Memoirs of the Faculty of Education and Human Studies
Akita University（Natural Science）
78，11 − 17（2023）

数式処理システム Maxima を用いた一般相対性理論の学習教材の開発

上　田　晴　彦

A Study on the Development of Teaching Materials for General Relativity by Mathematical Software Maxima

UEDA, Haruhiko

Division of Regional Studies, Faculty of Education and Human Studies, Akita University

Abstract

This paper introduces the development of teaching materials for general relativity with the calculation practice of tensor analysis. Studying general relativity once required to perform complex calculations by hand, but now, calculations can be performed by computers. However, in the ordinary study of general relativity, computers are rarely used. We therefore try to develop teaching materials with Maxima, a powerful computer algebra system, and also report actual educational practices. From our educational practices, we find that our teaching materials are useful for student who want to study general relativity quickly.

Keywords : Science Education, Teaching Materials, General Relativity, Maxima, Tensor Analysis

１．はじめに

自然現象を定量的に扱う際に，数学は欠くことのできない道具となるが，数式の変形などはかなり厄介であることが多い。研究現場で魅力的なアイデアを思いついても，それを表現する数式が複雑過ぎて，人間の計算力が追いつかないということも，よく起こる。一方で数式変形というものは，定型的な操作をかなり多く含んでおり，コンピュータが得意とする領域でもある。そのため定型的にできるところはコンピュータになるべく任せ，人間はアイデアや初期条件の設定など，理論の興味深い側面に研究の労力を集中したいという考えが出てくる。

自然科学の学習においても同じで，科学理論の本質的な部分の理解に多くの労力を費やすために，定型的な計算はコンピュータに任せることで，効率よく学びたいという欲求はだれにでもあるであろう。そのため，中等・高等教育段階における数学や物理学などの学習において，コンピュータを利用して数学的な処理をさせることは，現在ではごくありふれたものとなった[1]。

よく知られていることだが，コンピュータによる数学的な処理として，数値計算と数式処理という２つの種類がある。研究を進めるうえで，自然現象を記述する数式が解析的に解くことが難しい，あるいは不可能であることは頻繁に起こる。その場合は数値解に頼るほかないが，その際におこなわれる処理が数値計算である。数値計算では数式の計算は数値で実行されるため，きちんと割り切れない場合など，誤差を含みながら計算が進んでいく。高等学校や大学初年次の学習者にとって，数値計算を実行するアプリケーションとして最も身近なものは，表計算ソフトウェアの一種である Microsoft Excel であろう。利用者が多数存在すること，操作が比較的簡単であることなど，Microsoft Excel には大きなメリットが存在する。そのため初等的な学習者が必要とする数値計算であれば，Microsoft Excel は一定の役割を果たすであろう[2]。より本格的に数値計算をおこなう場合は，何らかのプログラム言語を用いる必要がある[3]。なお数値的な処理を繰り返し実行すると一般的には誤差が降り積もるため，それを回避または軽減する様々な技法が必要となる。

研究においては大きな力を発揮する数値計算であるが，自然科学の学習においては厳密解が得られる場合に限定して，数式を取り扱うことがほとんどである。そのため数式を式のまま記号的に処理し，誤差なしで正確な計算をおこなう数式処理が力を発揮する。数式処理ソフトウェアを一言で述べると，文字列処理作業をするソフトウェアであると言える。コンピュータが文字列パター

ン探しと置き換えを実行するので，間違いを起こす人間とは異なり，原則として間違いを犯すことが無い。また高速に置き換え作業ができるため，圧倒的に短時間で答えに到達することができる。

自然科学の学習において，数学の知識はいうに及ばず，数式変形の力は必要不可欠である。ところが残念なことに，平均的な大学に通う理工系の大学生についていうと，高等学校教科書の章末問題程度の数式変形の力を持たないものが，かなりの割合で存在する。大学での理工系教育においては，そのような学生に対しても，微分方程式が頻繁に表れる理論を教えなければならないという問題に直面している。高等学校の内容から復習を始めて数式変形の力をつけるというのは，時間的な制約から現実的ではない。そのため数式処理システムを授業内で補助的に使用しならが，数式変形の力をつける方策が考えられる。いずれにしても自然科学の学習において数式処理が果たす役割は，数値計算以上に大きいと考えられる。本論文で注目するのも，数式処理システムを利用した科学教育である。

本論文では Maxima という数式処理システムを取り上げる[4)]。数式処理システムとしてもっとも有名なものは Mathematica であろうが有料であり，大学等の公的機関に所属している人なら手軽に使用できるであろうが，個人では所有するにはやや高額である。一方で Maxima は Mathematica ほどではないにせよ，かなり複雑な数式の処理ができるフリーソフトであり，個人が気軽に利用することができる[5)]。利用者がそれほど多くないことが難点ではあるが，最近ではスマートフォンで動作するものもあるため，我々にとってますます身近な存在となる可能性を秘めている[6)]。

数式処理システムを利用した教材開発は，中等教育では盛んにおこなわれているが，高等教育となると学生が自主的に利用することに任せているせいであろうか，中等教育ほど活発には教材開発がおこわれていないようである。ただし複雑な計算が多くなる高等教育ほど，数式処理システムの利用が有効であることは，疑いの余地はない。このような理由により，本研究では秋田大学理工学研究科で実施されている「相対論と宇宙機器」の Maxima を利用した授業教材となるものを試作した。

2．数式処理システム Maxima

Maxima は LISP で記述された数式処理システムで，GNU GPL（GNU 一般公衆利用許諾書）に基づくフリーソフトウェアである。その原型はマサチューセッツ工科大学で開発されていた Macsyma というソフトウェアであるが，紆余曲折を経て 1998 年に Maxima として公開されて以後，多くの人々によって活発に開発が続けられて現在に至る。そのため，商用の他の数式処理システムに比べてもそん色ない高度な記号処理機能を備えているなど，教育用のソフトウェアとして十分な性能を持つと考えてよい。なお，元は Unix 系で開発が進められていたが，現在では Windows 版，Mac 版なども提供されているため，様々なプラットフォーム上で動作するなど，大変便利なソフトウェアとなっている。さらに最近では「Maxima on Android」というアプリも提供されており，スマートフォンやタブレットでも動作するなど，さらなる利便性を持つものとなっている。

以下では，数式処理システム Maxima のどのような機能が，教材作成に有用かを概観する。

2．1　微分方程式

微分方程式を解くことは，理工系の学習において，避けて通ることが出来ないものである。主だったものは Maxima を利用すると解くことができるが，やや注意が必要となる[7)]。

微分方程式を解く場合，Maxima では desolve を利用することが多い。この場合は初期値を

atvalue（関数，独立変数名＝値，関数の値）；

で与え，その後で

desolve（微分方程式，求める関数）；

とすればよい。簡単な微分方程式ならこれで解くことができる。例えば単振動を表現する次の微分方程式は

$$mx''(t) = -kx, \qquad x(0) = A, x'(0) = 0$$

であることは，よく知られている。この微分方程式は変数分離型と呼ばれるタイプのものであり，その解法は比較的簡単であるためであろうが，desolve を利用して，以下のように解くことができる。

```
(%i1) atvalue(x(t),t=0,A);
(%o1) A
(%i2) atvalue(diff(x(t),t),t=0,0);
(%o2) 0
(%i3) desolve(m·diff(x(t),t,2)=−k·x(t),x(t));
      Is k m positive, negative or zero?positive;
```
$$(\%o3)\quad x(t) = A\cos\left(\frac{\sqrt{k\,m}\,t}{m}\right)$$

しかしより複雑な形の微分方程式の場合は，desolve を用いると解くことが出来ないことが多々ある。その場合は ode2 というコマンドを利用する。

ode2（微分方程式；関数；変数）；

例えば，質量の物体を上方に投げ上げたとする。物体が質点でない限り，空気抵抗を受けるが，その際の空気抵抗は，物体の速度 v の 2 乗に比例することが多い。比例定数を Cm とすると，この際の運動方程式は

$$m(dv/dt) = -mg - Cmv^2$$

である。この微分方程式は非線形型の微分方程式であり，desolve を利用して解くことはできない。ただし，以下のように ode2 を利用して解くことができる。

```
(%i1) assume(g>0,C>0);
(%o1) [g>0,C>0]
(%i2) EQ1:m·diff(v(t),t,1)=−m·g−C·m·v(t)^2;
```

$$\text{(\%o2)}\quad m\left(\frac{d}{dt}v(t)\right) = -C\,m\,v(t)^2 - g\,m$$

```
(%i3) ode2(EQ1,v(t),t);
```

$$\text{(\%o3)}\quad -\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{C}\,v(t)}{\sqrt{g}}\right)}{\sqrt{C}\sqrt{g}} = t + \%c$$

```
(%i4) solve(%,v(t));
```

$$\text{(\%o4)}\quad \left[v(t) = -\frac{\sqrt{g}\tan\left(\sqrt{C}\sqrt{g}\,t + \%c\sqrt{C}\sqrt{g}\right)}{\sqrt{C}}\right]$$

2．2　ベクトル解析

電磁気学の学習の際には，ベクトル解析の計算に出会うことになる[8]。例えばマクスウェル方程式によると，電場 **E** と磁場 **B** との間には，

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} + \partial\mathbf{B}/\partial t = 0$$

が成立する。ここで z 軸方向に振幅を持ち x 軸方向に伝搬する電場を考える。

$$\mathbf{E} = (0, 0, E_0 \sin(k(x-ct)))$$

この電場によって作り出される磁場は，先に述べたマクスウェル方程式によって計算できる。

B を求めるためには，まずは **E** をマクスウェル方程式に代入し，rot**E** を求める必要がある。そしてそれを時間で積分するとよい。rot**E** を Maxima で計算する場合，curl というコマンドを利用する。

curl（ベクトルの関数）；

具体的な計算は，以下のようにすればよい。

```
(%i1) load("vect");
(%i2) E1:transpose(matrix([0],[0],[E[0]·sin(k·(x−t·c))]));
```

$$\text{(\%o2)}\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & E_0\sin(k(x-c\,t)) \end{pmatrix}$$

```
(%i3) curl(%[1]);
```

$$\text{(\%o3)}\quad \mathrm{curl}([0,0,E_0\sin(k(x-c\,t))])$$

```
(%i4) express(%);
```

$$\text{(\%o4)}\quad \left[\frac{d}{dy}(E_0\sin(k(x-c\,t))), -\frac{d}{dx}(E_0\sin(k(x-c\,t))), 0\right]$$

```
(%i5) ev(%,diff);
```

$$\text{(\%o5)}\quad [0, -E_0\,k\cos(k(x-c\,t)), 0]$$

```
(%i6) −integrate(%,t);
```

$$\text{(\%o6)}\quad \left[0, -\frac{E_0\sin(k(x-c\,t))}{c}, 0\right]$$

計算の結果は

$$\mathbf{B} = (0, -E_0 \sin(k(x-ct)/c, 0)$$

となるが，これは $-y$ 軸方向に振幅を持ち x 軸方向に伝搬する波を表している。これが磁場であるが，これにより電磁場のエネルギーの伝播がわかる。つまりある空間の一点で，電場が発生したとすると，それと 90 度ずれる磁場が誘起される。なおその逆についても，マクスウェル方程式を解くことで，実際に起こることがわかる。いずれにしても Maxima を用いると，電場と磁場がお互いを誘起し空間を伝播していく電磁波の様子を，理解することができるのである。

3．Maxima とテンソル解析

以上述べてきたように，Maxima を利用すると，面倒な手計算を避けつつ，本質的な理解に至るために必要となる計算を実行することができる。ただし先に紹介した例は比較的単純な計算であるため，Maxima がより大きな力を発揮する複雑な計算について考えてみたい。なぜなら Maxima が真に必要となるのは，複雑な計算が必要となる，より進んだ内容を学習する際であるからである。そのような例として，一般相対性理論における利用を考える。よく知られているように，一般相対性理論においてはテンソル解析の計算を実行することが必要となるが，これが結構面倒である。その面倒さを避けるために，Maxima を利用することを思い立ち，学習教材の作成に取り掛かった。

教材の作成に当たっては，以下の 2 点に注意を払うことにした。最初に，教材はあくまでも講義内容に沿ったものでなければならないことである。本教材を利用する

講義は「相対論と宇宙機器」であり，そこで取り扱うのは相対性理論とそれに伴う時計の遅れ，そしてそれがGPSに与える影響を理解し計算できるようになることである。そのため，教材の多くの部分は講義内容を分かりやすく記したものであり，Maximaの計算方法はその一部でしかない。数式を羅列するのではなく，その基礎となる考え方を，分かりやすく解説する必要がある。いずれにしてもMaximaの計算にそれほどスペースを割く余裕はないため，Maximaの解説は要領よくおこなう必要がある。

注意を払うもう一つの事柄は，受講者の学習履歴である。残念ながらMaximaはそれほど普及した数式処理システムではないので，学習者はこれまでMaximaを一度も利用したことのないものばかりである。そのため教材の作成においては，Maximaの初歩から学んでいき，徐々に高度な利用ができるようなものにしなければならない。幸運なことに，本教材ではテンソル解析を含んだ複雑な計算を実行する一般相対性理論の前に，単純な代数計算を中心とした特殊相対性理論を学習することになる。そのため受講者は，最初は比較的易しい計算が出来ればよく，それらを通して徐々にMaximaに慣れていくことができるような教材の作成が可能となった。

以下では，数式処理システム Maxima を利用すると，一般相対性理論についてのどのような計算ができるかについて，著者が作成した事例を若干ではあるが紹介する。

3．1　共変微分と縮約

共変ベクトルおよび反変ベクトルの共変微分については，以下が成立することはよく知られている。

$$\nabla_j a_i = \partial a_i / \partial x^j - \Gamma^l_{ij} a_l$$
$$\nabla_j a^i = \partial a^i / \partial x^j + \Gamma^l_{ik} a^k$$

さらにより複雑なテンソルの共変微分については，例えば以下が成立する。

$$\nabla_j T^{ij} = \partial T^{ij} / \partial x^k + \Gamma^i_{kl} T^{lj} + \Gamma^j_{kl} T^{il}$$
$$\nabla_k T_{ij} = \partial T_{ij} / \partial x^k + \Gamma^l_{ik} T_{lj} - \Gamma^l_{jk} T_{il}$$

Maxima を利用して，これらを確かめてみることにする。Maximaには，テンソルの操作をおこなうパッケージが2種類実装されている。1つは添え字テンソル操作をおこなう itensor パッケージであり，もう1つは成分テンソル操作をおこなう ctensor パッケージである。今の場合は具体的な成分計算をするわけではないので itensor パッケージを利用する。itensor パッケージの読込は，以下のようにする。

load（itensor）：itensor パッケージの読込

また，計量テンソルを imetric で定義しておくが，その際には以下のようにする。

imetric（g）：計量テンソル g を定義

```
(%i1)  load("itensor");
(%i2)  imetric(g);
```

この準備の下，まずは2階共変計量テンソル，g_{kl} と共変ベクトル v_i の通常の微分 $\partial_j v_i$ を表示させる。テンソルを

v[ij][kl]等

と表現するが，この際に ij は共変成分を，kl は反変成分を表す。通常の微分は

idiff（テンソル，座標成分）： テンソルを座標成分で微分する

とする。また表示の際には ishow を利用する。

```
(%i3)  ishow(g([k,l],[]))$
```
(%t3) $g_{k\,l}$

```
(%i4)  ishow(idiff(v([i],[]),j))$
```
(%t4) $v_{i,j}$

次にテンソルの共変微分を実行する。ここでは

$\nabla_j v_i \quad \nabla_j v^i \quad \nabla_k v_{il} \quad \nabla_k v^{ij}$

を共変微分してみる。共変微分は covdiff を利用する。

covdiff（テンソル，座標成分）： 座標成分に対するテンソルの共変微分

```
(%i5)  ishow(covdiff(v([i],[]),j))$
```
(%t5) $v_{i,j} - v_{\%1}\, ichr2^{\%1}_{i\,j}$

```
(%i6)  ishow(covdiff(v([],[i]),j))$
```
(%t6) $v^i_{,j} + ichr2^i_{\%2\,j}\, v^{\%2}$

```
(%i7)  ishow(covdiff(v([i,j],[]),k))$
```
(%t7) $-v_{i\,\%3}\, ichr2^{\%3}_{j\,k} - v_{\%3\,j}\, ichr2^{\%3}_{i\,k} + v_{i\,j,k}$

```
(%i8)  ishow(covdiff(v([i],[j]),k))$
```
(%t8) $-v^j_{\%4}\, ichr2^{\%4}_{i\,k} + v^j_{i,k} + ichr2^j_{\%4\,k}\, v^{\%4}_i$

ただし，その際には第２種クリストッフェル記号（ichr2）が使われる。

　最後に，縮約について考える。テンソルの縮約には contract を利用する。たとえば

$$g_{il}\,g_{jk}\,a^{lk}=a_{ij}$$
$$g^{il}g^{jk}a_{ij}=a^{lk}$$

であるが，これらは以下のように計算される。

```
(%i10) ishow(g([j,k],[])·g([i,l],[])·a([],[i,j]))$
```
(%t10) $a^{ij}\,g_{il}\,g_{jk}$
```
(%i11) ishow(contract(%))$
```
(%t11) a_{kl}
```
(%i12) ishow(g([],[j,k])·g([],[i,l])·a([i,j],[]))$
```
(%t12) $g^{il}\,g^{jk}\,a_{ij}$
```
(%i13) ishow(contract(%));
```
(%t13) a^{lk}

(%o13) a([],[l,k])

３．２　ビアンキの恒等式

　リーマンテンソルに関するいくつかの公式が存在するが，相対性理論を語るうえで欠かすことが出来ないのが，ビアンキの恒等式である。ビアンキの恒等式とは，次のようなものである。

$$\nabla_l R^i_{jmk}+\nabla_k R^i_{jlm}+\nabla_m R^i_{jkl}=0$$

この恒等式を証明するのは，本来なら結構面倒な計算をおこなわなければならないのだが，Maxima を利用すれば以下のように容易に証明できる。具体的には，次のようにすればよい。

```
(%i1) load("itensor");
(%i2) imetric(g);
(%o2) done
(%i3) icurvature([j, k, l], [i]);
(%i4) ishow(icurvature([l,j,k],[i]))$
```
(%t4) $-ichr2^{j}_{lk,j}-ichr2^{j}_{\%2\,j}\,ichr2^{\%2}_{lk}+ichr2^{j}_{lj,k}+ichr2^{j}_{\%2\,k}\,ichr2^{\%2}_{lj}$
```
(%i5) icurvature([j, k, l], [i])+icurvature([k, l, j], [i])+icurvature([l, j, k], [i]);
(%i6) canform(%);
(%o6) 0
```

３．３　ニュートン近似でのリーマンテンソル

　アインシュタイン方程式の中に現れる比例定数 κ を決める際には，ニュートン近似の下でのリーマンテンソルを計算して置く必要がある。

　まず ctensor を呼びだし，座標系を指定する。

ct coordsys：[]； あらかじめ定義された座標系と計量の設定

あとは粛々と計算するだけである。なおここでは計量テンソルを設定する際に，直接 lg として定義した。そのため，計量の逆元を計算し将来の計算のためパッケージを設定する，cmetric を利用した。その使い方は，以下の通りである

cmetric ()

また（4,4）成分のみに興味があるので，以下では，h_{44} 以外のものをすべて削除して計算している。なお以下が成立しているとする。

$$g_{ij}=\eta_{ij}+h_{ij}$$

```
(%i1) load(ctensor);
(%i2) ct_coords:[x,y,z,t];
(%i3) depends(h_44,[x,y,z]);
(%i4) lg:matrix([1,0,0,0],
      [0,1,0,0],
      [0,0,1,0],
      [0,0,0,−1+h_44]);
```
(%o4) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&h\_44-1\end{pmatrix}$
```
(%i5) cmetric();
(%i6) ricci(ric);
```

その結果，以下のようになることがわかる。

$$R_{44}=-\frac{1}{2}\nabla^2 h_{44}$$

３．４　シュバルツシルト解

　球対称時空の厳密解であるシュバルツシルト解を導くことを考える。これを求めるために，まずは以下のような球対称の計量を考える。

$$ds^2=A(r)dr^2+r^2d\theta^2$$
$$+r^2sin^2d\varphi^2-B(r)dt^2$$

ここで決めなければならないのが，$A(r)$ および $B(r)$ という量である。

これらを決めるために，まずはこの計量テンソルのもとで，リッチテンソルを計算することから始める。実際に計算するとわかるが，0 でないのは $R_{ii}(i=1,2,3,4)$ の 4 つの量であるので，これらが 0 になるように $A(r)$ および $B(r)$ を決めればよい。

```
(%i1) load(ctensor);
(%i2) ct_coords:[r,theta,phi,t];
(%i4) depends(A,r); depends(B,r);
(%i5) lg:matrix([A,0,0,0],
      [0,r^2,0,0],
      [0,0,r^2·sin(theta)^2,0],
      [0,0,0,−B]);
```

$$(\%o5)\quad \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin(\theta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B \end{pmatrix}$$

```
(%i6) cmetric();
(%i7) ricci(true);
```

リッチテンソルを計算したのち，その（4, 4）成分を A/B 倍して，それを（1, 1）成分に加える。これで $A'B+AB'=0$，つまり $AB=c^2$（ただし c は定数）であることがわかる。この関係を使い，リッチテンソルの（2, 2）成分から A を消去すると，最終的に以下のようになる。

$$B^2 r\left(\frac{d}{dr}\frac{1}{B}\right)-B'r-2B+2c^2=0$$

```
(%i11) expand(ric[4,4]·A/B+ric[1,1]);
(%i12) expand(%·A·B·r);
(%i13) EQ:subst(c^2/B,A,ric[2,2])=0;
(%i14) expand(EQ·2·c^2);
```

$$(\%o14)\quad \frac{B^2\left(\frac{d}{d\,r}\frac{c^2}{B}\right)r}{c^2}-\left(\frac{d}{d\,r}B\right)r+2\,c^2-2\,B=0$$

後はこの式を解いて，$B(r)$ そして $A(r)$ を決めることになる。ただしここからは手計算でも簡単にできるため，詳細については省略する。

4．授業実践と考察

以上述べてきたように，Maxima は高度な機能を保持しているため，複雑な相対性理論の計算にも十分利用できる。そのため Maxima の利用を前提とした教材を作成し，授業実践することにした。今回の実践は，理工学研究科で開講している「相対論と宇宙機器」という選択科目での利用である。

よく知られているように，相対論は GPS に利用される。GPS 衛星と GPS 受信機の間の距離の測定には，きわめて正確な時計が必要となる。GPS が高速で飛び回っていることから特殊相対性理論と，そして地上からかなり離れた上空に存在することが一般相対性理論との関係を作り出している。特殊相対性理論によると，地上の時間で 1 秒経過したとき，GPS 衛星の時間は約 8.35×10^{11} 秒遅れ，一般相対性理論によると，地上の時間で 1 秒経過したとき，GPS 衛星の時間は約 5.25×10^{10} 秒進む。両者を足し合わせたうえで距離換算すると，1 日に 11.4km ほどずれることになる。今回の学習教材は，これらの値を計算できるようになること，そのために必要な相対性理論の知識を理解することを，最終目的として作成した。

実際の授業では，学習教材を基に相対性理論の概念を説明していくため，作成した教材には随所に Maxima を利用した演習問題を取り入れるようにした。学生たちは講義資料を電子媒体で見ながら受講しているのだが，ノートパソコンを持ち込んで授業を聴講しているものが多かった。そのため所々での Maxima を利用した演習問題にも，ノートパソコンを利用しているものが大半を占めた（図 1 参照）。

図 1　ノートパソコンを利用した受講の様子

ただし一部の学生は，タブレット端末やスマートフォンを利用しているものもいた。そのような学生は，所々での Maxima を利用した演習問題には，タブレット端末を利用していた。タブレット端末を利用した受講は，特

段の不便を感じているわけではなさそうだったこと，理解度にもほとんど差がない様子であったことを考えると，Maxima を利用した学習教材はノートパソコンまたはタブレット端末のどちらでも，大きな違いはないことが今回の教育実践で判明した（図 2 参照）。

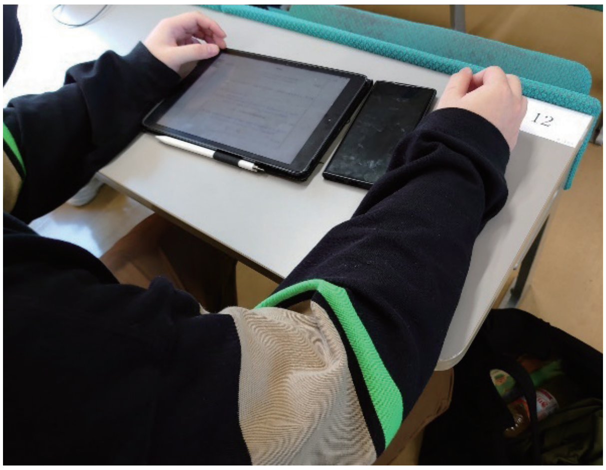

図２　タブレット等を利用している様子

最後になるが，今回の教育実践をおこなったことで印象深かったことを述べる。通常おこなわれる相対性理論の講義では，理論的な話題に終始することが多く，具体的な計算を授業内でおこなうことはほとんどなかったと思われる。また私自身がおこなってきた教育経験からも，授業内で複雑な計算をしたことはない。しかし講義で Maxima の利用を前提とすると，随所に演習問題を取り入れなければならない。この効果は大きく，具体的な計算を授業内でおこなうためより理解が深まることが，受講者の様子からはっきりと分かった。さらにコンピュータを用いて計算をおこなうので，数式入力の手間はあるものの，手計算で同様のことをおこなうより，はるかに短時間で効率よく学べることもわかった。これはある程度予想していたことであるが，予想以上に大きな効果があったことを実感した。

特に今回の教育実践で大きく感じたのは，一般相対性理論で出現するテンソル解析の複雑な計算問題に対して，Maxima の利用無しに授業時間内で取り組むことは，実際問題として不可能であるということである。Maxima の授業での活用は，特殊相対性理論の比較的単純な代数計算でもそれなりに力を発揮する。しかし複雑な計算を必要とすればするほど，Maxima の利用は学習者に大きな利便を提供することを，今回の教育実践を通して確信した。

以上述べたように，Maxima を始めとした数式処理システムは，複雑な計算を必要とする進んだ課題を学習する際に，より大きな力を発揮する。私自身も Maxima の素晴らしさに感化され，Maxima を利用した教材の作成をおこなってきた[9]。今回の教材作成の体験を基に，今後も Maxima を利用した授業教材の作成に，積極的に取り組んでいきたいと考えている。

参考文献

1）森本光生，長岡亮介（編）:『数学とコンピュータ』，放送大学教育振興会（2003）
2）伊津野和行，酒井久和：『Excel ではじめる数値解析』，森北出版（2014）
3）上田晴彦：『Java で初等力学シミュレーション』，プレアデス出版（2017）
4）https://maxima.sourceforge.io/
5）横田博史：『はじめての Maxima』，工学社（2006）
6）梅野善雄：『いつでも・どこでも・スマホで数学！ Maxima on Android 活用マニュアル』, 森北出版（2017）
7）溝口純敏：Maxima を使った物理数学基礎演習ノート，http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/
8）溝口純敏：Maxima を使った電磁気学基礎演習ノート，http://www9.plala.or.jp/prac-maxima/
9）上田晴彦:『Maxima で学ぶ解析力学』, 工学社（2016 年）