児童の空間認識について

佐伯卓也（岩手大学 教育）
協力者　斎藤忠英，菊池三奈子，田村文子
村金良夫，小野寺光一（岩手大4年次学生）

はしがき

小論では，小学校算数教育と児童の空間認識の関係，特に幾何教育の可能性等についてのデータを得るため，試みたささやかな調査について報告する。

児童の空間認識の発達の研究で，算数教育に役に立つと思われるものの一つにPiagetの研究（Piaget，Inhelder，1967）がある。またこれを利用しようとしたものにCopeland（1974）がある。

所がPiagetは一応子どもの空間認識の発達は「位相的」からはじまり後に「射影的」「ユークリッド的」になるとしているが，これは問題があることが多くの数学教育研究者から指摘されてきている，その要点はPiagetのいう「位相」は数学的に見ると，特に位相的でなく，ユークリッド的な性質であるというのである（Martin，1976 a，b；佐伯，1978）。こうなった以上，「数学的な」幾何の導入をどうするかが問題となってくるのは当然である。

そこで，浮上してくる考えはKleinの幾何学の変換群を用いて定義した考えである。アメリカではこの考えにもとづいて例えばKidder（1976）が研究に着手している。

本研究では変換を主体とした空間認識についてのデータを得るため手さぐりした結果の報告をする。なお本研究のデータ採取にご協力を賜わった岩手大学教育学部附属小学校に感謝の意を表する。

二、研究の背景

幾何学を考えたとき、一つの大きな思想的なうねりには、Kleinのエルランゲン・プログラムがある。1872年KleinはCayleyの代数的不変量とLieの変換群により、当時の雑多な幾何学を統合するため、エルランゲン大学の哲学部の教授にえらばれあとで就任するにあたって Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen で見解を示した。これが有名なエルランゲン・プログラムである。これによれば「幾何学とは、あるあたえられた変換群に属する任意の要素（変換）で不変な図形の性質を研究する学問である」というのである。この考えは今日に至るまで幾何学の1つの研究の指導的見解として、多少修正はなされているが生きつづけている。このことから、幾何学では「変換」あるいは「変換群」と「不変性」あるいは「不変量」が中心になる。従って幾何教育もこの背景で考えなければならないであろうとするのが、Kidder（1976）や筆者の考えである。

ここに児童の空間認識をみよう。Piagetによれば（1）空間発達というものは、空間の表象（representation）であって空間の知覚（perception）ではない。（2）これらの空間表象は、空間における対象で遂行される知的行為（mental action）の機構（organization）を通して形成される。（3）子どもに最初にできる空間表象は自然に位相的であり、射影的およびユークリッド的な概念はこれら位相的な概念の階層的な拡大である，という。

ここでいう「表象」と「知覚」について、Piaget & Inhelder（1967）は

> 空間関係の発達は2つの異なったレベルで進んでいく。それは知覚レベルと，思考ないしは空想レベルで起る過程である。…知覚はそれらに直接触れることによって起る対象の知識である。これに反して表象ないしは空想は知覚の対象がなくとも換起されるか，又は，対象があるときも知覚と平行して進むときもある。

と説明している。

また、Piaget理論では「行為」（action）と「操作」（operation）

がある。年齢が進むと群と束の構造になるという(Flavell, 1963)。Flavell は特に青年期には4群(four group)の性質[1])をもつ認知構造 ― Piaget は INRC 群といった ―― で問題解決がなされるという。Piaget の4群は I (identity), N (negative), R (reciprocal), C (correlative)の4要素で、例として「かたつむりが板の上を一方向に動く」をとって、I = かたつむりが板の上を右へ動く、R = 板を左へ動かす、N = かたつむりが左へ動く、C = 板を右へ動かす、ことで説明されるとしている(Piaget & Inhelder, 1969, p.140)。このほかにもいろんな例がある。いずれにしても、このように認知構造は群、束になっているというのである。

以上から、幾何教育で変換群を表象レベルであつかっていく意味が認知構造にもある程度マッチしていると考えられる。このような背景から本研究では変換をどの時点で導入できるかの可能性を調べるための調査を行なったわけである。

2 手順

2.1. 被検児童

岩手大学教育学部附属小学校児童で表1のように各学年(4年~6年)から1学級づつ選び、テストは1978(昭和53)年11月に実施した。

	男	女	計
4年	20	18	38
5年	19	20	39
6年	20	19	39
計	59	57	116

表1 被検児童数

2.2. 用具

テスト用具はいろいろの先行研究から選んで作成した。以下それを示す。

問題は5群から成っている。I群~III群は変換、IVは視点整合、Vは面展開の諸問題から成る。学校数学として最初に与える図形はやはりユークリッド幾何であろう。そのため、ユークリッド変換が

1) Copeland (1974) にもこの4群がでているが、「4つの群」としているのは誤訳であろう。

問題となる。厳密には運動群を考えなければならない。運動は平行移動と回転から成る。ここでは Moyer (1978) の研究例をモデルに Kidder (1976) のアイデアと日本における実際の授業を参考にして、「ずらし」「おりかえし」「まわし」をとりあげた。「おりかえし」は運動を2次元に限ってみると入ってこないが、3次元的に対称変換としてとりあげた(小学校算数の指導要領には明確にこれらの事項は入っていない)。その実際を図1で示す。左から

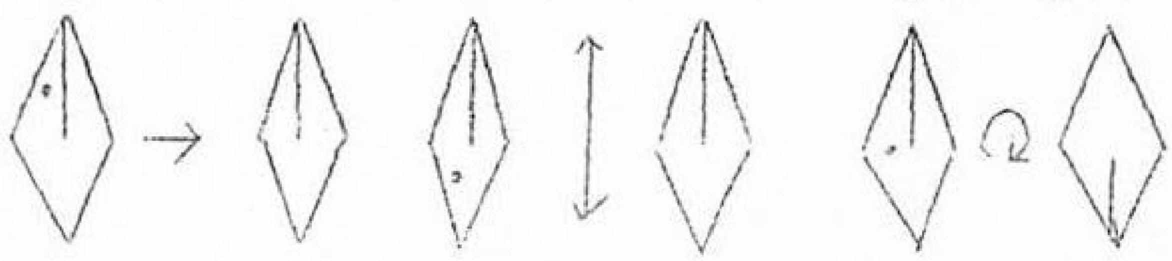

図1 変換課題(ずらし、おりかえし、まわし)

ずらし、おりかえし、まわしで、原図(左がわ)を右図のように変換したとき・はどこへうつるかを記入させることにした。これが課題Iで、あと変換合成課題(ずらし→おりかえし; まわし→おりかえし)(課題II)、逆変換課題(課題III)(図1の図で右がわに点・がつけてあり原図へ記入させる問題(下位テスト3題)から成っている。

次に Guay & Mcdaniel (1977) の課題をモデルにして視点整合課題(課題IV)を作成した。オリジナルは円テーブル上の立体模型の形を各視点からどのように見えるかをテストするものだったが、ここでは四角なテーブル上に適当にジュースの入ったコップをいいあてるものにした(図2)。

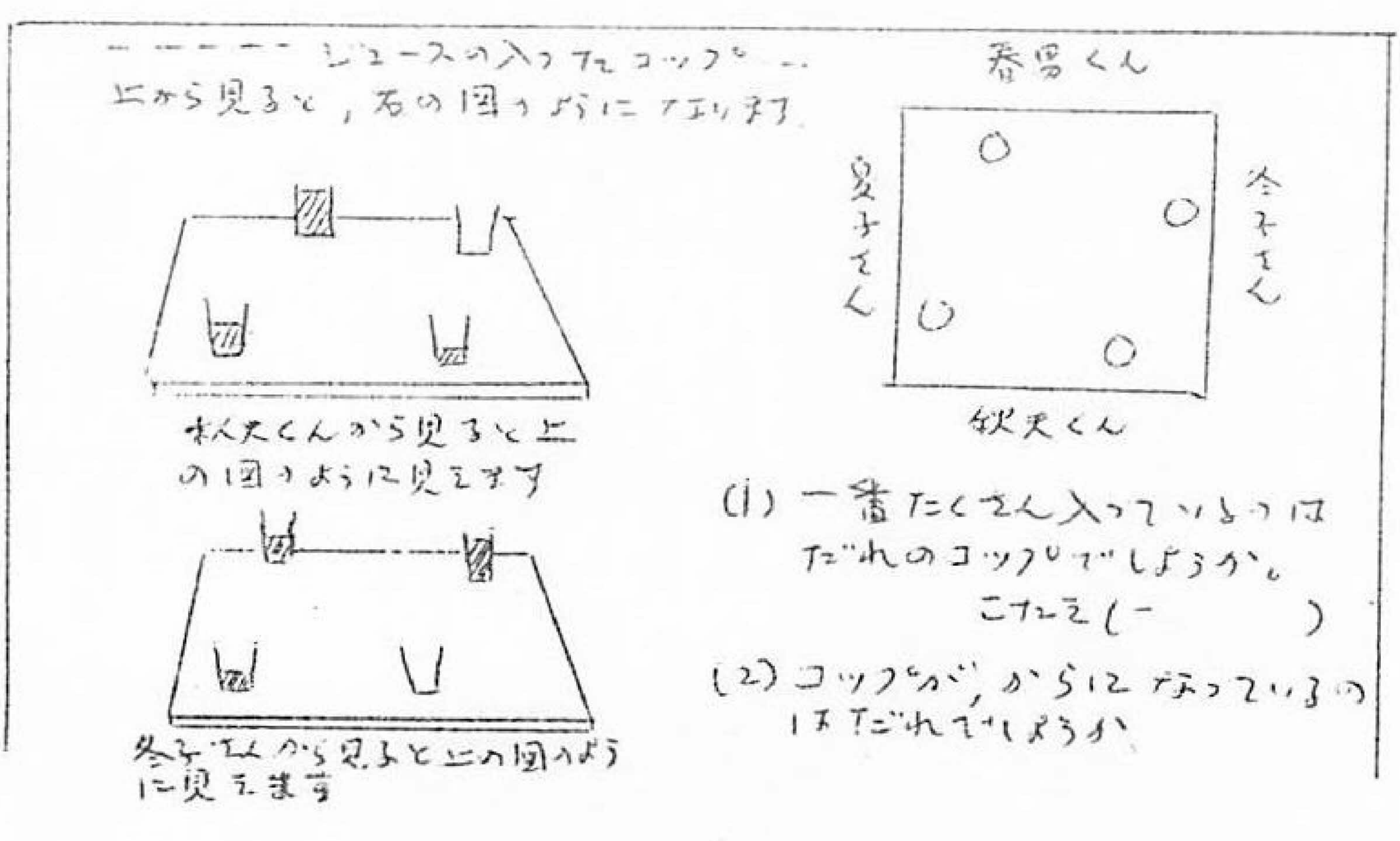

図2　視点整合課題（下位テストは3題）

そして最後が面展開課題（展開図）（課題Ⅴ）。これはくくい？ McDanielの展開図の課題と類似の問題で次の立方体の問題（1〜3）と直方体の問題の2つからできている。立方体の場合も直方体の場合も

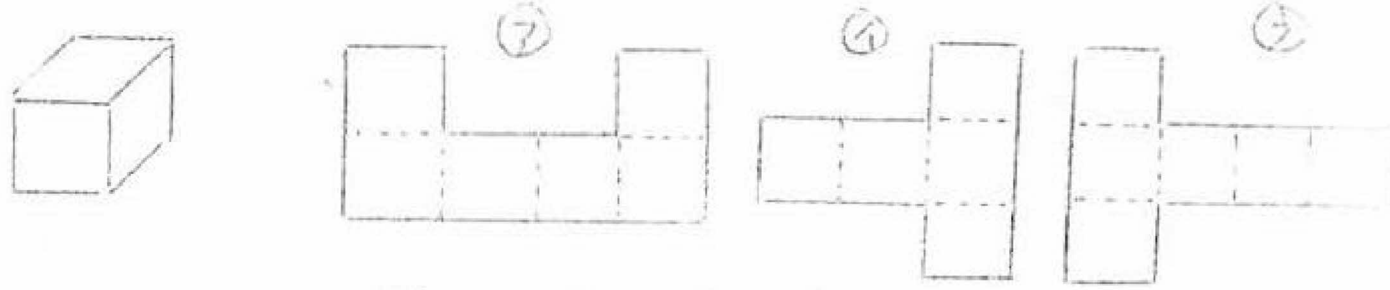

図3　面展開課題

左に見取図で示したものを平面に展開したときどうなるかを㋐㋑㋒から選ばせるようになっている。

２．３　実施手順

アメリカの方法ではスライド・スクリーン等を用いて個人的に面接して実施したものが多かったが、ここでは簡単にするため、課題は２枚の紙にプリントした。テストに入る前に「ずらしとは……ということです。」といいながら大型のモデルを用いて黒板で具体的に操作して見せた。時間は20分であった。

２．４．採点基準

Ⅳ，Ⅴの課題は問題はないが，Ⅰ〜Ⅲの基準を次のように一定させた

0 …点の位置が誤った半面にある

1 …点の位置が正しい半面にあるが，誤った象限にある

2 …点の位置が正しい半面，象限にある

２．５．課題の妥当性と信頼性

課題の妥当性を知るため優劣分析法（Good－poor analysis）を用いた。4年〜6年までの児童課題Ⅰ〜Ⅴの合計点より平均を出し（平均4年27.65　5年25.15，6年28.77）平均以上を上位（優位）群，以下を下位（劣位）群とし弁別力Zを求めた。その結果は表2に示す。課題Ⅱ〜Ⅳは1%危険率で弁別力があると判定さ

課題	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
Z	1.95	7.52**	3.91**	3.05**	1.95

表2　課題ごとの弁別力（GP分析）

れた。

次に信頼性を見るため Kuder-Richardson の公式を用いた。そのため I〜III は 0, 1 を誤答、2 を正答とみなして計算した。その結果を表3に示す。これによると課題 II のみ信頼性があるという結果であろう。

課題	I	II	III	IV	V
r	0.000	0.497	0.055	0.344	0.025

表3 信頼度係数

3 結果と判定

まず表4に課題ごとに得点者の％を示しておく。

		4年			5年			6年		
課題	得点	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
I	2	100	100	97.4	100	100	92.3	100	100	100
	1						5.1			
	0			2.6			2.6			
II	4	84.2	68.4		94.9	66.7		100	74.4	
	3					10.3				
	2	10.5	5.3			2.6				
	0	5.3	26.3		5.1	20.5			25.6	
III	2	97.4	100	100	100	94.9	87.2	100	100	92.3
	1						2.6			
	0	2.6				5.1	10.3			7.7
IV	2	97.4	97.4	81.6	100	94.9	92.3	100	100	97.4
	0	2.6	2.6	18.4		5.1	7.7			2.6
V	2	92.1	100		100	100		100	100	
	0	7.9								

表4 課題ごとの得点者の百分率

これを見ると一見して正答が高い。これでは前に示した信頼性が低くなるのも当然という気がする。次いで誤答を調べると、課題 II (2) で「まわし」の失敗、課題 III の(3) でもやはり「まわし」の失敗が多いのが目立った。

表4からもわかるように，「まわし」の誤答が目立った．そこでなおはっきりさせるために課題IとIIIで多元配置のANOVAを実施した．変動因として，Aは課題（ずらし，おりかえし，まわし），Bは性差（男，女），Cは学年（4，5，6年）をとった．表5が課題Iの，表6が課題IIIのANOVAである．

表5　課題IのANOVA表

変動因	SS	df	MS	F
A	.01068	2	.00534	3.61*
B	.00245	1	.00245	3.75
C	.00368	2	.00184	2.97
AB	.00490	2	.00245	3.95
AC	.00736	4	.00184	2.97
BC	.00123	2	.00062	1.00
ABC	.00247	4	.00062	
トータル	.03276	17		

表6　課題IIIのANOVA表

変動因	SS	df	MS	F
A	.04303	2	.02152	6.42
B	.00376	1	.00376	1.12
C	.02770	2	.01356	4.13
AB	.00565	2	.00283	0.85
AC	.04537	4	.01134	3.39
BC	.01208	2	.00604	1.82
ABC	.01339	4	.00335	
トータル	.15100	17		

課題Iでは予想通り変動因Aが有意になった，IIIでは有意にならないがFの値は高い．そこでANOVA下の平均の比較をしてみた．その結果は課題Iでは

A_1-A_2 間では $t=0$

A_2-A_3 $t=5.02^{*}$

A_1-A_3 $t=5.02^{*}$

で「まわし」が悪い．又課題IIIでは

A_1-A_2 $t=2.18$

A_2-A_3 $t=16.76^{**}$

A_1-A_3 $t=14.55^{**}$

でやはり「まわし」が悪いことになった．「ずらし」「おりかえし」は有意差はでなかった．この結果と判定は前の誤答分析と似ている．ただし A_1 ずらし，A_2 おりかえし，A_3 まわしとする．

4．考察

本研究で作成した問題は妥当性は一応いいとしても信頼性が全体的に低かったことは問題の作成上改良の点が多くあることを示している．いろいろの事

情で予備調査ができなかったこと，附属小というサンプルのかたより等もあって，こういう結果になったと考えられる。だが，「ずらし」「おりかえし」「まわし」をユークリッド変換の基本過程と考えて，このように高い正答率を得たことはこの学年では十分にこれらの事項が導入できること，さらに学年をもっと下げても可能であることが示されたと思う。ANOVAの結果学年差，性差がなく，いずれも，「まわし」が困難であったという結果，今後の指導にに示唆を与えたものといえる。まわしが困難であるという結果はKidderのものとも一致しているし，さらにMoyerの結果とも一致していることがわかる。また，課題IIIの変換の合成に誤答が比較的多かったことは課題の作成の仕方，つまり最初の変換につづく後になされるその結果から残ることもあるので，改善の余地はある。

しかし，本研究が，一応Kleinの変換群の立場による幾何学の系統的指導の第1歩としての小学校段階でのユークリッドの運動指導の可能性をさぐる手さぐり試行としては目的を達したものと評価される。この結果を手がかりに，種々の方向へ研究を拡げていくことが考えられる。高等学校数学の行列の指導が，幾何学的に見たとき，アフィン変換及びその部分としての諸変換に関係していることを見るなら，小学校，中学校，高等学校の「変換」を核とした幾何学のカリキュラムの構成を考えられるので，このような考えの下での研究が期待される（細垣，佐伯，1979）[2]。

引　用　文　献

Copeland, R.W.(1974);（佐藤三郎訳,1976); ピアジェを算数教育にどう生かすか，明治図書，東京。

Flavell,J.H.(1963);（岸本弘，紀子訳,1969); ピアジェ心理学入門 上下，明治図書，東京。

Guay,R.B. & McDaniel,E.D.(1977); The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children, J.

---

2) 変換群による幾何学の構成についてくわしく知りたいときは拙著細垣，佐伯(1979)を参考にされたい。ここでは高校の行列の関係であつかっている。

Res. Math. Ed., 3, 211-215.
稲垣信夫，佐伯卓也，(1979)；基礎課程 幾何学，森北出版，東京．
Inhelder, B. & Piaget, J. (1958); The growth of logical thinking from childhood to adolescence, Basic Books, New York.
Kidder, F.R. (1976); Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformation, J. Res. Math. Ed., 7, 40-52.
Martin, J.L. (1976); An analysis of some of Piaget's topological tasks from a mathematical point of view, J. Res. Math. Ed., 7, 8-24. (a)
Martin, J.L. (1976); A test with selected topological properties of Piaget's hypothesis concerning the spatial representation of the young child, J. Res. Math. Ed., 7, 26-38. (b)
Moyer, J.C. (1978); The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children, J. Res. Math. Ed. 9, 83-92.
Piaget, J. & Inhelder, B. (1967); The child's conception of space, W.W. Norton and Co., New York.
Piaget, J. & Inhelder, B. (1969); The psychology of the child, Basic Books, New York.
佐伯卓也，(1978)；Piagetの空間表象理論の研究のために，数学教育学会研究紀要，19 (No. 1, 2)，4－9．

On the child's conception of space

by

Takuya Saeki

(Faculty of Education, Iwate University)

(Abstract)

The Course of Study of Elementary School Mathematics has no synthesized structure of transformation geometry in Japan. We shall try if "slides","flips" and "turns" (as a basic Euclidean transformation) are introduced for elementary school children. We have got the result that 4 grade children are able to learn Euclidean transformation geometry.