数学的モデル化過程を重視した数学授業の考察 ：高等学校数学科「三角関数」を事例として†

中村　　東*・加藤　慎一**
秋田県立金足農業高等学校*・秋田大学教育文化学部**

本稿では，数学的モデル化過程を重視した高等学校数学科の授業において，生徒が数学的モデル化過程をどのように遂行しているか，その様相を実証的に明らかにすることを目的とする．そのために，数学的モデル化過程を重視した三角関数の授業を構想・展開し，授業において生徒が遂行した数学的モデル化過程を考察した．考察からは，現実事象を定式化して数学的モデルを作成し，その作成した数学的モデルから数学的結論を導き出して，その数学的結論を現実事象に照らして解釈・評価・比較する過程を繰り返し，数学的モデルの改良を求めて，数学的モデル化過程を繰り返すスパイラル的に発展する様相をみいだすことができた．その際，数学的モデル化の段階を逆行あるいは往復をしたり，飛躍したりしてよりよりモデル化を図ろうとしていることが示唆される．

キーワード：数学的モデル化過程，高等学校数学科，三角関数，イージス・アショア

1.　はじめに

スマートフォンやタブレットなどの機器の普及によって，誰でも容易に情報を得ることが可能になってきている．このような時代において，得た情報が正しいかどうかを自ら判断し，意思決定することが求められる．そのためには，与えられた情報をもとに問題を解決することに終始するだけではなく，生徒自ら問題解決に必要となる情報は何かを考えたり，情報を収集したり，収集した情報をもとに問題解決を図ったりすることが必要かつ重要である．

このような生徒の資質・能力をはぐくむために，数学の授業において，答えを得ることに終始するのではなく，生徒自ら問題を発見したり，問題を解決のための方法や解決に必要となる情報は何かを考えたり，それらを活用して問題を解決する経験を積むことが必要かつ重要であると考える．

そのために，文部科学省（2018）は，算数・数学の問題発見・解決の過程（図 1）を重視した授業を構想し展開することの必要性と重要性を指摘している．

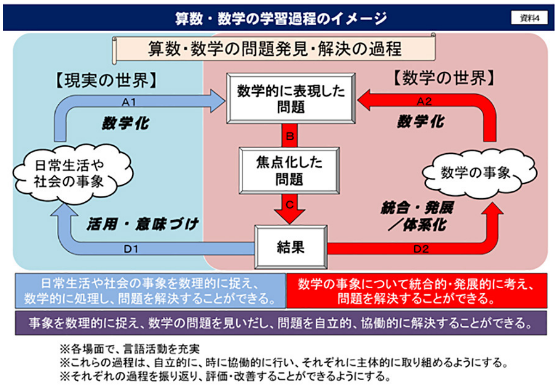

図 1　算数・数学の問題発見・解決の過程（中央教育審議会，2016）

2023年 1 月10日受理
† Azuma NAKAMURA* and Shinichi KATO**, Study of Mathematics Classes Put Emphasize Mathematical Modeling Processes: A Case of Trigonometric Function Classes in High School.
* Kanaashi Agricultural High School.
** Faculty of Education and Human Studies, Akita University.

本研究では，高等学校数学科において，算数・数学の問題発見・解決の過程を重視した授業の具体化を目指して，単なる知的好奇心以上に，数学教育に対する動機づけを与えるとともに，事象との対決を通して知識の開発される過程に積極的に参加させようとする，数学的モデル化過程（三輪，1983）に着目する．

高等学校数学科において，数学的モデル化過程を重視した授業が十分に行われているとは言い難い（池田，2010）ことが指摘されているように，数学的モデル化過程を重視した高等学校数学科における授業についてより一層検討をすすめる必要がある．

この課題を解決するために，川上・佐伯・金児（2019）は，数学的モデル化過程の指導経験がない教員を対象として，算数・数学教科書の問題から数学的モデル化過程の問題への再教材化を目指した教員研修の可能性を明らかにする研究を行っている．

このように，数学教師が数学的モデル化過程を重視した授業を展開できるようにするために，教師教育の立場からの研究もすすめられている．

本研究では，これらの先行研究をふまえ，高等学校の数学教師が，数学的モデル化過程を重視した授業を構想したり展開したりする際の留意点や教師の役割を明らかにすることを目指す試みである．

生徒の多様な意見を受容し，生徒の理解に教師が寄り添いながら，生徒の学びの事実に即して指導の軌道修正を行いながら授業を展開することが必要かつ重要である（能田，1979）．そのため，数学的モデル化過程を重視した授業を展開するときの教師の役割を考えるときに，まずは，教師が，生徒が遂行する数学的モデル化過程を的確に捉えることが必要かつ重要である．

そこで，本稿では，数学的モデル化過程を重視した高等学校数学科の授業において，生徒が数学的モデル化過程をどのように遂行しているか，その様相を実証的に明らかにすることを目的とする．

2. 数学的モデル化過程を重視した高等学校数学科の授業

数学的モデル化過程とは，現実事象を定式化して数学的モデルを作成し，その作成した数学的モデルから数学的結論を導き出して，その数学的結論を現実事象に照らして解釈・評価・比較する一連の過程（三輪，1983）のことである（図 2）．

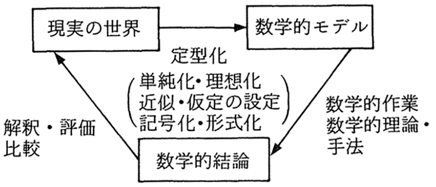

図 2　数学的モデル化過程（三輪，1983，p.120）

三輪（1983）は，数学的モデル化過程は，それまでの経験・観察をもとにして，ある事象が探究を要するという認識があるという前提のもとで，4 段階；(1) その事象に光を当てるように，数学的問題に定式化する（定式化），(2) 定式化した問題を解く（数学的作業），(3) 得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて，その有効さを検討し，評価する（解釈，評価），(4) 問題のより進んだ定式化を図る（よりよいモデル化），を踏むことであると述べている．このとき，数学的モデル化の段階は，順序通りに機械的直線的に進むものではなく，ときには逆行したりあるいは往復したり，ときには，飛躍したりすることがあることを指摘している．

また，三輪（1983）は，「(4) よりよいモデル化」は，一層のモデルの改良を求めて再び (1)～(3) を繰り返すというスパイラル的発展であることを述べている．

これまでも高等学校数学科における数学的モデル化過程を重視した教材の開発に関する研究（例えば，西村，2006）や高等学校数学科において，数学的モデル化過程を重視した授業を構想・実践し，高等学校の数学授業のあり方について実証的に検討する研究（例えば，福井・野尻・西村・松本・口分田・櫻本，2019）は行われてきている．

数学的モデル化過程を重視した授業における教師の役割を明らかにするためには，まずは，教師が，生徒が遂行する数学的モデル化過程を的確に捉えることが必要かつ重要である．そのため，数学的モデル化過程を重視した教材を開発したり，開発した授業を展開したりするだけではなく，教師が，生徒が数学的モデル化過程をどのように遂行しているかを的確に捉えることが求められる．

中村（2011）のように，現実社会の問題において，どのように数学的モデル化過程が遂行されうるか，その特徴について分析する研究はあるものの，生徒の学びの事実に即して数学的モデル化過程を遂行す

る様相を明らかにしようとしている研究は見当たらない．

そこで，本稿では，生徒が数学的モデル化過程をどのように遂行しているかについて，生徒の学びの事実に即して考察することとする．

3. 数学的モデル化過程を重視した授業の構想

(1)対象生徒

対象は，Ａ高等学校の第２学年の生徒29名である．

(2)授業構想の手続き

筆者らによって授業を構想・検討したうえで，対象生徒が在籍するクラス以外のクラスでの授業および授業後の協議会，国立大学の教育系の学部に在籍する大学生を対象とした模擬授業および授業後の協議会などを行い，授業を修正している．

(3)数学的モデル化過程を重視した授業の構想

数学Ⅱ「三角関数」の単元で，「新聞記事で報道された誤りがなぜ生じたかを探る活動を通して，社会の事象を数学的に捉え，三角関数を活用して問題解決できるようにする」ことをねらいとして，２時間の授業を構想している．

2019年６月５日の秋田魁新聞の朝刊に掲載された，イージス・アショアの秋田県への配備に関してどのような問題が生じていたかという素材，文脈と状況を設定している．

第１時の授業では，新聞記事を読み，イージス・アショアの秋田県への配備に関して，どのような問題が生じていたかについて把握する活動を設定している．具体的には，生徒が新聞記事を読み，どのような問題が生じていたか，その問題を検証するために必要となる情報は何かを探るために必要となるキーワードを書き出す活動である．

書き出したキーワードを，図３にかき込みながら，どのような誤りが生じていたかを検証する活動を設定している．

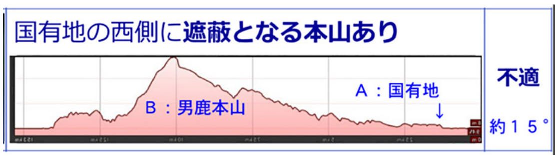

図３　防衛省（2019）を参考に筆者らが作成した図

このとき，生徒が単純化・理想化し，図３に，図４のように直角三角形をかき込み，仰角が何度になるかを検証することを想定している．

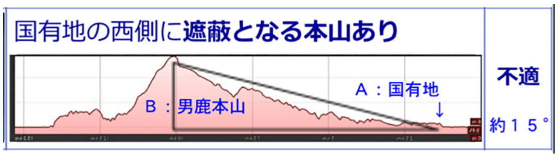

図４　想定される生徒の図へのかき込み

これらの活動が，数学的モデル化過程の，現実事象を定式化して数学的モデルを作成する過程である．

図３のように直角三角形をかき込み，分度器などで仰角を測ると，約15°になる．しかしながら，新聞記事では，仰角が15°になることが誤りであることが示されているため，数学的モデルに誤りがあったのではないかという疑問が生じることが想定される．

この活動が，数学的モデル化過程の，作成した数学的モデルから数学的結論を導き出す過程，数学的結論を現実事象に照らして解釈・評価する過程である．

数学的モデルに誤りがあったのではないかという疑問を解決するために，国有地から男鹿本山までの水平距離と男鹿本山の標高を調べることが想定される．

この活動が，数学的モデル化過程の，現実事象を定式化して数学的モデルを作成する過程である．ここでの，数学的モデルの作成は，数学的モデルの改良を求めてスパイラル的に発展しているものであり，１周目の数学的モデルの作成過程とは異なる．

そして，国有地から男鹿本山までの水平距離と男鹿本山の標高の情報をもとに，仰角を計算して求めることが想定される．

この活動が，数学的モデル化過程の，作成した数学的モデルから数学的結論を導き出す過程である．

第２時の授業では，第１時で得た結果である仰角約４°と誤りであった仰角約15°の違いの程度を探る活動を設定している．具体的には，仰角４°と仰角15°の違いをわかりやすく伝えるためには，どのように説明をすればよいかについて考える活動である．

この活動は，数学的モデル化過程の，数学的結論を現実事象に照らして解釈・評価する過程である．

以上のように，2時間の授業を通して，数学的モデル化過程を何度も繰り返す授業を構想した．

(4)考察のための資料

本稿では，実施した2時間の授業において収集した次の3つの資料；（ⅰ）生徒のワークシートへの記述，（ⅱ）ビデオカメラで撮影した映像記録，（ⅲ）ビデオカメラで撮影した映像記録をもとに作成した発話プロトコル，（ⅳ）板書，をもとに考察する．

4. 数学的モデル化過程を重視した授業の考察

(1)授業の実際

①第1時

a. 場面 1-1

生徒Aと生徒Bは，図2に，図3のように直角三角形をかき込み，分度器を用いて仰角が約15°になることを確認している．

そのうえで，教師が，実際は仰角が何度になるかと問いかけた後に，生徒Aと生徒Bは，図5をみながら，次のようなやりとりをしている．

図5　生徒Aの記述

生徒A：え？ $\frac{1.8}{7.6}$？

生徒B：どういうこと？

生徒A：だってそうじゃん．$\frac{18}{76}$って．

（中略）

生徒A：0.2368だから．

生徒Aと生徒Bは，図3のような直角三角形をかき込んでから，定規で直角三角形の辺の長さを測り，計算して仰角を求めようとしている．

b. 場面 1-2

各生徒がGoogle Earthを活用して，国有地から男鹿本山までの水平距離を調べている．国有地のどの地点から調べるかによって水平距離が異なるため，各生徒が調べた国有地から男鹿本山までの水平距離は，異なった値になっている（図6，図7，図8）．

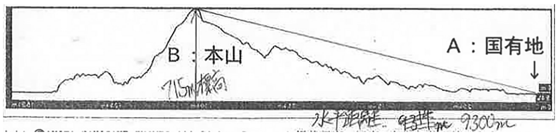

図6　生徒C記述

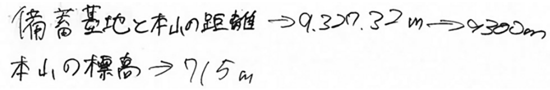

図7　生徒Dの記述

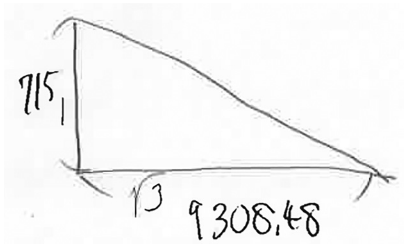

図8　生徒Eの記述

各生徒の計測結果が異なるものの，9300mに近似して，問題解決を行うことを全体で共有している．

②第2時

a. 場面 2-1

第1時で得た正しい仰角4°を求める過程を振り返りながら，仰角15°という誤りがなぜ生じてしまったかについて追究している．このとき，教師と生徒F，生徒Gが次のようなやりとりをしている[1]．

生徒F：割合．
教師：割合？・・・何の割合がおかしいの．
生徒F：本山の標高と水平距離の割合が．
教師：割合が？
生徒F：縮尺が…違う．
教師：違うってわかる？
生徒数名：はい．
（中略）
教師：はい，聞いて聞いて．

生徒G：ここが，この長さで（モニターに映っている図（図9）の本山の標高を親指と中指を使って表しながら）700（m）で，よこ（水平距離）が，9300っていってたので，これ（本山の標高）が…んと，13個以上…

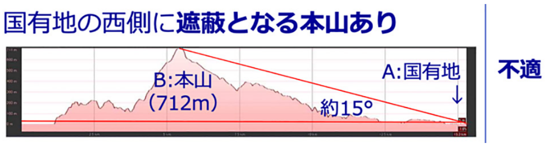

図9　モニターに映っている図（防衛省，2019，p.57）

生徒Ｆは，国有地から男鹿本山までの水平距離と男鹿本山の標高の値の比が誤っていることを指摘している．その発言をもとに，生徒Ｇは，男鹿本山の標高が約700m，国有地から男鹿本山までの水平距離が9300mであることから，仮に水平距離と標高の値の比が正しいと仮定した場合，図８において，標高の値13個分が水平距離になっていなければならないが，手を使いながら，そのようになっていないことについて説明している．

b. 場面 2-2

生徒が，仰角15°がどの程度の誤りであるかについて，正しい仰角４°と比較しながら説明しようとしている．

生徒Ｈは，仰角４°と仰角15°の違いを，図10のように表し説明しようとしている．

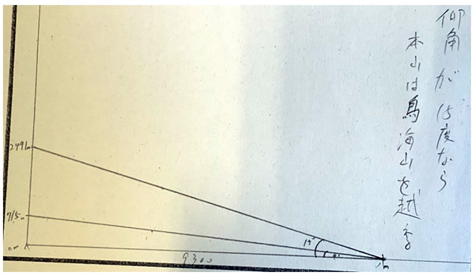

図10　生徒Ｈの記述

生徒Ｈは，15°が正しい仰角と仮定したとき，水平距離が9300mの場合，男鹿本山の標高が鳥海山の標高を越えることを説明しようとしている．

また，生徒Ｉは，仰角４°と仰角15°の違いを，図11のように表し説明しようとしている．

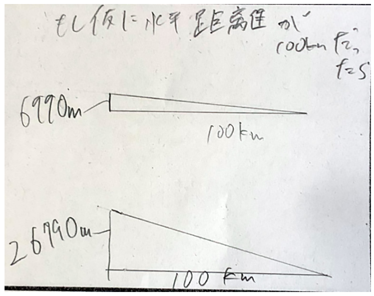

図11　生徒Ｉの記述

生徒Ｉは，水平距離を100kmとした場合に，鉛直方向の距離にどの程度の差が出るかを示し，仰角15°がどの程度の誤りであるかについて説明しようとしている．

生徒Ｊは，仰角４°と仰角15°の違いを，図12のように表し説明しようとしている．

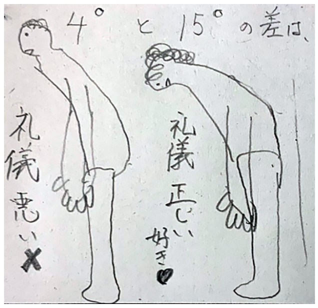

図12　生徒Ｊの記述

生徒Ｊは，挨拶をするときにお辞儀の角度を意識しているという日常生活における経験から，4°のお辞儀と15°のお辞儀を実際にして，仰角15°がどの程度の誤りであるかについて説明しようとしている．

(2)授業の考察

①第１時

a. 場面 1-1

図５の図が誤りであることを確認したものの，図５の図の水平距離と標高にあたる辺の長さを定規で測り，仰角を求めようとしていることから，生徒Ａと生徒Ｂは，図５の誤った数学的モデルから結論を

導き出そうとしていることがみいだされる．

本来，この場面では，仰角が15°になったものの，その値が誤りであることから，正しい仰角を求めるために，数学的モデルを改良することが求められる．

しかしながら，生徒Ａと生徒Ｂは，誤った数学的結論である，仰角15°の解釈・評価に困難が生じており，作成した数学的モデルに固執していると考えられる．そのため，現実事象に戻って数学的モデルを改良しようとすることに困難が生じていると推察できる．

b. 場面 1-2

教師から国有地のどの地点から調べるかについては指示していないため，各生徒がGoogle Earthを活用して国有地の場所を調べ，それぞれ思い思いの地点から男鹿本山までの水平距離を調べている．そのため，国有地から男鹿本山までの水平距離は，異なった値になっている．そのなかで，生徒たちはそれらを9300mに近似して，問題解決を行おうとしていることがみいだされる．

計測方法が異なるため，水平距離の値に誤差が生じているが，近似して数学的モデルを作成し，数学的結論を導き出そうとしていることが推察できる．

また，この場面において，Google Earthを活用して求めた水平距離9314m，9327.32m，9308.48mなど（現実事象）を，9300mに近似している（数学的モデル）が，9300mに近似することによって，現実事象に問題が生じないかについて検討することが考えられる．例えば，男鹿本山から9300m地点が国有地になっているかどうかを確認することなどである．このように，現実事象と数学的モデルを行き来することが考えられる．

あるいは，水平距離を9300mに近似して作成した数学的モデルから，約4.4°という数学的結論を導き出し，その結論を解釈・評価したうえで，数十mの違いで仰角の値が大きく変わることがないかについて検討することも考えられる．例えば，9310mや9330mなどに近似した場合と9300mに近似した場合で仰角の値がどの程度変わるかについて検討し，9300mに近似することの妥当性について考えることである．

このように，この場面では，三輪（1983）が指摘している，数学的モデル化の段階を逆行あるいは往復をし，よりよりモデル化を図ろうとしていると解釈することも可能である．

しかし，水平距離を，単に9300mとしたか，上記のような過程をふまえ，9300mとしても仰角の値が大きく変わらないと判断したうえで誤差の範囲内として認めたかは明確ではないため，ここでは，上記のように解釈することは困難である．

②第２時

a. 場面 2-1

生徒Ｆは，説明は不十分であるものの，図９の水平距離と標高の値の比が誤っていることを指摘しようとしている．生徒Ｇは，生徒Ｆの説明を受けて，図９の図が正しいと仮定したとき，国有地から男鹿本山までの水平距離が標高の値13個分になるが，そのようにはなっていないことを，手を使って指摘している．

この場面において，生徒Ｇは，図９の図が誤った数学的モデルであると認識したうえで，それが正しい数学的モデルと仮定して，数学的結論を導き出し，その結論を解釈・評価していると推察できる．そして，その一連の過程を通して，作成した数学的モデルの誤りを指摘していると考えられる．

b. 場面 2-2

生徒Ｈは，国有地から男鹿本山までの水平距離を9300mにしたときに，仰角４°と仰角15°の場合に，標高にどの程度の差があるかを明らかにしようとしている．生徒Ｈは，仰角４°と仰角15°という数学的結論を，秋田県内にある男鹿本山と鳥海山の標高と関連づけながら，解釈・評価・比較していると推察できる．

ただ，男鹿本山の比較対象として，鳥海山を例に挙げているが，授業のなかで，教師から鳥海山の情報について確認する場面があり，その影響を受けている可能性があるため，生徒自ら鳥海山を例に挙げたとは言い切ることはできない．

生徒Ｉは，水平距離を100kmにしたときに，仰角４°と仰角15°の場合に，標高にどの程度の差があるかを明らかにしようとしている．

イージス・アショアは飛んできたミサイルを迎撃するためのシステムであり，それをふまえて水平距離を100kmに設定して，数学的結論である仰角４°と仰角15°を解釈・評価・比較しようとしていると解釈することも可能である．

第１時の授業の冒頭で，イージス・アショアがミサイルを迎撃するためのシステムであることを確認しているため，授業の冒頭の現実事象に戻り，関連づけようとしていると考えることもできる．

このように，この場面では，三輪（1983）が指摘している，数学的結論から授業の冒頭の現実事象へ飛躍していると解釈することも可能である．

しかし，生徒Iが，イージス・アショアがミサイルを迎撃するためのシステムであることをふまえ，水平距離を100kmに設定したかどうかについて，授業のなかでその意図を確認できておらず明確ではないため，上記のように解釈することは困難である．

生徒Jは，4°のお辞儀と15°のお辞儀を実際にしたときにどのようにみえるかといった視点から，仰角4°と仰角15°にどの程度の差があるかを明らかにしようとしている．生徒Jの場合，イージス･アショアや山の標高などの現実事象から離れ，自分自身がより身近に感じているお辞儀という新たな現実事象と関連づけながら，仰角4°と仰角15°という数学的結論を解釈・評価・比較していると推察できる．

このように，この場面では，三輪（1983）が指摘している，数学的結論から新たな現実事象へ飛躍していると考えられる．

5. まとめと今後の課題

本稿では，高等学校の生徒29名を対象として，数学的モデル化を重視した高等学校数学科の三角関数の２時間の授業を事例として，生徒が数学的モデル化過程をどのように遂行しているかについて考察した．

考察からは，三輪（1983）が指摘する，現実事象の定式化をして数学的モデルを作成し，その作成した数学的モデルから数学的結論を導き出し，その数学的結論を現実事象に照らして解釈・評価・比較する過程を繰り返し，一層の数学的モデルの改良を求めて，数学的モデル化過程を繰り返すスパイラル的に発展する様相をみいだすことができた．その際，三輪（1983）が指摘しているように，数学的モデル化の段階を逆行あるいは往復をしたり，飛躍したりしてよりよりモデル化を図ろうとしていることが示唆される．

一方で，仰角を求める過程で水平距離を9300mに近似した意図や，仰角4°と仰角15°の違いの程度を説明するときに水平距離を100kmに設定した意図などのように，生徒がより高度な数学的モデル化過程を遂行している可能性があることも示唆されるが，本稿ではそれを明確に示すことができていない．

また，数学的結論の解釈・評価に困難が生じ，作成した数学的モデルに固執し，現実事象に戻って数学的モデルを改良しようとすることに困難が生じることもみいだすことができた．

今後の課題は，上記の２つの課題を解決するための教師の役割について検討するとともに，他の単元において，数学的モデル化過程を重視した高等学校数学科の授業を構想・展開して，生徒における数学的モデル化過程を考察しその様相を明らかにすることである．

付記

(1) 発言における「・・・」は１秒以上の間があることを，「…」は１秒未満の間があることを示している．

謝辞

今回の授業を実施するにあたり新聞記事をご提供いただきました，秋田魁新報社，今回研究にご協力いただきました，生徒の皆様，秋田大学教育文化学部算数・数学教育（加藤慎一）研究室の４年次生の伊藤光希さん，加藤毬乃さん，菊池亜美さん，村田希良々さん，３年次生の今崎祐介さん，萩原颯大さん，山﨑天誠さん，渡部温子さんに心より厚く御礼申し上げます．誠にありがとうございました．

参考・引用文献

秋田魁新報取材班（2019）．イージス・アショアを追う．秋田魁新報社．

防衛省（2019）．イージス・アショアの配備に関する秋田県知事及び秋田市長への説明資料．(https://www.mod.go.jp/j/approach/defense/bmd/pdf/20190527_a.pdf)（最終閲覧日：2023年１月９日）

中央教育審議会（2016）．算数･数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ．(https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/__icsFiles/afieldfile/2016/09/12/1376993.pdf)（最終閲覧日：2023年１月９日）

福井幸大・野尻定幸・西村保三・松本智恵子・口分田政史・櫻本篤司（2019）．高校生を対象とした

数学的リテラシーを育む教材開発－最適化問題を題材にして－，福井大学教育実践研究，44, 33-40.

池田敏和（2010）．数学的モデル化，日本数学教育学会編，数学教育学研究ハンドブック，株式会社東洋館出版社，272-281.

松川敦志・内田隆之（2019）．適地調査 データずさん 防衛省，代替地検討で，秋田魁新報社，2019年６月５日朝刊．

三輪辰郎（1983）．数学教育におけるモデル化についての一考察，筑波数学教育研究，2，117-125.

文部科学省（2018）．高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説 数学編 理数編．（https://www.mext.go.jp/content/1407073_05_1_2.pdf）（最終閲覧日：2023年１月９日）

中村光一（2011）．缶の問題を用いた数学的モデル化過程に関する考察，日本数学教育学会誌，93(7)，2-11.

西村圭一（2006）．数学的リテラシーを育成するための教材の開発－PISA 数学調査をふまえて－，日本数学教育学会誌，88(5)，26-32.

能田伸彦編著（1979）．算数・数学科 授業の設計と実際－評価を中心にした科学的方法－．株式会社東洋館出版社．

川上　貴・佐伯昭彦・金児正史（2019）．算数・数学教科書の問題から数学的モデリングの問題への再教材科を目指した教員研修の可能性，数学教育学会誌，60(3-4)，35-47.

Summary

The purpose of this paper is to empirically clarify how students carry out the mathematical modeling process in high school mathematics classes that emphasize the mathematical modeling process. For that purpose, we designed and developed two trigonometric function classes that emphasized the mathematical modeling process, and examined the mathematical modeling process that the students carried out in the class. From the discussion, the process of formulating a real phenomenon, creating a mathematical model, drawing a mathematical conclusion from the mathematical model created, and interpreting, evaluating, and comparing the mathematical conclusion in the light of the real phenomenon. We were able to discover the aspect of spiral development in which the mathematical modeling process was repeatedly sought to improve the mathematical model. At that time, it is suggested that they are trying to make more models by going backwards, back and forth, or making leaps through the stages of mathematical modeling.

Key Words : Mathematical Modeling, Mathematics Class in High School, Trigonometric Function, Aegis Ashore

（Received January 10, 2023）