambda + 2\mu = \rho c_L^2$ ,  $kc_L = \omega$  であるから、インピーダンスとして  $Z = \rho c_L$  と置くと

$$\mathbf{S}_+ = \mathbf{M} \mathbf{S}_- \quad (8)$$

ただし

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \cos kh & (Z\omega)^{-1} \sin kh \\ -Z\omega \sin kh & \cos kh \end{bmatrix} \quad (9)$$

ここに  $\mathbf{M}$  は「伝達マトリックス」であり、その各元は実数である。また

$$\det \mathbf{M} = 1 \quad (10)$$

が成り立つ。連続条件式(3)(4)を用いて層の外側の解と関係付ければ

$$\mathbf{S}_- = \left[ \begin{bmatrix} 1 \\ Z i\omega \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} 1 \\ -Z i\omega \end{bmatrix} B \right] \exp(-i\omega t) \quad (11)$$

$$\mathbf{S}_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ Z i\omega \end{bmatrix} A \exp(ikh) \exp(-i\omega t) \quad (12)$$

透過側に反射波は生成しないので  $B = 0$  とした。これらを(8)に代入して

$$\begin{bmatrix} M_{22} - i\omega Z & M_{12} & -1 \\ -M_{21} + i\omega Z & M_{11} & i\omega Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \exp(ikh) \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i\omega Z \end{bmatrix} A \quad (13)$$

ただし、 $M_{ij}$ は式(9)で与えられるマトリックスの元である。式(13)を未知係数 $A^{\text{II}}, B^{\text{I}}$ について解けば、反射係数 $R$ と透過係数 $T$ が求められる。 $i\omega Z^j$ をあらためて $Z^j$ と置けば

$$R \equiv \frac{B}{A} = (M_{21} - M_{11}Z + M_{22}Z - M_{12}Z Z) / \Delta \quad (14)$$

$$T \equiv \frac{A}{A} = 2Z \exp(-ikh) / \Delta \quad (15)$$

ただし

$$\Delta \equiv -M_{21} + M_{11}Z + M_{22}Z - M_{12}Z Z \quad (16)$$

以上は簡単のため次元で説明したが、伝達マトリックスの次元を大きくして二・三次元の問題解法にも応用できることが重要である。

## 1.2 多層積層体に対する反射と透過の解析

伝達マトリックスを利用して積層体による反射透過解析が出来る。図 2 の様に積層したとき式(8)の関係は、第  $n$  層と第  $(n-1)$  層でも成り立つので、

$$\mathbf{S}_-^{(n)} = \begin{bmatrix} u(0) \\ \sigma_x(0) \end{bmatrix}^{(n)}, \quad \mathbf{S}_+^{(n)} = \begin{bmatrix} u(h) \\ \sigma_x(h) \end{bmatrix}^{(n)} \quad (17)$$

を定義すれば

$$\mathbf{S}_+^{(n)} = \mathbf{M}^{(n)} \mathbf{S}_-^{(n)} \quad \mathbf{S}_+^{(n-1)} = \mathbf{M}^{(n-1)} \mathbf{S}_-^{(n-1)} \quad (18)$$

界面における変位と応力の連続条件より

$$\mathbf{S}_-^{(n)} = \mathbf{S}_+^{(n-1)} \quad (19)$$

したがって、式(18)(19)より

$$\mathbf{S}_+^{(n)} = \mathbf{M}^{(n)} \mathbf{M}^{(n-1)} \mathbf{S}_-^{(n-1)} \quad (20)$$

この操作を全層(層数  $N$ )に渡って行えば

$$\mathbf{S}_+^{(N)} = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{S}_-^{(1)} \quad \tilde{\mathbf{M}} \equiv \mathbf{M}^{(N)} \mathbf{M}^{(N-1)} \dots \dots \mathbf{M}^{(1)} \quad (21)$$

ここに $\tilde{\mathbf{M}}$ が多層積層したときの「合成伝達マトリックス」である。単層の式(13)と同様に反射側と透過側の振幅を結びつける連立式(21)の形が得られ、反射係数と透過係数が得られる。結局、 $M_{ij}$ を $\tilde{M}_{ij}$ に、 $h$ を $H$ に置き換えればよい。一般に、二つの媒体の界面に材質の異なる層が存在すれば、その層の厚さや材質によって反射率や透過率が著しく変わり、また入射波の波長もしくは周波数にも依存する。したがって衝撃波の反射透過を解析するならば、調和波に分解して波動分散性の効果を知ることが肝要である。この解法による不均質積層材の解析[1]も見られる。

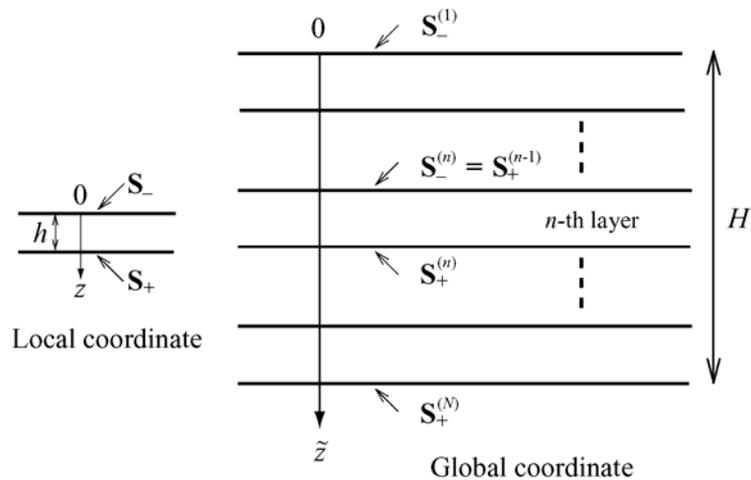


図2 積層体の局所座標と大域座標

## 2 波の伝播方向

媒体界面に入射する波の反射角と透過角を求める方法を考える。界面の変位と応力の連続条件を手掛かりにするが、反射角と透過角に関する限り位相の連続性に尽きているので、図式的に簡単に求められる。この鍵は以下に述べるスローネスベクトルの活用である。

### 2.1 スローネスベクトル

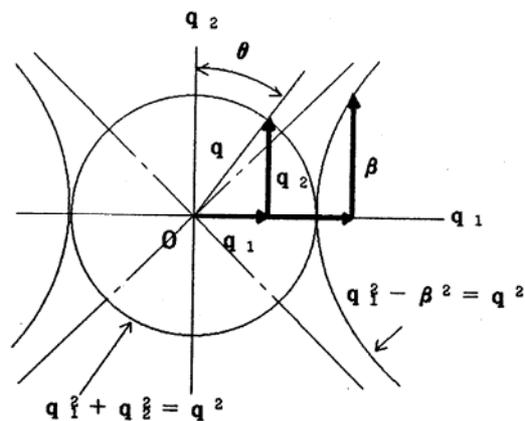


図3 スローネス線図

一般に、平面調和波は次式で表現される。

$$\mathbf{u} = A \mathbf{d} \exp[ik(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct)] \quad (22)$$

ここに  $\mathbf{d}$  と  $\mathbf{p}$  は粒子の運動方向と波の伝播方向を示す単位ベクトルである。式(22)を

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}/c \quad (23)$$

で定義される「スローネスベクトル」 $\mathbf{q}$  で書き換えて

$$\mathbf{u} = A \mathbf{d} \exp[i\omega(\mathbf{x} \cdot \mathbf{q} - t)] \quad (24)$$

$|\mathbf{q}| = q$  と置けば  $q$  値は縦波に対しては  $1/c_L$ , 横波に対しては  $1/c_T$  で与えられ, 位相速度の逆数になる。座標系を  $p_3 \equiv 0$  となるように選べば  $q_3 \equiv 0$  であるから, 与えられた実数  $q$  と実数  $q_1$  に対し,  $q_2$  は実数にも虚数にもなる。すなわち

$$q_2 = \sqrt{q^2 - q_1^2}; q \geq q_1 \quad (25)$$

または

$$q_2 = i\sqrt{q_1^2 - q^2} \equiv i\beta; q_1 > q \quad (26)$$

$x_2$  軸と伝播方向との成す角を  $\theta$  とすれば  $\mathbf{p} = (\sin \theta, \cos \theta, 0)$  なので

$$(q_1, q_2, 0) = (q \sin \theta, q \cos \theta, 0); q \geq q_1 \quad (27)$$

$$(q_1, \beta, 0) = (q \cosh \gamma, q \sinh \gamma, 0); q < q_1 \quad (28)$$

ただし, 式(28)は  $\theta = \pi/2 - i\gamma$  と置き換えた結果である。式(27)(28)のそれぞれは  $\theta$  と  $\gamma$  をパラメータとして円と双曲線に表すことが出来る(図3)。これを「スローネス線図」という。

以上の関係を入射波, 反射縦波, 反射横波, 透過縦波, 透過横波のそれぞれに当てはめて, 順にスローネスベクトルを  $\mathbf{q}^{(0)}, \mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{q}^{(3)}, \mathbf{q}^{(4)}$  とし, 異なった媒体の界面における反射透過の様相を調べる。下側に入射側媒体のスローネス線図, 上側に透過側媒体のスローネス線図を描けば, 縦波と横波の二つの位相速度があるから図4となる。

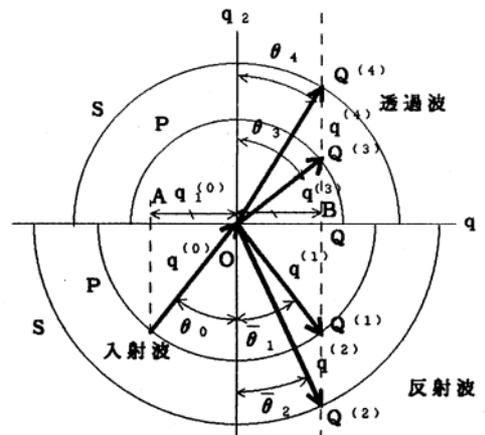


図4 反射波と透過波のスローネスベクトル

$x_2 = 0$  を界面とすれば, 界面において最初に述べた位相の連続性が恒等的に成立するためには式(24)において,  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{q}$  の連続性, すなわち  $x_1$  方向のスローネスベクトル成分が同値であれば良い。すなわち

$$q_1^{(0)} = q_1^{(1)} = q_1^{(2)} = q_1^{(3)} = q_1^{(4)} \quad (29)$$

したがって縦波が入射するときを例にすれば, 図4を描くことが出来る。その手順を示す。

【手順1】入射側媒体と透過側媒体の縦波と横波の位相速度の逆数を半径として同心半円を描き, それぞれの半円を  $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, S^{(4)}$  とする。

【手順2】 $q_2$  軸との成す角が入射角  $\theta^{(0)}$  に等しく, かつ原点を通る直線と半円  $S^{(1)}$  との交点を始点とし, 原点を終点とする入射波のスローネスベクトル  $\mathbf{q}^{(0)}$  を求める。

【手順3】 $\mathbf{q}^{(0)}$  の  $q_1$  軸への投影を  $AO$  とし,  $q_1$  軸上の反対側に  $AO = OB$  となる点  $B$  をとる。

【手順4】点  $B$  を通る垂線と半円  $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, S^{(4)}$  との交点を終点とするスローネスペクトル  $\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \mathbf{q}^{(3)}, \mathbf{q}^{(4)}$  を定める。これらのベクトルと  $q_2$  軸との成す角が縦波反射角  $\theta^{(1)}$ , 横波反射角  $\theta^{(2)}$ , 縦波透過角  $\theta^{(3)}$ , 横波透過角  $\theta^{(4)}$  である。

入射角や媒体の組合せによっては点  $B$  を通る垂線が, いずれの円弧とも交差しえない場合がある。この時は双曲線との交点  $(q_1, \beta)$  を考える。 $\beta$  は式 (24)(26) より  $x_2$  座標とともに波動振幅が指数関数的に急変することを示している。全空間で波動が有限であることを考慮すれば, 存在可能な波動は界面近傍に限定される (界面からの距離と共に急減する) 波のみとなる。図 5 の例は横波の全反射状態になっており, 透過側の内部へエネルギーが移動することはない。定常波動では入射エネルギーと全反射エネルギーの均衡が保たれているが, パルスが入射するような過渡状態では, 界面近傍にエネルギーの一部が捕捉され  $OB$  の逆数の位相速度で界面に沿って伝播する。界面波やストーンレー波などはこの捕捉によって生じる波であり, 透過側に媒体がなければ自由面を伝わるレイリー波である。更に 3 次元的に考えれば自由縁を伝わるエッジ波[2] が伝わる。

非破壊検査では, 必要な波動エネルギーを検査体の内部に入れるために, 探触子と被検査材料の間に水などのカップリング剤を用いると共に入射角を選んで行われる。スローネス線図で検討すれば, 図 6 に示した範囲 ( $\theta_p$  と  $\theta_s$  の間) に入射角を選べば横波のみによる検査が可能となる。

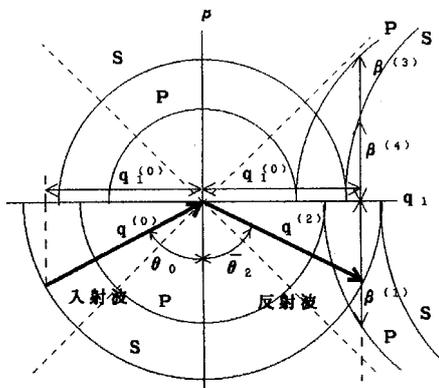


図5 SV波の全反射

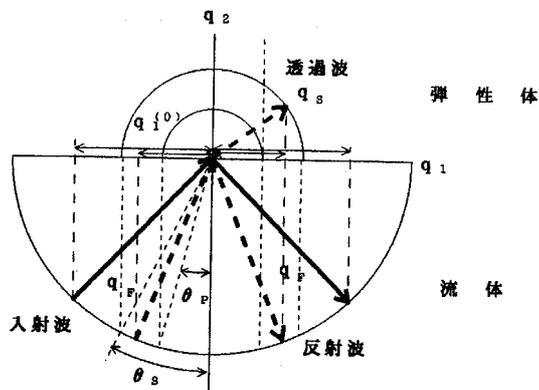


図6 音響流体からの横波のみの入力

## 2.2 波動エネルギーの伝搬方向

ある物の空間移動を伴うとき“伝搬”と呼び, ある状態の空間移動を“伝播”と呼ぶ。波の位相面に垂直な方向が伝播方向であるが, 波動エネルギーの伝搬方向は以下のようにして求められる。エネルギー束ベクトルを「時間平均パワー密度」によって定義する。

$$\langle F_j \rangle = -\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \text{Re}(\sigma_{ij}) \text{Re}(v_i) dt \quad (30)$$

$T$  は周期であり,  $v_i$  は粒子速度で調和波の場合  $-i\omega u_i$  である。応力は弾性定数  $c_{klmn}$  を用いて

$$\sigma_{kl} = \frac{1}{2} c_{klmn} (u_{m,n} + u_{n,m}) \quad (31)$$

である。変位ベクトル  $u_i$  は式(22)で与えられるから式(30)は次式に帰着される。

$$\langle F_j \rangle = \frac{|A|^2}{2C} \omega^2 \operatorname{Re} [c_{mjkl} d_k p_l d_m^*] \quad (32)$$

ここに  $d_m^*$  の上添字\*は共役複素数を表す。式(32)の導出にあたっては, 時間平均積分が  $-\frac{1}{2} \operatorname{Re} [\sigma_{ij} v_i^*]$  で与えられることを利用する。一般に異方性体を伝わる波の種類は3種あり, 疑似縦波と二つの疑似横波である。従ってそれぞれの波について, 式(32)の  $\langle F_j \rangle$  が求められることになる。エネルギー伝搬方向の単位ベクトルを  $\mathbf{s}$  で表記すれば

$$\mathbf{s} = \langle \mathbf{F} \rangle / |\langle \mathbf{F} \rangle| \quad (33)$$

波の伝播方向は単位ベクトル  $\mathbf{p}$  で与えられるから, 2つの方向の違い  $\phi$  は次のようになる。

$$\cos \phi = \mathbf{p} \cdot \mathbf{s} \quad (34)$$

探触子等で感知するものは波動エネルギーの到来によるものであるから, 計測される応答を, 位相面の移動方向によって説明することは一般的に出来ない。

### 3 調和波の反射と透過

界面に斜めに入射する場合の二次元波動を詳しく述べる。反射波と透過波は入射波によって乱された界面の応力と変位の連続性を補償するように生ずる。それらの振幅は入射角や音響インピーダンスに依存する。無限体を伝わる平面波は, 同一位相面(すなわち波動伝播ベクトル  $\mathbf{p}$  に垂直な平面)上で振幅が一定であるが, 異種媒体の界面近傍では, 必ずしも一定であるとは限らない。その代表例が表面波(Rayleigh波)である。

#### 3.1 調和波による応力場とパワー

平面調和波を式で表わせば

$$\mathbf{u} = A \mathbf{d} \exp[i\xi] \quad ; \quad \xi = k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - Ct) \quad (35)$$

ここに  $\mathbf{d}$  と  $\mathbf{p}$  は振幅方向と伝播方向を与える単位ベクトルで  $C$  は位相速度である。角周波数  $\omega$  は  $\omega = kC$  である。波動ベクトル  $\mathbf{k} (\equiv k\mathbf{p})$  を用いる場合は  $\xi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t$  となる。等方性媒体を伝播する調和波に対し,  $\mathbf{d} = \pm \mathbf{p}$  あるいは  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{p} = 0$  が成り立つ。前者は縦波(P波)で後者は横波(S波)である。フックの法則式に式(35)を代入すれば, 応力成分は

$$\tau_{lm} = [\lambda \delta_{lm} d_j p_j + \mu (d_l p_m + d_m p_l)] ikA \exp[i\xi] \quad (36)$$

ここに添字  $j$  については総和規約を適用する。  $\lambda$  と  $\mu$  はラメ定数である。

エネルギーの流れを考える。応力ベクトル  $\mathbf{t}$  が単位時間にする仕事(パワー密度  $P$ )は, 体素の運動速度(粒子速度)すなわち  $\dot{\mathbf{u}}$  との内積で与えられ

$$P = \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (37)$$

ただしパワー密度は,  $\mathbf{t}$  も  $\dot{\mathbf{u}}$  も実ベクトルによって定義する。面素の法線方向を単位ベクトル  $\mathbf{n}$  で与えれば,

$$P = \tau_{lm} n_m \dot{u}_l \quad (38)$$

例として, P 波が  $x_2$  軸に対して角  $\theta$  の方向に伝播する場合を考える。このとき, 粒子運動方向  $\mathbf{d}$  は次のように表される。

$$d_1 = p_1 = \sin \theta, \quad d_2 = p_2 = \cos \theta, \quad d_3 = p_3 = 0 \quad (39)$$

エネルギーが流入する領域を囲む境界面素の向き  $\mathbf{n}$  を外向きで定義すれば, それは, 領域内のエネルギーが増加する流れの方向  $\mathbf{p}$  と逆になるので

$$n_1 = -p_1 = -\sin \theta, \quad n_2 = -p_2 = -\cos \theta, \quad n_3 = -p_3 = 0 \quad (40)$$

式(39)(40)を式(36)に代入すれば, 調和波による応力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= (\lambda + 2\mu \sin^2 \theta) ikA \exp[i\xi] \\ \tau_{12} &= \tau_{21} = (2\mu \sin \theta \cos \theta) ikA \exp[i\xi] \\ \tau_{22} &= (\lambda + 2\mu \cos^2 \theta) ikA \exp[i\xi] \end{aligned} \quad (41)$$

$$\xi = k(x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta - C_L t)$$

応力式(41)を式(38)に代入する。A が実数である条件下で

$$P_L = (\lambda + 2\mu) C_L k^2 A^2 \operatorname{Re}[i \exp[i\xi]] \operatorname{Re}[i \exp[i\xi]] \quad (42)$$

実質的なエネルギーの流れは, 一周期に渡る時間積分をその周期で割った時間平均で見積もる。以下においては時間平均を両括弧  $\langle \rangle$  付きで表わす。

$$\langle P_L \rangle = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) C_L k^2 A^2 = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \omega^2 A^2 / C_L \quad (43)$$

運動エネルギー密度の時間平均は,  $\rho$  を質量密度として

$$\langle K \rangle = \frac{1}{4} \rho \omega^2 A^2 \quad (44)$$

全エネルギーの時間平均は  $\langle K \rangle$  の 2 倍であるから

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \quad (45)$$

ここでエネルギー速度を  $C_e$  とすると  $\langle P_L \rangle = \langle H \rangle C_e$  の関係より

$$C_e = C_L \quad (46)$$

S 波に対しても同様な手順で時間平均パワーが求められ

$$\langle P_T \rangle = \frac{1}{2} C_T \rho \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 / C_T \quad (47)$$

したがって  $C_e = C_T$  となり, 無限体におけるエネルギー速度はいずれも位相速度に等しい。

同一周波数, 同一振幅で式(43)と(47)を比較すれば,

$$\langle P_L \rangle : \langle P_T \rangle = C_L : C_T \quad (48)$$

となるので, 時間平均パワーは P 波の方が S 波よりも大きい。

## 3.2 伝播ベクトル

図 7 のように，直角座標系の原点を界面にとり，その法線方向に  $x_2$  座標をとる。平面波は式(35)で与えられるから，界面の両側における入射波，反射波，透過波を

$$\mathbf{u}^{(n)} = A^{(n)} \mathbf{d}^{(n)} \exp[i\xi^{(n)}] \quad ; \quad \xi^{(n)} = k^{(n)} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}^{(n)} - C^{(n)} t) \quad (49)$$

とおく。ただし指標  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  によって，それぞれ入射波，反射 P 波，反射 S 波，透過 P 波，透過 S 波を表わす。等方均質な媒体であれば，一般性を失わずに全ての波の伝播ベクトル  $\mathbf{p}$  の  $x_3$  方向成分が，0 になるように直角座標系を選ぶことが出来る。そこで基本ベクトル  $\mathbf{i}_1$  と  $\mathbf{i}_2$  を用いて入射波の伝播方向を表わせば

$$\mathbf{p}^{(0)} = \sin \theta_0 \mathbf{i}_1 + \cos \theta_0 \mathbf{i}_2 \quad (50)$$

$\theta_0$  は伝播方向と  $x_2$  軸の正方向となす角（入射角）である。



図 7 波の伝播方向

P 波の場合には粒子運動方向と位相速度は

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)} \quad ; \quad C^{(0)} = C_L \quad (51)$$

S 波の場合には

$$\mathbf{d}^{(0)} \cdot \mathbf{p}^{(0)} = 0 \quad ; \quad C^{(0)} = C_T \quad (52)$$

さらに S 波は粒子運動によって，次の 2 種類に分けられる。

$$\mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{p}^{(0)} \quad ; \quad \mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{i}_3 \quad (53)$$

前者を「SV 波」，後者を「SH 波」と言う。したがって全部で 3 種類の入射波を考えることができる。反射波や透過波も，それぞれ 3 種類の波を考えることができ，式(49)の反射波と透過波の  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{d}$  を具体的に示せば次のようになる。

$$\text{反射 P 波} \quad \mathbf{p}^{(1)} = \sin \theta_1 \mathbf{i}_1 + \cos \theta_1 \mathbf{i}_2 ; \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{p}^{(1)} ; C^{(1)} = C_L \quad (54a)$$

$$\text{反射 S V 波} \quad \mathbf{p}^{(2)} = \sin \theta_2 \mathbf{i}_1 + \cos \theta_2 \mathbf{i}_2 ; \mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{p}^{(2)} ; C^{(2)} = C_T \quad (54b)$$

$$\text{反射 S H 波} \quad \mathbf{p}^{(2)} = \sin \theta_2 \mathbf{i}_1 + \cos \theta_2 \mathbf{i}_2 ; \mathbf{d}^{(2)} = \mathbf{i}_3 ; C^{(2)} = C_T \quad (54c)$$

$$\text{透過 P 波} \quad \mathbf{p}^{(3)} = \sin \theta_3 \mathbf{i}_1 + \cos \theta_3 \mathbf{i}_2 ; \mathbf{d}^{(3)} = \mathbf{p}^{(3)} ; C^{(3)} = C_L^B \quad (54d)$$

$$\text{透過 S V 波} \quad \mathbf{p}^{(4)} = \sin \theta_4 \mathbf{i}_1 + \cos \theta_4 \mathbf{i}_2 ; \mathbf{d}^{(4)} = \mathbf{i}_3 \times \mathbf{p}^{(4)} ; C^{(4)} = C_T^B \quad (54e)$$

$$\text{透過 S H 波} \quad \mathbf{p}^{(4)} = \sin \theta_4 \mathbf{i}_1 + \cos \theta_4 \mathbf{i}_2 ; \mathbf{d}^{(4)} = \mathbf{i}_3 ; C^{(4)} = C_T^B \quad (54f)$$

上添字 B は透過側の値であることを示す。 $\theta_1$  と  $\theta_2$  はそれぞれ反射波の  $x_2$  軸となす角であり,  $\theta_3$  と  $\theta_4$  は透過波の  $x_2$  軸となす角である。

### 3.3 変位と応力の連続性

SH 波入射によって生ずる変位と応力は  $u_3$  と  $\tau_{31}$  と  $\tau_{32}$  である。界面で連続性を考えるのは  $u_3$  と  $\tau_{32}$  の 2 つである。粒子運動が  $x_1x_2$  面と直交する  $x_3$  方向なので面外変形波の解析となる。これに対して, P 波や SV 波の入射では界面で  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $\tau_{21}$ ,  $\tau_{22}$  の 4 つの連続条件を満たさなければならないので 4 つの波 (図 7) を考える。この場合は, 粒子運動が  $x_1x_2$  面内に限られる面内変形波の解析となる。式(35)の変位より生ずる応力は式(36)を用いれば

$$\tau_{ij}^{(n)} = \left[ \lambda \delta_{ij} d_m^{(n)} p_m^{(n)} + \mu (d_i^{(n)} p_j^{(n)} + d_j^{(n)} p_i^{(n)}) \right] ik^{(n)} A^{(n)} \exp[i\xi^{(n)}] \quad (55)$$

ただし  $n=3, 4$  のときの  $\lambda$  と  $\mu$  は  $\lambda^B$  と  $\mu^B$  に読み替える。界面の連続条件より

$$u_i^{(0)} + u_i^{(1)} + u_i^{(2)} = u_i^{(3)} + u_i^{(4)} \quad (56)$$

$$\tau_{2j}^{(0)} + \tau_{2j}^{(1)} + \tau_{2j}^{(2)} = \tau_{2j}^{(3)} + \tau_{2j}^{(4)} \quad (57)$$

式(49)を式(56)に代入して得られる式が  $x_2 = 0$  で任意の  $t$  について成立つためには,

$$\xi^{(0)} = \xi^{(1)} = \xi^{(2)} = \xi^{(3)} = \xi^{(4)} \quad (58)$$

したがって  $k^{(n)} C^{(n)}$  ( $=\omega$ ) の値は一定であり, また以下の関係が成立せねばならない。

$$k^{(0)} p_1^{(0)} = k^{(1)} p_1^{(1)} = k^{(2)} p_1^{(2)} = k^{(3)} p_1^{(3)} = k^{(4)} p_1^{(4)} \quad (59)$$

$$A^{(0)} d_j^{(0)} + A^{(1)} d_j^{(1)} + A^{(2)} d_j^{(2)} = A^{(3)} d_j^{(3)} + A^{(4)} d_j^{(4)} \quad (60)$$

一方, 式(57)に式(55)を代入し, 式(59)の関係を考慮すれば

$$\begin{aligned} & \left[ \lambda \delta_{2j} (d_1^{(0)} p_1^{(0)} + d_2^{(0)} p_2^{(0)}) + \mu (d_2^{(0)} p_j^{(0)} + d_j^{(0)} p_2^{(0)}) \right] k^{(0)} A^{(0)} \\ & + \left[ \lambda \delta_{2j} (d_1^{(1)} p_1^{(1)} + d_2^{(1)} p_2^{(1)}) + \mu (d_2^{(1)} p_j^{(1)} + d_j^{(1)} p_2^{(1)}) \right] k^{(1)} A^{(1)} \\ & + \left[ \lambda \delta_{2j} (d_1^{(2)} p_1^{(2)} + d_2^{(2)} p_2^{(2)}) + \mu (d_2^{(2)} p_j^{(2)} + d_j^{(2)} p_2^{(2)}) \right] k^{(2)} A^{(2)} \\ & = \left[ \lambda^B \delta_{2j} (d_1^{(3)} p_1^{(3)} + d_2^{(3)} p_2^{(3)}) + \mu^B (d_2^{(3)} p_j^{(3)} + d_j^{(3)} p_2^{(3)}) \right] k^{(3)} A^{(3)} \\ & + \left[ \lambda^B \delta_{2j} (d_1^{(4)} p_1^{(4)} + d_2^{(4)} p_2^{(4)}) + \mu^B (d_2^{(4)} p_j^{(4)} + d_j^{(4)} p_2^{(4)}) \right] k^{(4)} A^{(4)} \end{aligned} \quad (61)$$

面内変形波の解析における  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{d}$  は

$$\begin{aligned} d_1^{(1)} &= p_1^{(1)}, & d_2^{(1)} &= p_2^{(1)}, & d_1^{(2)} &= -p_2^{(2)}, & d_2^{(2)} &= p_1^{(2)} \\ d_1^{(3)} &= p_1^{(3)}, & d_2^{(3)} &= p_2^{(3)}, & d_1^{(4)} &= -p_2^{(4)}, & d_2^{(4)} &= p_1^{(4)} \end{aligned} \quad (62)$$

となるから，式(60)(61)に代入すれば

$$\begin{aligned}
A^{(1)} p_1^{(1)} - A^{(2)} p_2^{(2)} - A^{(3)} p_1^{(3)} + A^{(4)} p_2^{(4)} &= -A^{(0)} d_1^{(0)} \\
A^{(1)} p_2^{(1)} + A^{(2)} p_1^{(2)} - A^{(3)} p_2^{(3)} - A^{(4)} p_1^{(4)} &= -A^{(0)} d_2^{(0)} \\
2\mu p_1^{(1)} p_2^{(1)} k^{(1)} A^{(1)} + \mu (p_1^{(2)2} - p_2^{(2)2}) k^{(2)} A^{(2)} - 2\mu^B p_1^{(3)} p_2^{(3)} k^{(3)} A^{(3)} - \mu^B (p_1^{(4)2} - p_2^{(4)2}) k^{(4)} A^{(4)} \\
&= -\mu (d_2^{(0)} p_1^{(0)} + d_1^{(0)} p_2^{(0)}) k^{(0)} A^{(0)} \\
(\lambda + 2\mu p_2^{(1)2}) k^{(1)} A^{(1)} + 2\mu p_1^{(2)} p_2^{(2)} k^{(2)} A^{(2)} - (\lambda^B + 2\mu^B p_2^{(3)2}) k^{(3)} A^{(3)} - 2\mu^B p_1^{(4)} p_2^{(4)} k^{(4)} A^{(4)} \\
&= -[\lambda (d_1^{(0)} p_1^{(0)} + d_2^{(0)} p_2^{(0)}) + 2\mu d_2^{(0)} p_2^{(0)}] k^{(0)} A^{(0)}
\end{aligned} \tag{63}$$

P 波反射角  $\bar{\theta}_1$ ，SV 波反射角  $\bar{\theta}_2$ ，P 波透過角  $\theta_3$ ，SV 波透過角  $\theta_4$  を用いれば(図 7)，

$$\mathbf{p}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sin \bar{\theta}_1 \\ -\cos \bar{\theta}_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(2)} = \begin{pmatrix} \sin \bar{\theta}_2 \\ -\cos \bar{\theta}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(3)} = \begin{pmatrix} \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(4)} = \begin{pmatrix} \sin \theta_4 \\ \cos \theta_4 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{64}$$

また位相速度比と「音響インピーダンス比」の

$$\kappa = \frac{C_L}{C_T} = \frac{k^{(2)}}{k^{(1)}}, \quad \kappa^B = \frac{C_L^B}{C_T^B} = \frac{k^{(4)}}{k^{(3)}}; \quad \gamma = \frac{\rho^B C_T^B}{\rho C_T} \tag{65}$$

を導入すると  $\lambda + 2\mu p_2^{(1)2}$  は  $\mu \kappa^2 (1 - 2p_1^{(2)2})$  となるので，式(63)は

$$M_{ij} A^{(j)} = N_j A^{(0)} \tag{66}$$

ここに

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} -\sin \bar{\theta}_1 & -\cos \bar{\theta}_2 & \sin \theta_3 & -\cos \theta_4 \\ \cos \bar{\theta}_1 & -\sin \bar{\theta}_2 & \cos \theta_3 & \sin \theta_4 \\ \sin 2\bar{\theta}_1 & \kappa \cos 2\bar{\theta}_2 & \left(\frac{\kappa}{\kappa^B}\right) \gamma \sin 2\theta_3 & -\kappa \gamma \cos 2\theta_4 \\ -\kappa \cos 2\bar{\theta}_2 & \sin 2\bar{\theta}_2 & \kappa^B \gamma \cos 2\theta_4 & \gamma \sin 2\theta_4 \end{pmatrix} \tag{67}$$

また  $N_j$  は，入射波の種類と入射角に依存し，P 波入射と SV 波入射のそれぞれに対し

$$\{N_j\} = \begin{cases} \sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \\ \sin 2\theta_0 \\ \kappa \cos 2\bar{\theta}_2 \end{cases} \quad \{N_j\} = \begin{cases} -\cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \\ -\kappa \cos 2\theta_0 \\ \sin 2\theta_0 \end{cases} \tag{68}$$

式(66)を用いて  $A^{(j)}$  について解けば，反射波や透過波の振幅が求められる。SH 波入射では P 波は生成しないので， $A^{(1)} = A^{(3)} = 0$  であり，粒子運動は  $x_3$  軸方向のみであるから

$$d_3^{(2)} = d_3^{(4)} = 1 \tag{69}$$

伝播ベクトルは，式(64)で与えられる  $\mathbf{p}^{(2)}$ ， $\mathbf{p}^{(4)}$  と同形となるので，式(60)(61)より

$$A^{(2)} - A^{(4)} = -A^{(0)} \tag{70}$$

$$\cos \bar{\theta}_2 A^{(2)} + \gamma \cos \theta_4 A^{(4)} = \cos \theta_0 A^{(0)} \tag{71}$$

この連立式の解として入射振幅  $A^{(0)}$  に対する反射波振幅  $A^{(2)}$  と透過波振幅  $A^{(4)}$  を得る。

### 3.4 反射波と透過波

《SH 波入射》式(70)(71)を連立させて振幅比を求めれば、スローネス線図による解析から容易に  $\theta_0 = \bar{\theta}_2$  を得るので、式(9.65)の  $\gamma$  を用いれば、反射係数と透過係数は

$$R_{SH} \equiv \frac{A^{(2)}}{A^{(0)}} = \frac{\cos \theta_0 - \gamma \cos \theta_4}{\cos \theta_0 + \gamma \cos \theta_4} ; \quad T_{SH} \equiv \frac{A^{(4)}}{A^{(0)}} = \frac{2 \cos \theta_0}{\cos \theta_0 + \gamma \cos \theta_4} \quad (72)$$

これらより次の事が分かる。

$\cos \theta_0 - \gamma \cos \theta_4 = 0$  ならば、 $R_{SH} = 0$  となり SH 反射波が生じない。したがって入射角と音響インピーダンス比の値によっては、SH 波は完全に透過する場合がある。

$(C_T^B / C_T) \sin \theta_0 > 1$  ならば、式(59)より  $\sin \theta_4 > 1$  となるので  $\cos \theta_4$  は虚数となる。そして透過側に生ずる変位は次のように表わせる。

$$u_3^{(4)} = A^{(4)} \exp[-bx_2] \exp[ik^{(0)}(x_1 \sin \theta_0 - C_T t)] \quad (73)$$

ここに、

$$b = k^{(0)} \sqrt{\sin^2 \theta_0 - (C_T / C_T^B)^2} \quad (74)$$

式(73)は透過側で界面からの距離とともに振幅が指数関数的に減衰することを示している。 $\cos \theta_4$  が虚数の時、式(73)の反射係数は複素共役数の比で与えられるので、反射波の振幅は入射波の振幅に等しくなるが、位相は変化する。

垂直入射であれば  $\theta_0 = \theta_4 = 0$  であるから、式(72)より

$$R_{SH} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \quad T_{SH} = \frac{2}{1 + \gamma} \quad (75)$$

透過側の媒体が無いときは、半無限体の自由面による反射に相当するから、音響インピーダンス比  $\gamma$  を 0 の極限にして考えれば、式(72)より

$$R_{SH} = 1 \quad (76)$$

そして  $A^{(2)} d_3^{(2)} = A^{(0)} d_3^{(0)}$  なので、反射による位相の変化はない。

《P 波入射》： 透過側の媒体がない場合、式(67)で  $\gamma \rightarrow 0$  とすれば式(66)は

$$\begin{pmatrix} \sin 2\bar{\theta}_1 & \kappa \cos 2\bar{\theta}_2 \\ -\kappa \cos 2\bar{\theta}_2 & \sin 2\bar{\theta}_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sin 2\theta_0 \\ \kappa \cos 2\bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} A^{(0)} \quad (77)$$

さらに図 7 において、 $\theta_0 = \bar{\theta}_1$  となるので

$$R_{PP} \equiv \frac{A^{(1)}}{A^{(0)}} = \frac{\sin 2\theta_0 \sin 2\bar{\theta}_2 - \kappa^2 \cos^2 2\bar{\theta}_2}{\sin 2\theta_0 \sin 2\bar{\theta}_2 + \kappa^2 \cos^2 2\bar{\theta}_2} ; \quad R_{PS} \equiv \frac{A^{(2)}}{A^{(0)}} = \frac{2\kappa \sin 2\theta_0 \cos 2\bar{\theta}_2}{\sin 2\theta_0 \sin 2\bar{\theta}_2 + \kappa^2 \cos^2 2\bar{\theta}_2} \quad (78)$$

したがって、これらより次の事が分かる。

振幅比は入射波の波長に無関係で、入射角と材料に固有な位相速度比  $\kappa$  に依存する。

垂直入射 ( $\theta_0 = \bar{\theta}_1 = 0$ ) の時  $R_{PP} = -1$ 、 $T_{PS} = 0$  となり、入射 P 波は P 波としてのみ反射する。 $d_2^{(2)} = \cos 0 = 1$ 、 $d_2^{(1)} = \cos \pi = -1$ 、 $R_{PP} = -1$  なので

$$A^{(0)} d_2^{(0)} = A^{(1)} d_2^{(1)} \quad (79)$$

であり、入射波と反射波の変位は同位相である。このことは応力波の反転を意味する。

$$\sin 2\theta_0 \sin 2\bar{\theta}_2 = \kappa^2 \cos^2 2\bar{\theta}_2 \quad (80)$$

ならば，反射波はSV波のみとなり，入射P波は完全にSV波モードに変換する。そのときの反射SV波の振幅は次式より求められる。

$$R_{PS} = \frac{A^{(2)}}{A^{(0)}} = \kappa \cot 2\bar{\theta}_2 \quad (81)$$

ポアソン比 $\nu$ が0.25( $\kappa = \sqrt{3}$ )の時に，入射角 $\theta_0$ が60度ならば，スローネス線図よりS波反射角 $\bar{\theta}_2$ が30度となり，式(80)が満足されてP波からSV波へ完全にモード変換する。

《SV波入射》式(67)において，透過側に媒体がない場合， $\gamma \rightarrow 0$ として

$$\begin{pmatrix} \sin 2\bar{\theta}_1 & \kappa \cos 2\bar{\theta}_2 \\ -\kappa \cos 2\bar{\theta}_2 & \sin 2\bar{\theta}_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\kappa \cos 2\theta_0 \\ \sin 2\theta_0 \end{Bmatrix} A^{(0)} \quad (82)$$

入射角と反射角が等しい( $\theta_0 = \bar{\theta}_2$ )ことに注意して振幅比を求めれば

$$R_{SP} \equiv \frac{A^{(1)}}{A^{(0)}} = \frac{-\kappa \sin 4\theta_0}{\sin 2\bar{\theta}_1 \sin 2\theta_0 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_0} \quad (83)$$

$$R_{SS} \equiv \frac{A^{(2)}}{A^{(0)}} = \frac{\sin 2\bar{\theta}_1 \sin 2\theta_0 - \kappa^2 \cos^2 2\theta_0}{\sin 2\bar{\theta}_1 \sin 2\theta_0 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_0} \quad (84)$$

式(83)より，入射角が0度，45度，90度の時，反射P波はなく，入射SV波はSV波のまま反射する。このほか入射角が臨界角を超える場合も反射P波は生じない。まず，臨界角で入射するときを考えれば $\theta_0 = \theta_{CR} = \arcsin(1/\kappa)$ であり， $\bar{\theta}_1 = \pi/2$ であるから，振幅比は式(83)と式(84)より

$$R_{SP} = \frac{4\sqrt{\kappa^2 - 1}}{\kappa(2 - \kappa^2)} \quad R_{SS} = -1 \quad (85)$$

次に $\theta_0 > \theta_{CR}$ の時の波動を調べる。式(59)より $q_1^{(0)} = q_1^{(1)}$ であるから，スローネスの定義より $p_1^{(1)} = \kappa p_1^{(0)}$ となる。また $|\mathbf{p}| = 1$ なので

$$\begin{aligned} p_1^{(1)} &= \kappa \sin \theta_0 \\ p_2^{(1)} &= -\sqrt{1 - (\kappa p_1^{(0)})^2} = -i\kappa \sqrt{(p_1^{(0)})^2 - \frac{1}{\kappa^2}} = -i\kappa \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \frac{1}{\kappa^2}} \end{aligned} \quad (86)$$

または

$$\sin \bar{\theta}_1 = \kappa \sin \theta_0 \quad \cos \bar{\theta}_1 = i\kappa \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \frac{1}{\kappa^2}} \quad (87)$$

これを式(83)に代入すれば

$$R_{SP} = \frac{-\sin 4\theta_0}{2i\sqrt{(\kappa^2 \sin^2 \theta_0 - 1)} \sin \theta_0 \sin 2\theta_0 + \kappa \cos^2 2\theta_0} = |R_{SP}| \exp[-i\alpha] \quad (88)$$

ただし

$$|R_{SP}| = \frac{\sin 4\theta_0}{\sqrt{4(\kappa^2 \sin^2 \theta_0 - 1) \sin^2 \theta_0 \sin^2 2\theta_0 + \kappa^2 \cos^4 2\theta_0}} \quad (89)$$

$$\alpha = \arctan \left[ \frac{2\sqrt{\kappa^2 \sin^2 \theta_0 - 1} \sin \theta_0 \sin 2\theta_0}{\kappa \cos^2 2\theta_0} \right] \quad (90)$$

また式(87)を(84)に代入すれば分子と分母が複素共役なので  $|R_{SS}| = 1$  となる。

$$R_{SS} = -\exp[-2i\alpha] \quad (91)$$

これで反射波振幅  $A^{(1)}$ ,  $A^{(2)}$  が入射波振幅  $A^{(0)}$  に対する比として求められ, 式(87)とともに式(49)に代入すれば, 反射波による変位  $\mathbf{u}^{(1)}$  は

$$\mathbf{u}^{(1)} = A^{(0)} |R_{SP}| \mathbf{d}^{(1)} \exp \left[ k^{(0)} \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \frac{1}{\kappa^2}} x_2 \right] \exp \left[ ik^{(0)} \sin \theta_0 \left( x_1 - \frac{C_L t}{\kappa \sin \theta_0} \right) - i\alpha \right] \quad (92)$$

この結果から, 入射 S 波によって生じていた P 波は, 入射角が臨界角を超えると界面を伝播する波に変化し, その伝播方向に対する見かけの速度  $C$  と波数  $k$  は

$$C = \frac{C_L}{\kappa \sin \theta_0}, \quad k = k^{(0)} \sin \theta_0 \quad (93)$$

となることを示している。一方, 反射 SV 波に対応する  $\mathbf{u}^{(2)}$  は, 次式で与えられる。

$$\mathbf{u}^{(2)} = -A^{(0)} \mathbf{d}^{(2)} \exp \left[ ik^{(0)} (x_1 \sin \theta_0 - x_2 \cos \theta_0 - C_T t) - 2i\alpha \right] \quad (94)$$

### 3.5 エネルギーの反射と分配

時間平均パワー密度は, 式(43)(47)より

$$\langle P_L \rangle = \frac{1}{2} A^2 (\lambda + 2\mu) \omega^2 / C_L, \quad \langle P_T \rangle = \frac{1}{2} A^2 \mu \omega^2 / C_T \quad (95)$$

そこで, 図 8 に示すように断面積  $\Delta S_0$  の入射 P 波の波線束を考え, 対応する反射 P 波と反射 SV 波の波線束断面積をそれぞれ  $\Delta S_1$  と  $\Delta S_2$  とする。自由表面の面積  $\Delta S$  に外から受ける仕事もなく, また波の伝播過程でエネルギーの散逸もないならば,  $\Delta S_0$  をよぎって, 流入する時間平均エネルギーは流出する平均エネルギー量の和に等しい。よって

$$\left\{ \frac{A_0^2 (\lambda + 2\mu) \omega^2}{2C_L} \right\} \Delta S_0 = \left\{ \frac{A_1^2 (\lambda + 2\mu) \omega^2}{2C_L} \right\} \Delta S_1 + \left\{ \frac{A_2^2 \mu \omega^2}{2C_T} \right\} \Delta S_2 \quad (96)$$

幾何学的関係より

$$\Delta S_0 = \Delta S_1 = \Delta S \cos \theta_0 \quad \Delta S_2 = \Delta S \cos \bar{\theta}_2 \quad (97)$$

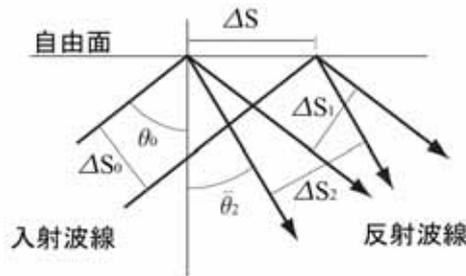


図 8 波動エネルギーバランス

であるから式(96)より

$$R_{PP}^2 + R_{PS}^2 \left( \frac{C_T \cos \bar{\theta}_2}{C_L \cos \theta_0} \right) = 1 \quad (98)$$

また  $\kappa = \frac{C_L}{C_T} = \frac{\sin \theta_0}{\sin \bar{\theta}_2}$  の関係を用いると

$$R_{PP}^2 + R_{PS}^2 \left( \frac{\sin 2\bar{\theta}_2}{\sin 2\theta_0} \right) = 1 \quad (99)$$

左辺に、式(78)を代入すれば確認することができる。  $\kappa$  の式を用いて  $\bar{\theta}_2$  を消去すれば

$$R_{PP}^2 + \frac{R_{PS}^2}{\kappa \cos \theta_0} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_0}{\kappa^2}} = 1 \quad (100)$$

この式は解析結果や計算結果を確かめる手段として利用できる。

## 4 界面を伝播する波

### 4.1 界面波

場を支配する方程式は、変位ポテンシャルの導入により、互いに独立な波動方程式に分割できる。波動現象の一般解は、それぞれの波動方程式の解を境界条件が満たされるように組み合わせて作られる。二次元であれば変位ポテンシャル( $\phi$ と $\psi$ )を次式により導入する。

$$u_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad u_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (101)$$

この結果、運動方程式は次の2つの波動方程式になる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C_L^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (102)$$

界面を伝播することから採用する解形として、界面で常に位相が一致することと、界面から離れるにつれて急減するという2つの条件を満たすことを考慮する。そこで界面に座標原点があるときに次の形を選ぶことができる。

$$\begin{aligned} \phi &= A \exp(-k v_1 x_2) \exp[ik(x_1 - Ct)] & ; & \quad x_2 \geq 0 \\ \psi &= B \exp(-k v_2 x_2) \exp[ik(x_1 - Ct)] & ; & \quad x_2 \geq 0 \\ \phi^B &= A^B \exp(k v_1^B x_2) \exp[ik(x_1 - Ct)] & ; & \quad x_2 \leq 0 \\ \psi^B &= B^B \exp(k v_2^B x_2) \exp[ik(x_1 - Ct)] & ; & \quad x_2 \leq 0 \end{aligned} \quad (103)$$

ただし

$$v_1^2 = 1 - \left( \frac{C}{C_L} \right)^2, \quad v_2^2 = 1 - \left( \frac{C}{C_T} \right)^2, \quad (v_1^B)^2 = 1 - \left( \frac{C}{C_L^B} \right)^2, \quad (v_2^B)^2 = 1 - \left( \frac{C}{C_T^B} \right)^2 \quad (104)$$

式(103)のポテンシャルは、それぞれの場の方程式を満たしている。 $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_1^B$ ,  $v_2^B$  はそれぞれ実部が正であれば、ポテンシャルは $|x_2| \rightarrow \infty$ で急減し、界面のみを伝播する波となる条件を備えている。また、界面における変位と応力の連続条件から  $x_2 = 0$  で

$$u_1 = u_1^B, \quad u_2 = u_2^B, \quad \tau_{22} = \tau_{22}^B, \quad \tau_{21} = \tau_{21}^B \quad (105)$$

したがって式(103)を式(101)に代入して得られる変位と、その変位をフックの法則式に入れて得られる応力に、式(105)の条件を適用すれば

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & v_2 & -v_2^B \\ v_1 & v_1^B & 1 & 1 \\ -(1+v_2^2) & \zeta(1+v_2^{B^2}) & -2v_2 & 2\zeta v_2^B \\ 2v_1 & 2\zeta v_1^B & 1+v_2^2 & \zeta(1+v_2^{B^2}) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ A^B \\ iB \\ -iB^B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (106)$$

ここに,  $\zeta = \mu^B / \mu$  である。上式が有意な解を持つ条件から, 係数行列式を 0 とおけば

$$\begin{aligned} & (C/C_T)^4 \left\{ (1-\zeta m^2)^2 - (v_1^B + \zeta m^2 v_1)(v_2^B + \zeta m^2 v_2) \right\} \\ & -4(1-\zeta)(C/C_T)^2 \left\{ 1 - v_1^B v_2^B - \zeta m^2 (1 - v_1 v_2) \right\} + 4(1-\zeta)^2 (1 - v_1 v_2)(1 - v_1^B v_2^B) = 0 \end{aligned} \quad (107)$$

ここに  $m = C_T / C_T^B$  である。この特性式の根  $C$  は数値的に求められ、それは実根とは限らない。式(104)の関数  $v_j$  の実部を正にする実根  $C = C_{ST}$  は、弾性媒体の組み合わせに依存して存在し、そのような根に対応する特性波を「ストーンレー波」(Stoneley 波)という(図9)。 $\rho, \rho^B$  の値が同じオーダーであれば、数値計算より、 $\mu, \mu^B$  がほとんど等しい場合に限られることが分っている。 $\rho^B, \mu^B$  で与えられる側の媒体の横波速度が、他方側の媒体の横波速度よりも遅い場合を考えれば、式(107)の特性根  $C_{ST}$  が

$$C_T > C_T^B > C_{ST} > C_R^B \quad (108)$$

となる時に限ってその波が存在する。 $C_R^B$  は後で述べるようなレイリー波速度である。ストーンレー波は  $\omega$  に依存しないのでレイリー波と同様に分散性のない波である。

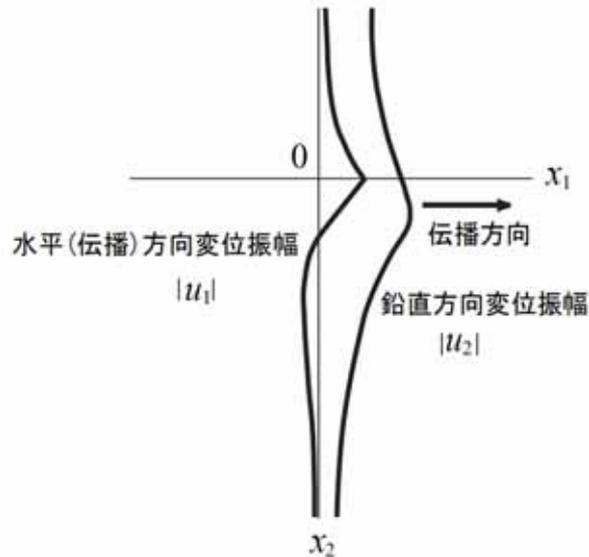


図9 ストンレー波による界面近傍の変位

## 4.2 表面波

一方が音響流体のとき  $\psi^B$  が存在しない (S波がない) ので  $B^B = 0$  であり, せん断応力  $\tau_{21}$  が 0 となる。そこで式(106)において  $\mu^B \rightarrow 0$  の極限を考えると, その係数行列式は

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_1^B & 1 \\ 1+v_2^2 & \left(\frac{\rho^B}{\rho}\right)\left(\frac{C}{C_T}\right)^2 & 2v_2 \\ 2v_1 & 0 & 1+v_2^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (109)$$

ただし,  $\zeta(1+v_2^{B2})$  を  $2(\mu^B/\mu) - (\rho^B/\rho)(C/C_T)^2$  に, 式変形してから極限をとった。

式(109)の根  $C$  は音響流体と弾性体の界面における特性波の伝播速度で, 常に実根が存在する。さらに, 一方の領域に媒体がないときは,  $\rho^B \rightarrow 0$  の極限をとって次式を得る。

$$\begin{vmatrix} 1+v_2^2 & 2v_2 \\ 2v_1 & 1+v_2^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (110)$$

自由表面を伝播する表面波、すなわち「レイリー波」の速度  $C_R$  は式(110)の根によって与えられる。特性根はコンピュータによる計算で容易に求められるが, 次の簡易式で近似値を求めることも出来る。

$$\frac{C_R}{C_T} = \frac{0.874 + 0.668\nu}{1 + 0.529\nu} \quad (111)$$

ここに,  $\nu$  はポアソン比である。

次に, この波が位相速度  $C_R$  で伝播するときの表面粒子の運動を調べる。実部を実際の変位に対応させれば, 表面 ( $x_2 = 0$ ) の変位は

$$\text{Re}[u_1] = Aak \sin[k(C_R t - x_1)], \quad a = \frac{1}{2} \left( \frac{C_R}{C_T} \right)^2 \quad (112)$$

$$\text{Re}[u_2] = Abk \cos[k(C_R t - x_1)], \quad b = \frac{1+v_2^2}{4v_2} \left( \frac{C_R}{C_T} \right)^2 \quad (113)$$

式(112)(113)より時間を消去すれば, 粒子の運動は

$$\left( \frac{\text{Re}u_1}{a} \right)^2 + \left( \frac{\text{Re}u_2}{b} \right)^2 = (Ak)^2 \quad (114)$$

楕円軌跡を描く。そして

$$\frac{b}{a} = 1 + \frac{(1-v_2)^2}{2v_2} > 1 \quad (115)$$

であるから, 図 10 のように楕円の長軸は自由表面に垂直である。

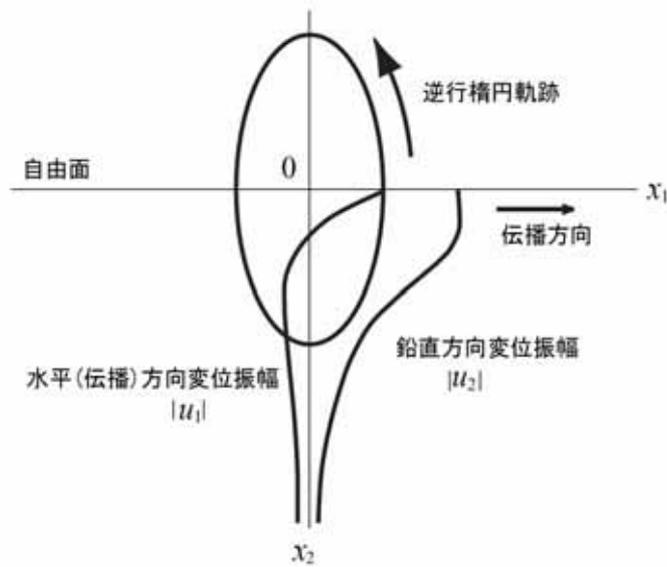


図 10 表面波(レイリー波)による表面近傍の変位

## 5 弾性単層を伝播する波

層内では表と裏の両面で反射を繰り返しながら波は伝播する。このとき層の厚さ方向に定在波が構成され、波動エネルギーの流れる方向は長手方向のみになる。このように特定方向に波が誘導される状態になるので、このときの媒体を「導波体」(Wave guide)という。

### 5.1 面外変形モードの波 (SH 波)

導波現象の理解のために、簡易な単層内の SH 波の伝播を例にして説明する。図 11 のように伝播方向が  $x_1$  方向で層の中央面が  $(x_1, 0, x_3)$  となる直角座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  を選べば、SH 波による変位は次式によって与えられる。

$$u_3 = f(x_2) \exp\{ik(x_1 - ct)\} \quad (116)$$

SH 波では他の変位成分は恒等的に 0 である。また、SH 波の波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = \frac{1}{C_T^2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (117)$$

そして、境界条件として、層の表裏面で剪断応力が 0 となることから、

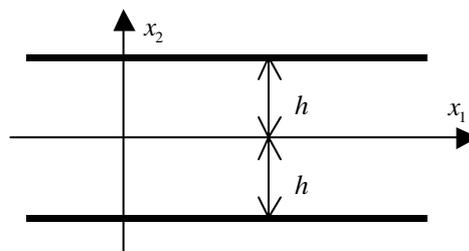


図 11 弾性単層と座標

$$\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 ; \quad x_2 = \pm h \quad (118)$$

式(116)を式(117)に代入して得られる微分方程式を解けば

$$f(x_2) = B_1 \sin(qx_2) + B_2 \cos(qx_2); \quad q^2 = (\omega / C_T)^2 - k^2 \quad (119)$$

式(119)を(116)に代入し、式(118)を考慮すれば

$$B_1 \cos(qh) \pm B_2 \sin(qh) = 0 \quad (120)$$

したがって、

$$B_1 = 0, \quad \sin(qh) = 0 \quad (121a)$$

または、

$$B_2 = 0, \quad \cos(qh) = 0 \quad (121b)$$

のいずれかでなければならない。式(119)から分かるように、 $B_1 = 0$ の時の変形は層の中央面に対して対称であり、 $B_2 = 0$ の時は反対称である。式(121)abのいずれかが成立するのは、

$$qh = n\pi / 2; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (122)$$

の時である。式(122)を(119)に入れば

$$\Omega^2 = n^2 + \xi^2 \quad (123)$$

ここに、次の無次元変数を導入した。

$$\Omega = \frac{2h\omega}{\pi C_T}, \quad \xi = \frac{2hk}{\pi} \quad (124)$$

式(123)を満足する  $\Omega \cdot \xi$  面上の曲線は  $n$  をパラメータとして無限ある。これらのそれぞれを「分枝」(branch)という。分枝は特定の伝播モードに対応する。この分枝の集まりによって、「周波数スペクトル」(Frequency spectrum) が構成される。式(121)から、 $n$  が偶数の時  $x_2 = 0$  の面に対して変位分布が対称形、奇数の時は反対称となる。そこで  $n = 2(m-1)$  のときSH波の対称  $m$  次モード、 $n = 2m-1$  のときSH波の反対称  $m$  次モードとし、それぞれを  $S(m)$ 、 $A(m)$  と表記する。最低次の対称モード  $S(1)$  は一定分布となる。最低次の反対称モード  $A(1)$  は一つの節を持っている。 $\omega = kC$  であるから式(124)より位相速度  $C$  は

$$C / C_T = \pm \sqrt{1 + (n / \xi)^2} = \pm \sqrt{1 - (n / \Omega)^2} \quad (125)$$

複符号は波の伝播方向を示すが、対称性より実質的に同じなので + の場合のみを考える。式(123)で  $\Omega < n$  の時  $\xi$  は虚数になる。このとき式(116)で与えられる変位  $u_3$  の振幅は  $x_1$  の増加と共に指数関数的に急変し、定常振幅で伝わる波にはならない。特定のモードにおいて  $\xi$  が実数から複素数に変わる臨界の周波数を「遮断周波数」(Cutoff frequency) という。SH波が層を伝播するときの遮断周波数は、波数が 0 となる周波数で与えられる。図 12 に周波数スペクトルを示す。対称性を考慮して、 $\Omega > 0$ 、 $\text{Re} \xi > 0$ 、 $\text{Im} \xi > 0$  の領域のみ示す。

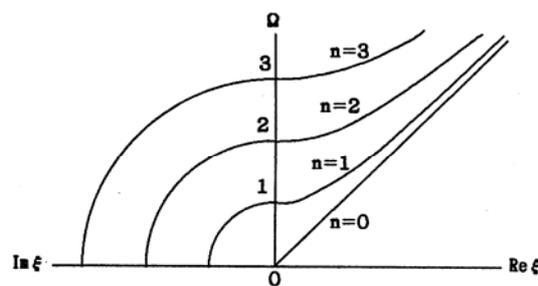


図 12 弾性単層を伝わる SH 波の周波数スペクトラム

## 5.2 SH 波によって層内を伝わるエネルギー

波の流入する面の法ベクトルは  $(l, m, n) = (-1, 0, 0)$  であるので、パワー密度は

$$P = -\tau_{zx} \dot{w} \quad (126)$$

一方、体積要素の運動エネルギー密度は、この SH 波の場合

$$K = \rho \dot{w}^2 / 2 \quad (127)$$

これを層厚にわたって積分し、さらに一周期  $T$  の時間平均  $\langle K \rangle$  をもとめる。

$$\langle K \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-h}^h K dy = \frac{\rho}{2T} \int_0^T dt \int_{-h}^h \dot{w}^2 dy \quad (128)$$

これは、層厚に蓄えられる時間平均ひずみエネルギー  $\langle U \rangle$  に等しいので、全エネルギー  $\langle H \rangle$  はちょうど  $\langle K \rangle$  の 2 倍になる。

パワー密度の時間平均  $\langle P \rangle$  は、全エネルギーの時間平均  $\langle H \rangle$  に比例するので、その係数を  $C_e$  とすれば

$$\langle P \rangle = C_e \langle H \rangle. \quad (129)$$

次元解析より  $C_e$  は速度であり、エネルギーの移動速度であることがわかる。従って  $\langle H \rangle$  に対する  $\langle P \rangle$  を算出すれば、エネルギー伝搬速度  $C_e$  が求められる。たとえば、式(116)(119)から反対称モード ( $B_2 = 0$ ) の SH 波を考えれば

$$w = B_1 \sin(qy) \cos\{k(x - Ct)\} \quad (130)$$

であるから

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_{-h}^h \tau_{zx} \dot{w} dy = \frac{1}{2} \mu C h B_1^2 k^2, \quad T = \frac{2\pi}{kC} \quad (131)$$

$$\langle H \rangle = 2 \langle K \rangle = \frac{1}{2} \rho C^2 h B_1^2 k^2 \quad (132)$$

式(129)へ式(131)(132)を代入すると、エネルギー速度  $C_e$  は

$$C_e / C_T = C_T / C = \xi / \sqrt{n^2 + \xi^2} \quad (133)$$

式(123)より

$$\frac{d\Omega}{d\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{n^2 + \xi^2}} = \frac{C_e}{C_T} \quad (134)$$

結局、式(124)の置換から

$$C_e = \frac{d\omega}{dk} \quad (135)$$

エネルギー速度は角周波数  $\omega$  の波数  $k$  による微分に等しいことが示された。次に  $\omega = kC$  より、位相速度  $C$  との関係は

$$C_e = C + k \frac{dC}{dk} \quad (136)$$

最低次対称モードの SH 波は、位相速度  $C$  が定数  $C_T$  に等しいから、 $C_e = C_T$  となるが、その他のモードは  $C = C(k)$  と波数に依存し、エネルギー速度  $C_e$  は位相速度  $C$  と異なる。

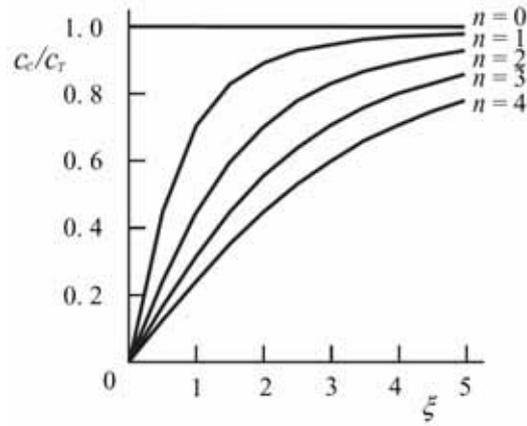


図 13 弾性単層を伝わる SH 波のエネルギー速度

無次元群速度  $C_e/C_T$  を図 13 に示す。 $n \geq 1$  のモードに対し  $\xi = 0$  のときの群速度は 0 である。すなわち遮断周波数のときエネルギーの伝達がなくなる。 $\xi \rightarrow \infty$  とすると  $C_e/C_T \rightarrow 1$  になる。これは相対的に層を厚くした時にあたり、 $C_e$  は  $C_T$  に漸近し、無限体における場合と同様になる。また、式(133)の  $\xi/\sqrt{n^2 + \xi^2}$  が、 $n \geq 1$  では常に 1 より小さいことから

$$C_e < C_T < C \quad (137)$$

なお、純虚数の波数に対しては、応力と体積要素速度の位相が 90 度ずれるので、 $\langle P \rangle$  が純虚数となりエネルギーの移動はない。この時は局所的にエネルギーが蓄えられた定在波となる。境界値問題の解には、このような定在波成分も含まれることが多いので重要である。

### 5.3 面内変形波(ラム波)

座標の  $x_1$  方向に伝播する二次元波のうち、 $x_1$  と  $x_2$  方向の変位が生ずる波を面内変形波という。単層を伝わる時に構成される面内変形波を「ラム波」(Lamb wave)といい、P波とS波の連成した特性波である。層厚の無視できない板の動的応答解析では重要な波である。層厚を  $2h$  とし、 $x_2 = \pm h$  で応力が 0 となる条件を入れて、特性方程式を導けば、対称モードと反対称モードのそれぞれに対し、次のようになる。

$$(\lambda k^2 + \lambda p^2 + 2\mu p^2)(k^2 - q^2) \cos ph \sin qh - 4\mu k^2 pq \sin ph \cos qh = 0 \quad (138a)$$

$$(\lambda k^2 + \lambda p^2 + 2\mu p^2)(k^2 - q^2) \sin ph \cos qh - 4\mu k^2 pq \cos ph \sin qh = 0 \quad (138b)$$

ただし、

$$p^2 = (\omega/C_L)^2 - k^2, \quad q^2 = (\omega/C_T)^2 - k^2 \quad (139)$$

ラム定数の  $\lambda$  と  $\mu$  は、次式によって縦波と横波の速度に置き換えてもよい。

$$\lambda = \rho(C_L^2 - 2C_T^2), \quad \mu = \rho C_T^2 \quad (140)$$

式(138)を満たす  $k$  と  $\omega$  の関係は Mindlin [3] によって詳しく調べられている。また、この波のエネルギー速度は、陰関数微分法によって解析的に導かれている[4]。単層内のエネルギー伝播方向は、ほとんどが位相面の移動方向になるが、対称 2 次モードの低波数域 ( $\xi \ll 1$ )

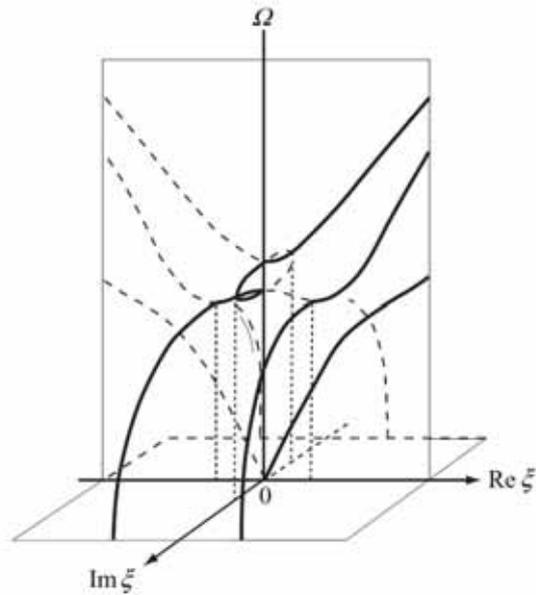


図 14 ラム波の三つの低次モード分枝

では逆向きになる。したがって衝撃応答解析において、衝撃エネルギーが衝撃点から遠ざかるように解を構成するならば、負の波数成分も必要となることに注意しなければならない。そのような応答解析に採用される特性スペクトル曲線の分枝を図 14 に太実線で示す。ほとんどの力学的衝撃応答は、対称でも反対称でも 3 次モードまでの近似解析で十分である。特別な場合として長波極限 ( $\xi \rightarrow 0$ ) を考えれば、最低次対称モード(伸縮モード)から位相速度は次式で与えられる。

$$C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} C_T \equiv C_{pl} \quad (141)$$

$C_{pl}$  は「板波速度」である。最低次反対称モード(たわみモード)から、位相速度は

$$C = \frac{\omega}{k} = 2hk \sqrt{\frac{\kappa^2 - 1}{3\kappa^2}} C_T = kh \sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}} \quad (142)$$

ここに、 $\kappa = C_L / C_T$  である。たわみ波速度は波数  $k$  の一次関数であり、波動分散性を示す。

## 6 弾性積層材を伝播する波

表層とコア層より成るサンドイッチ板を考える。原点をコア中央面に置き、 $y$  座標方向をその面の法線方向に一致させた直角座標系  $(x, y, z)$  を用いる (図 15)。波動場は、 $x$  方向変位  $u$  と  $y$  方向変位  $v$  のみからなる 2 次元問題とし、 $x$  方向へ伝播する波を考える。

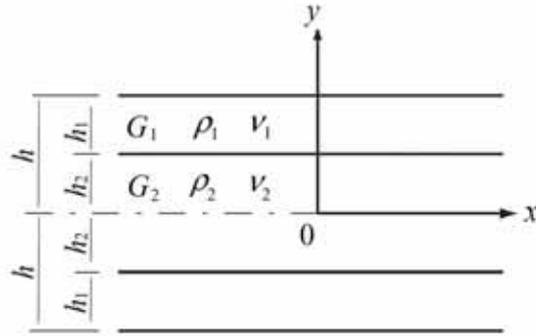


図 15 サンドイッチ材

## 6.1 特性方程式

第 4.1 節と同じ変位ポテンシャル  $\phi$ ,  $\psi$  を導入すれば、解は同じ形となる。すなわち

$$\begin{aligned}\phi &= (A \sin py + B \cos py) \exp[i(kx - \omega t)] \\ \psi &= (C \sin qy + D \cos qy) \exp[i(kx - \omega t)]\end{aligned}\quad (143)$$

ここに

$$p^2 = (\omega / C_L)^2 - k^2, \quad q^2 = (\omega / C_T)^2 - k^2 \quad (144)$$

未定係数  $A, B, C, D$  が表層とコアのそれぞれにあり、添字  $m$  で区別すれば、変位と応力解は

$$u_m = ik (A_m \sin p_m y + B_m \cos p_m y) + q_m (C_m \cos q_m y - D_m \sin q_m y) \quad (145)$$

$$v_m = p_m (A_m \cos p_m y - B_m \sin p_m y) - ik (C_m \sin q_m y + D_m \cos q_m y) \quad (146)$$

$$\tau_{yxm} = G_m \left[ 2ikp_m (A_m \cos p_m y - B_m \sin p_m y) + k^2 q_m^2 (C_m \sin q_m y + D_m \cos q_m y) \right] \quad (147)$$

$$\sigma_{ym} = G_m \left[ (k^2 - q_m^2) (A_m \sin p_m y + B_m \cos p_m y) - 2ikq_m (C_m \cos q_m y - D_m \sin q_m y) \right] \quad (148)$$

ここに共通因子  $\exp[i(kx - \omega t)]$  を省略し、また表層とコアをそれぞれ  $m=1, 2$  によって示した。コア内変位  $u_2$  の層厚に渡る分布の対称性から、 $A_2$  と  $D_2$  が 0 となる対称モードと、 $B_2$  と  $C_2$  が 0 となる反対称モードの解析に分ける。表面で応力が 0 と界面で連続であることより

$$\tau_{yx1} = \sigma_{y1} = 0; \quad y = \pm h \quad (149)$$

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \tau_{yx1} = \tau_{yx2}, \quad \sigma_{y1} = \sigma_{y2}; \quad y = \pm h_2 \quad (150)$$

式(145)-(148)を式(149)-(150)へ代入すると係数  $A_m, B_m, C_m, D_m$  に関する式が得られるが、有意解の条件としてその係数行列式を 0 とおくと、対称変形、反対称変形のそれぞれについて次の特性方程式を得る[5]。

$$F_s \equiv \det[\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \mathbf{D}_3 \quad \mathbf{D}_4 \quad \mathbf{D}_5 \quad \mathbf{D}_6] = 0 \quad (151)$$

$$F_a \equiv \det[\mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \mathbf{D}_3 \quad \mathbf{D}_4 \quad \mathbf{D}_7 \quad \mathbf{D}_8] = 0 \quad (152)$$

ここに、ベクトル  $\mathbf{D}_i$  は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_1 &= \begin{Bmatrix} -2P_1\xi C_{p1} \\ (\xi^2 - Q_1^2)S_{p1} \\ -\xi S_{p12} \\ P_1C_{p12} \\ -2P_1\xi C_{p12} \\ (\xi^2 - Q_1^2)S_{p12} \end{Bmatrix}, & \mathbf{D}_2 &= \begin{Bmatrix} 2P_1\xi S_{p1} \\ (\xi^2 - Q_1^2)C_{p1} \\ -\xi C_{p12} \\ -P_1S_{p12} \\ 2P_1\xi S_{p12} \\ (\xi^2 - Q_1^2)C_{p12} \end{Bmatrix}, & \mathbf{D}_3 &= \begin{Bmatrix} (\xi^2 - Q_1^2)S_{q1} \\ -2Q_1\xi C_{q1} \\ Q_1C_{q12} \\ -\xi S_{q12} \\ (\xi^2 - Q_1^2)S_{q12} \\ -2Q_1\xi C_{q12} \end{Bmatrix} \\
\mathbf{D}_4 &= \begin{Bmatrix} (\xi^2 - Q_1^2)C_{q1} \\ 2Q_1\xi S_{q1} \\ -Q_1S_{q12} \\ -\xi C_{q12} \\ (\xi^2 - Q_1^2)C_{q12} \\ 2Q_1\xi S_{q12} \end{Bmatrix}, & \mathbf{D}_5 &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi C_{p22} \\ P_2S_{p22} \\ -2\gamma P_2\xi S_{p22} \\ -\gamma(\xi^2 - Q_2^2)C_{p22} \end{Bmatrix}, & \mathbf{D}_6 &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Q_2C_{q22} \\ \xi S_{q22} \\ -\gamma(\xi^2 - Q_2^2)S_{q22} \\ 2\gamma Q_2\xi C_{q22} \end{Bmatrix} \\
\mathbf{D}_7 &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \xi S_{p22} \\ -P_2C_{p22} \\ 2\gamma P_2\xi C_{p22} \\ -\gamma(\xi^2 - Q_2^2)S_{p22} \end{Bmatrix}, & \mathbf{D}_8 &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_2S_{q22} \\ \xi C_{q22} \\ -\gamma(\xi^2 - Q_2^2)C_{q22} \\ -2\gamma Q_2\xi S_{q22} \end{Bmatrix} \tag{153}
\end{aligned}$$

ただし、以下のように置き換えをしている。

$$\begin{aligned}
\Omega &= \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{2h}{C_T^*}, \quad \xi = \frac{k}{2\pi} \cdot 2h, \quad \gamma = \frac{G_2}{G_1}, \quad C_T^* = \sqrt{\frac{N_1G_1 + N_2G_2}{N_1\rho_1 + N_2\rho_2}}, \quad N_m = \frac{h_m}{h}, \\
P_m &= \sqrt{(\Omega C_T^* / C_{Lm})^2 - \xi^2}, \quad Q_m = \sqrt{(\Omega C_T^* / C_{Tm})^2 - \xi^2}, \\
S_{pm} &= \sin(\pi P_m), \quad S_{qm} = \sin(\pi Q_m), \quad C_{pm} = \cos(\pi P_m), \quad C_{qm} = \cos(\pi Q_m), \\
S_{pm2} &= \sin(\pi P_m N_2), \quad S_{qm2} = \sin(\pi Q_m N_2), \quad C_{pm2} = \cos(\pi P_m N_2), \quad C_{qm2} = \cos(\pi Q_m N_2)
\end{aligned} \tag{154}$$

$\Omega$ ,  $\xi$  はそれぞれ無次元周波数、無次元波数である。

## 6.2 エネルギー伝搬の速さ

エネルギーが伝搬する速さは、前節からわかるように  $C_e = d\omega/dk$  で与えられる。すなわち  $C_T^*$  で無次元化すれば  $d\Omega/d\xi$  である。よって

$$\bar{C}_e \equiv \frac{C_e}{C_T^*} = -\frac{\partial F_j / \partial \xi}{\partial F_j / \partial \Omega}, \quad j = s, a \tag{155}$$

対称変形モードでは

$$\frac{\partial F_s}{\partial \xi} = \det \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{D}_6 \right] + \det \left[ \mathbf{D}_1 \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{D}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{D}_6 \right] + \cdots \quad (156a)$$

$$\cdots \cdots + \det \left[ \mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{D}_6 \right]$$

$$\frac{\partial F_s}{\partial \Omega} = \det \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{D}_6 \right] + \det \left[ \mathbf{D}_1 \quad \frac{\partial}{\partial \Omega} \mathbf{D}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{D}_6 \right] + \cdots \quad (156b)$$

$$\cdots \cdots + \det \left[ \mathbf{D}_1 \quad \mathbf{D}_2 \quad \cdots \quad \frac{\partial}{\partial \Omega} \mathbf{D}_6 \right]$$

反対称変形モードでは、式(156)の  $\mathbf{D}_5$ 、 $\mathbf{D}_6$  を、それぞれ  $\mathbf{D}_7$ 、 $\mathbf{D}_8$  に置き換えれば、順に  $\frac{\partial F_a}{\partial \xi}$ 、 $\frac{\partial F_a}{\partial \Omega}$  を得る。式中の偏導関数は具体的に求められ、たとえば  $\frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial \xi}$  は

$$\frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial \xi} = \begin{Bmatrix} 2 \left[ (\xi^2 - P_1^2) C_{p1} / P_1 - \xi^2 \pi S_{p1} \right] \\ \xi \left[ 4S_{p1} - (\xi^2 - Q_1^2) \pi C_{p1} / P_1 \right] \\ -S_{p12} + (\xi^2 N_2 \pi C_{p12} / P_1) \\ \xi \left[ -C_{p12} / P_1 + N_2 \pi S_{p12} \right] \\ 2 \left[ (\xi^2 - P_1^2) C_{p12} / P_1 - \xi^2 N_2 \pi S_{p12} \right] \\ \xi \left[ 4S_{p12} - (\xi^2 - Q_1^2) N_2 \pi C_{p12} / P_1 \right] \end{Bmatrix} \quad (157)$$

その他のベクトル  $\mathbf{D}_n$ ;  $n=1,2,\dots,8$  の  $\xi$  あるいは  $\Omega$  による偏微分も誘導されている[5]。

図 16 は表層とコアの材質が非常に近い場合 (横波速度比  $\zeta = C_{T1} / C_{T2} = 0.995$ 、ポアソン比  $\nu_1 = \nu_2 = 0.330$ 、コア体積率  $N_2 = h_2 / (h_1 + h_2) = 0.5$ ) の周波数スペクトルで、単層に対する結果 (Rayleigh-Lamb 周波数スペクトル) と良い一致をみる。横軸と縦軸の  $\bar{\xi}$ 、 $\bar{\Omega}$  は、サンドイッチ材全体の厚さで標準化したので  $\bar{\xi} = 2\xi$ 、 $\bar{\Omega} = 2\Omega$  である。太線は対称モード、細線は反対称モードで、低次モードより S1, S2, S3...; A1, A2, A3... とラベルを付けた。

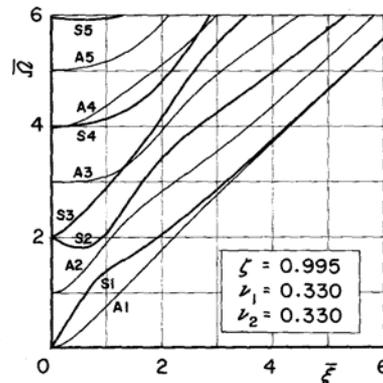


図 16 ほぼ同質の層材から構成される場合の周波数スペクトル

図 17 は  $v_1 = 0.33$ ,  $v_2 = 0.30$ ,  $\rho_2 / \rho_1 = 0.40$ ,  $N_2 = 0.50$  と一定にし、横弾性係数  $G$  を変えて横波速度比  $\zeta$  を 0.2、1.0、5.0 にした時の結果である。柔らかいコア ( $\zeta = 0.2$ ) の場合、S1, A2, S3, A4, S4 モードの順に、最大となる曲線部分が、ほぼ同一の速度で並んでいる。これはスペクトル曲線の階段状状態から、同一勾配を持った部分が、次々とモードを超えて現れていることに対応する。このことは、柔らかいコアを持つサンドイッチ材は、広い周波数成分にわたって同一エネルギー速度で伝搬することを示している。一方、固いコアの場合 (例えば  $\zeta = 5.0$ ) 反対称モードによるエネルギー速度は比較的遅い。また  $\zeta > 2.0$  では A1 モードの最大速度は、コアが柔らかい  $\zeta \leq 1.0$  と異なって、A2 モードのそれよりも速くなる。

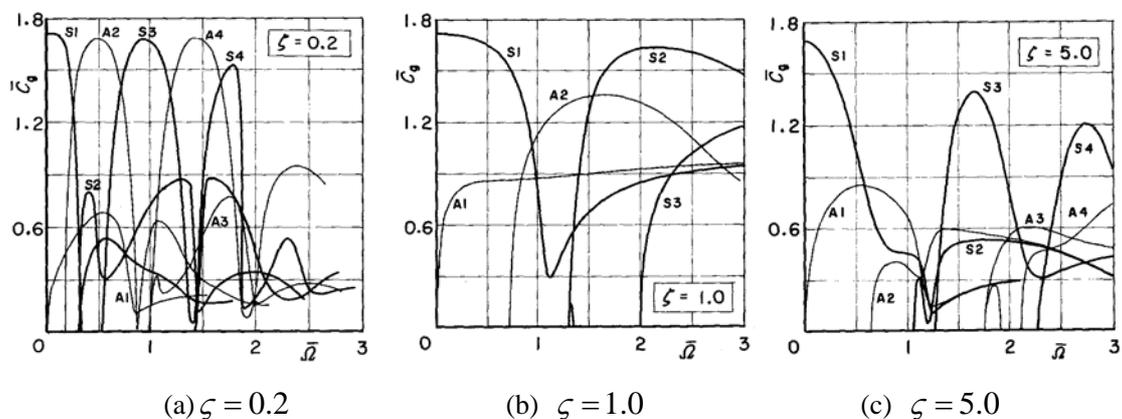


図 17 エネルギー速度のコア層剛性依存性と周波数依存性

次に、エネルギー速度の逆数 (エネルギー・スローネス ;  $= C_e^{-1}$ ) を考えて波動の到達時間  $\tau$  を定義する。これは衝撃源から最初に到来する周波数成分の伝搬に要した時間に比例する。この到達時間  $\tau$  は、衝撃実験において観測できる波の説明のために重要である。図 18 は、横軸に  $\tau$  をとってモード毎に示したものである。パラメータは横波速度比  $\zeta$  である。高周波は大きな減衰を伴うので、低周波域に注目すれば、S1 モードにおいて到達時間  $\tau$  は 0.59 近辺になる。S2, A2 モードにおいて  $\Omega = 2.0$  近辺の周波数による寄与から、 $\zeta$  の増加と共に  $\tau$  は小さくなる。すなわちエネルギー速度が速くなる。

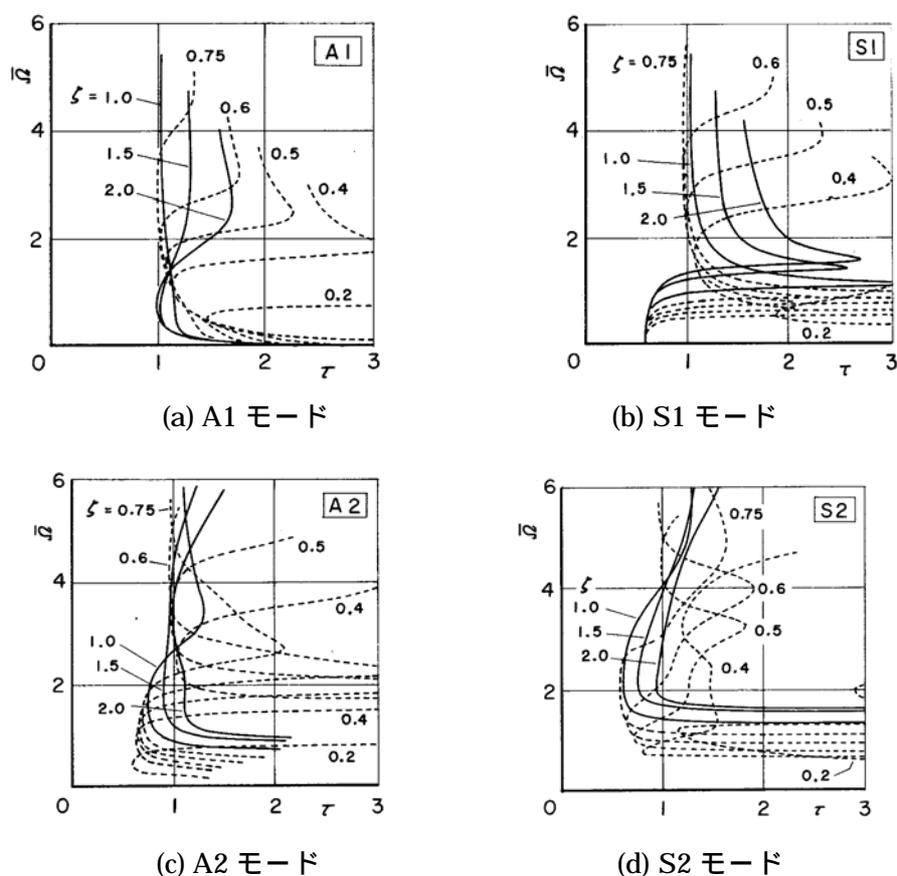


図 18 各モード波のエネルギー到達時間

## 7 応答の近似解法と実験検証

波動問題を解くということは、境界の状態が内部へどのように影響するかを調べることである。衝撃であれば、擾乱の内部へ遺伝性を解明することである。これは材料システムによって異なるので、さまざまな工学的に有用な情報を得る手掛かりになる。しかし理論解析のために設定する境界条件や初期条件のほとんどが理想化されたものであって、現場に直面すれば要求精度に応じて合理的な接近法が必要である。幸い、ほとんどの材料構造物における衝撃問題は、波動分散効果により応答を支配する卓越成分のみが選択的に遺伝するという特性がある。従って、現象把握を優先させた合理的な特性解析が可能となる。本節ではそのような視点に立って、近似法と実験検証法を説明する。

### 7.1 波動特性チャートによる浸水板の解析

一般にある媒体中の異種弾性層による反射波の強さは、その層の力学的インピーダンスや周波数、入射角、層厚に依存している。もし周囲媒体のインピーダンスが層のそれに比べて十分小さいならば、簡易な近似解析が可能である。位相速度と周波数、反射率と周波数、入射角と反射率、入射角と位相速度の4つのグラフを組み合わせると波動特性チャート

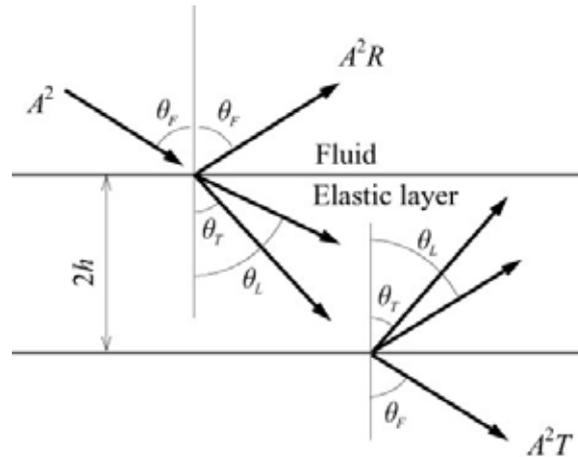


図 19 弾性層と波線.

を構成し，図式的にさまざまな特性を知ることが出来るようになる[6]。

波のパワーは振幅の 2 乗に比例するので，入射パワーに対する反射パワー及び透過パワーの割合によって反射率  $R$  と透過率  $T$  を定義することができる。この解析結果を流体中の弾性層に対して示せば，次の式によって与えられる[7]。

$$R = \frac{(N^2 - M^2 - 1)^2}{4M^2 + (N^2 - M^2 + 1)^2}, \quad T = \frac{4N^2}{4M^2 + (N^2 - M^2 + 1)^2} \quad (158)$$

ただし次のような置き換えをしている。

$$M = \frac{Z_L \cot P}{Z_F} \cos^2 2\theta_T + \frac{Z_T \cot Q}{Z_F} \sin^2 2\theta_T \quad (159)$$

$$N = \frac{Z_L}{Z_F \sin P} \cos^2 2\theta_T + \frac{Z_T}{Z_F \cos Q} \sin^2 2\theta_T \quad (160)$$

そして斜め入射時の相当インピーダンスはそれぞれの領域の波速に対し

$$Z_k = \frac{\rho_k C_k}{\cos \theta_k}; \quad k = F, L, T \quad (161)$$

また、

$$P = 2h\sqrt{(\omega/C_L)^2 - k^2}, \quad Q = 2h\sqrt{(\omega/C_T)^2 - k^2}$$

(162)

下添字  $F, L, T$  は流体，層内縦波，層内横波に関する量を示し， $k$  は層に沿う方向の波数  $(\omega/C_F)\sin\theta_f$  で， $2h$  は層厚である（図 19）。層に沿う波速を決定する特性方程式は

$$\begin{aligned} (F_S + iZ_F)(F_A - iZ_F) &= 0, \\ F_S &= Z_L \cos^2(2\theta_T) \cot(P/2) + Z_T \sin^2(2\theta_T) \cot(Q/2), \\ F_A &= Z_L \cos^2(2\theta_T) \tan(P/2) + Z_T \sin^2(2\theta_T) \tan(Q/2). \end{aligned} \quad (163)$$

アルミ合金のインピーダンスは水のそれに比べて 11 倍程度なので、 $Z_F$  を省略して近似すれば、式(163)は  $F_S F_A = 0$  に帰着され、これはラムの特性方程式に一致する。したがって  $F_S = 0$  と  $F_A = 0$  よりそれぞれラム波の対称モードと反対称モードの波速が決定される。

層方向の波速  $C$  は、界面における位相が常に連続でなければならないから

$$C = C_F / \sin \theta_0 \quad (164)$$

ここで、位相速度と周波数、反射率と周波数、入射角と反射率、入射角と位相速度の 4 つのグラフを、図 20 のように組み合わせ、波動特性チャートを構成する。このチャートの矢印の線に沿って  $R=0$  に対応する位置から分散曲線上の点が求められ、介在層内の特性を簡単に知ることが出来る。図 20(a)(b) は同図(c)の特性を異なった断面で見たものであり、これらの図の相互関係から  $R$  の極小を与える実測パラメータと理論による分散曲線との対応をとることができる。逆に、希望とする反射透過状態を作り出すために分散曲線から周波数、板厚、入射角を推算する際にも利用できる。

周囲媒体のインピーダンスが介在層のそれに比べて無視できない場合は、層を伝播する波のエネルギーが周囲に漏洩しやすくなり、伝播とともに減衰する「エバネセント波」(evanescent wave)となる。その特性を表わす大部分の分散曲線は複素数空間を走る。これに対し、周囲に何も無いときはエネルギーの漏洩がなく大部分の分散曲線は実空間を走る。したがって計算例をあげて述べた図 20 の対応関係は、理論的には近似的に成り立つものである。しかし水中の固体導波体の解析では、よい対応関係を示す。

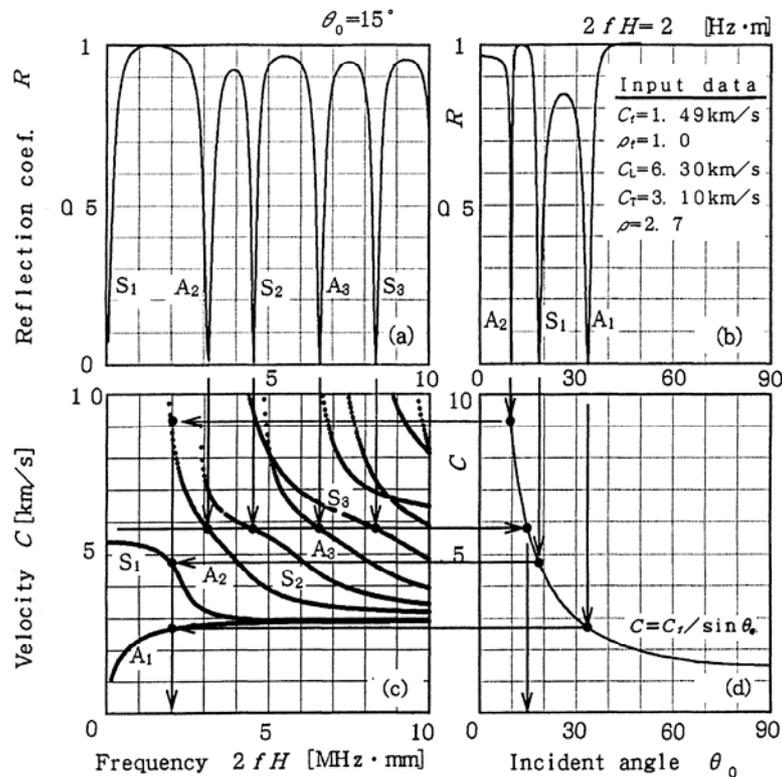


図 20 無反射状態と波動特性との対応関係

## 7.2 平板の横衝撃実験

波の多重反射によって干渉が進み、その結果として導波体の断面に渡った伝播モードが形成される。その時の特性解析を根拠にすれば、弾性平板の横衝撃応答を良く表現する簡易式が誘導でき[8]、その例を示す。衝撃荷重は図21に示すような初期値境界値とし、それに対する平板の応答をたわみ加速度で求めれば

$$\alpha = \left[ \{a(1 - A\bar{r}^2) + bB\bar{r}^2\} \cos(B\bar{r}^2) + \{b(1 - A\bar{r}^2) - aB\bar{r}^2\} \sin(B\bar{r}^2) \right] \exp(-A\bar{r}^2) \quad (165)$$

ここに、次の無次元量による置き換えをしている。

$$\alpha = \frac{4\rho h \ddot{w}}{\sqrt{\pi} \bar{\delta}^2 \bar{\tau} q_0}, \quad a = -\frac{8}{\sqrt{3}} AB, \quad b = \left( \frac{1}{\bar{t}} - \frac{8}{\sqrt{3}} B \right) B, \quad A = \frac{\bar{\delta}^2}{16\Delta}, \quad (166)$$

$$B = \frac{\bar{t}}{4\sqrt{3}\Delta}, \quad \Delta = \frac{\bar{\delta}^4}{16} + \frac{\bar{t}^2}{3}, \quad \bar{r} = \frac{r}{h}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{h}, \quad \bar{t} = \frac{tC_{pl}}{h}, \quad \bar{\tau} = \frac{\tau C_{pl}}{h}$$

式(165)はラム波の特性方程式の解析で得られる最低次反対称モードの分散曲線を利用して導かれている。すなわち分散曲線に沿う積分を、エネルギー伝播特性を考慮して応答を支配する成分範囲にわたって実行して導かれる理論解である。この解による算出波形と実測波形とは図 22 に示すように非常によく合致する。

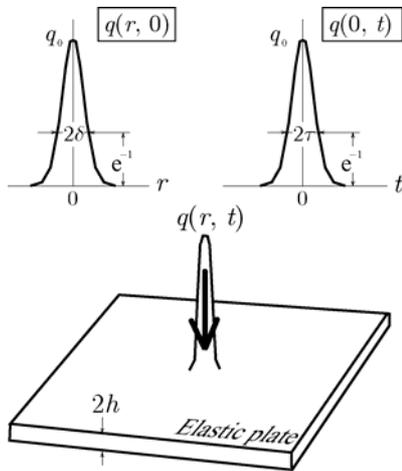


図 21 ガウス分布の擬似インパルス荷重

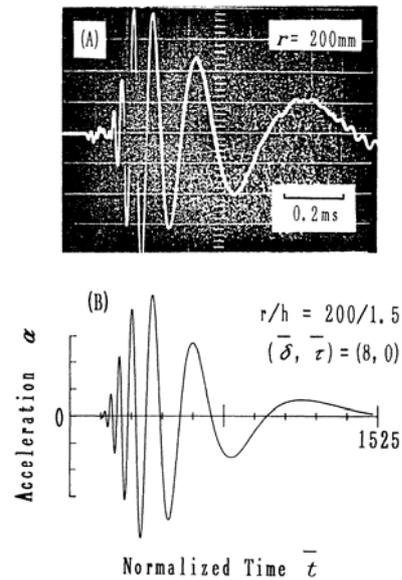


図 22 実測波形の簡易理論計算による再現

## 7.3 板端を伝播するエッジ波の実験検証

板端衝撃によって得られる主要な応答を、特性波伝播の観点から調べてみる。これまでの弾性単層における伝播モードの説明は、伝播方向と層厚方向の二次元的であったが、板の端に沿って伝播する三次元的な特性波が存在することに着目する。この「エッジ波」は

板厚が無限大になればレイリー波になる。衝撃エネルギーのほとんどは、エッジ波のモードで伝わるので機械工学的に大変重要である。その大きさを実験によって確かめるとともに、衝撃によって誘発される他の特性波の伝播経路を特定した。図 23 は打撃点と検出子の配置、および特性波の伝播経路を示した例である。

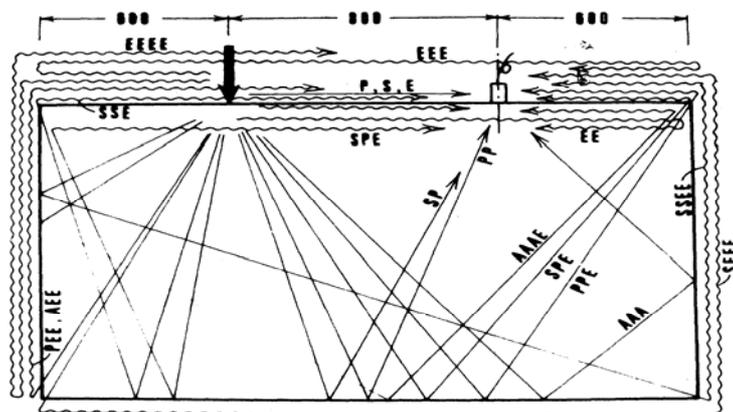


図 23 板の衝撃点と検出子の配置、および波の伝播経路

衝撃被板は厚さ 5mm で 2000mm×1002mm 大のアルミ合金板(A5052P-H34)を用いた。衝撃球は 2mm 径の硬質プラスチックで、空気圧によりガラス管から射出される。発射ガラス管は内径 4mm であり、先端を熱加工してやや細くしてある。検出子は圧電効果によるセンサで中央周波数 2MHz で、比較的広帯域に対応できるものを選んだ。波形記録は不慮のノイズが入らないようにウェーブ・フォームレコーダ(HP-5180A)へ、直接入力する。50n サンプリングで 10 ビット分解能、16 キロワード長である。波形解析を行う際の必要な条件として、到来波形が明瞭である。波の伝播モードおよび経路が特定できる。速度算出は、途中で伝播モードの変わらない波のピーク間の時間差によることとした。そして解釈の確認には、複数の別経路で予測した時間の波形位置で、合致することで裏づけを取った。エッジ波は、板厚効果のために理論上は波動分散性を有するが、板波(伸縮モード波)と同様に長波域で卓越し、応答を支配している。そしてその速度は現実的には、一定値になる。本実験による測定の結果より、板波速度、エッジ波速度、最低次反対称モードのエネルギー到来速度を算出する式を導くと次のようになる[2]。

$$C_{pl} = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} C_T, C_E = \frac{0.862 + 2.002\nu}{1 + 2\nu} C_T, C_{A1} = \frac{1}{0.09\nu^2 - 0.176\nu + 1.0373} C_T \quad (167)$$

ポアソン比は 0.34、せん断波速度  $C_T$  は 3.12km/s、最低次反対称モード波によるエネルギー到来速度  $C_{A1}$  は 3.16km/s である[4]。式(167)のエッジ波速度はレイリー波の平面応力補正による数値結果から、ポアソン比を変数とする簡単な有理関数近似に基づいて導かれる。

以上で、波速の値が決まるので幾何学的に伝播経路を特定して経過時間を計算し、実測波形にプロットすれば、極めてよい一致を示す。図 23 の伝播経路記号 P, A, S, E のそ

れぞれは板波，一次反対称モードエネルギー，せん断波，エッジ波に対応している。そして境界で反射するたびに，モード変換が起こるので，それらを考慮して記号の並ぶ順序で示している。図 24 は、図 23 の設定による打撃実験で得られた波形に，計算で予測した波の到来点を書き入れたものである。これで，到来する波のモードを特定して説明することが可能となる。一見，無秩序に見える大小の複雑な衝撃波形の必然性が明らかになった。打撃点と検出子の配置を変えた実験結果[2]でも，波形再現性と伝播モードによる解釈の整合性は極めてよい。板端面をビーズ小球で対称に成るように打ち当てて行ったが，反対称モード波(A1 モード)による効果が比較的大きく現れる。ただ一度の打撃であっても多くの波が複雑に観測できるが，システムの状態を調べるためには，打撃と検出の位置関係を十分に配慮して，どの特性波による応答かを特定することが重要である。

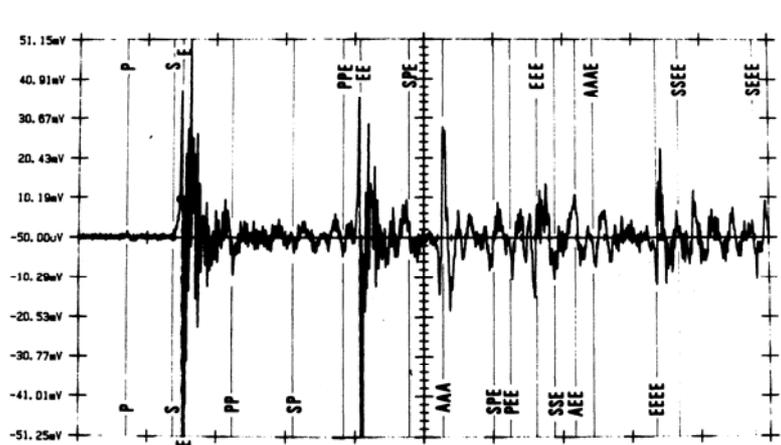


図 24 衝撃実験の実測波形と特性波の到来点の対応

#### 参考文献

- [1] Ohyoshi, T., Sui, G.-J., Miura, K. (1996); "Use of stacking model of the linear inhomogeneous layer elements," *Proceedings of the ASME Aerospace Division*, AD-Vol.52, pp.101-106.
- [2] 大好・三浦 (1986); 長方形平板内を伝播する弾性波の板端衝撃による実験解析，日本機械学会論文集(A)，52 巻 479 号，pp. 1669-1675.
- [3] Pao, Y.-H and Kaul, R.K. (1974); "Waves and Vibrations in Isotropic and Anisotropic Plates," in *R. D. Mindlin and Applied Mechanics*, Ed. By G. Harrmann, Pergamon Press, p.149.
- [4] 大好・三浦 (1986), 弾性平板における波動エネルギー伝播の横衝撃による実験解析，日本機械学会論文集(A)，52 巻 475 号，pp. 677-680.
- [5] Ohyoshi, T. (1985); "Energy Propagation Velocity of Elastic Waves in Sandwich Layer", *Trans. of ASME, J. Vib. Acoust. in Design*, Vol.107, No.2, pp. 235-242.
- [6] 大好・三浦 (1992); 弾性波伝播特性の衝撃問題と反射透過問題解析への応用，素材物性学会誌，5 巻 1 号，pp. 83-92.
- [7] Brekhovskikh, L. M.(1960); "Waves in Layered Media," p.69, Academic press, New York.
- [8] 大好 (1989); 弾性平板の横衝撃応答の簡易計算，日本機械学会論文集(A)，55 巻 511 号 (1989-3)，pp. 483-488.