Akita University

数学的能力について

三塚正臣

1. はじめに

数学的能力といわれている内容については15才以後のものについてはとらえにくい。また，これらのものは，高校，大学，高専に進学している青年後期のものである。数学的能力の定義については，これらの学校において受ける数学教育そのものによってもことなると思う。

ここでは，これから工業技術者として活躍するために，身につけておかなければならない数学的能力について何であるかを，また，数学的能力をささえている要素の間の相互関連や工学との関連からみられる数学的能力について考究したいと思う。

2. 工学的現象を数学的にとらえる能力

今日の工学をささえている基礎としての数学的知識の必要性は大きい。しかし，工学の発展にともなう今日の技術は生産量の増大と生産様式の変化から数学への要求も異なってきたし，数学の役割もさらに飛躍した。企業においては，これまでの熟練さを必要とした部門は減って，相対的に，全面的な知力を必要とする部門が増加してきたといわれる。この知力も単なる知識力というのではなく，生きて働くものとしてであり，工学現象の法則性を明らかにしようという方向にな

Akita University

ってきた。

例えば，熱伝導の現象はある法則にしたがっているが，その法則性を明らかにするのは確率過程の理論であり，統計力学的な現象の解明には確率論が必要になってきた。そして，その工学的現象の数学的法則の追求がなされてきた。

最近の工学においては，工学的現象が数学的構造によって定式化され法則化されるようになってきた。つまり，工学においては，このように抽象数学の概念や種々の操作の手続きを結合させることによって工学的現象が解析されるようになってきた。ところで，結合の法則にのみたよって体系の理論をつくるということは抽象数学の方法であった。

工学に用いられる数学的手法は，これまでの範囲よりもより広く，より深くなってきた。応用数学との関連をみると，最近は，組合せ数学とか，グラフ理論，確率過程，推測統計などがある。工学における現象の解析にあたっては，数学的構造としてとらえていくことが必要になってきたといってよいであろう。

工学的現象を考察するにあたっては，多くの場合，まず問題の本質を抽象化して一つの数学的モデルをたて，その数学的モデルに対して何らかの数学的考察を加えていき，その結果得られたものをもとにして問題に何らかの形で適用していくという形をとっていく。工学における定式化にあたっては，代数の基本概念が重要な役割をはたしている。また，工学的考察においては，工学的現象の解析力や法則的追求にあたっては発見的能力や構造的能力が必要となってくるであろう。

3．数理的に認識する能力

(1) 数学的能力についての諸説

Akita University

数学的能力については諸説がある。そして，これらの諸説はそれぞれの側面をとらえているように思われる。ベッツのように「数学的諸関係の内部的関連を明確に理解する能力」あるいは「数学的素材を意味的に関係づける能力」と定義し，ブラックウエルは「演繹的推理の能力」あるいは「一般的原理を特殊の場合に適用する能力」といっている。レヴェースは応用的能力，生産的能力という見方をしている。あるいはヴェルデリンのように「数学的記号や数学的方法，あるいは論証の本質を理解する能力ならびにこれらのものを記憶し，再生する能力」という見方をしている場合もある。また，数学を特徴づける思考活動の諸特質と考えて，抽象の能力，空間表象の能力，推理能力，直観力，集中力などを数学的諸能力と考えている見方もある。なおこの見方は思考活動分野での機能をあらわすものと考えてよいであろう。

また心理学的立場から考えてみると，論理的思考や抽象能力，一般化する能力もかかわりあいをもっていることはもちろんであるが，数学の学習能力との関連において構成している要素としての能力を数学的能力とみている。すなわち，課題の条件把握における分析力，また課題の基本的関係を把握する能力，および課題の条件を複合し，数学的関係にある依存関係をとらえ，結合する能力も数学的能力であるとしている。さらに数学的記号を操作する能力，アルゴリズム的な能力で，推論のための操作の順序を指示する能力，推論過程を短縮する能力，柔軟な思考をもつこともあげている。

このように，数学的能力については，いくつかの見方があるが，数学的な力がついたということは，公式を記憶したり，計算技術を身につけたりすることだけではない。なるほど，これらの知識や概念や計算技術も確かに数学の力としての要

Akita University

素にはちがいないが，そんなに単純なものではない。現在において要請されている数学の力とは何であるかを考えたい。

(2)数理を認識する能力

科学や技術の進歩に即応して現代において必要とされていることは，数学的な考え方をもった人を育てることであることはさきに述べたとおりであるが，これによって，実際に役立つ技術やより進んだ数学をおさめる基礎をつくり出すことができるであろう。そのためには，数学を数理的にとらえていく能力を養うことが必要である。数学的能力を数理の認識としてとらえていく見方も一つであろう。

数理の認識とは，数学の対象となるものを数理的にとらえすじ道をたてて数理的に処理できる能力であり，また，そうすることによって導かれ，獲得され，形成された能力であるといわれている。しかし，数理の認識は数学的概念つまり法則，性質などの基本的な知識さらに集合的な見方や関数的な見方，微分積分の考え方や公理的方法の一つとしての数学的構造を数学的思考と結びつけていったときに形成されるものと思われる。また，それらとどのようにとりくんでいくのかという数学的態度も関係してくる。したがって，数理認識は，数学的概念，数学的思考，数学的態度に分析されるが，実際の学習場面においては，それぞれ単純に形成されたり，獲得されたりするものではない。この三者は，学習の場で相互にかかわりあいをもちながら，機能的に形成されていくのであろう。

数理認識が機能的に働くときの特徴として，抽象的であること，論理的であること，数学的推理を短縮する能力をもっていること，数学的概念を構造としてとらえようとする能力をもっていること，さらに，見通しをつける能力，思考の観

Akita University

点を自由に変えていく柔軟性をもっていることなどである。逆にいえば，このような状態や様相において形成されていくといってよいであろう。したがって，これらの能力が必要となってくるのである。

なお，これらの数理認識を形成するためにとられる過程を考えてみると

(a) 対象を数理的にとらえ，対象を問題化し，意識し，焦点化する段階，論理的に追求し，検討し，論理的に処理しようとする過程，すじみちの立った考え方にたちながら，抽象化し，認識化する過程をとるということになるであろう。したがって，発見的であり，構成的であろう。

(b) 形成され，獲得された認識を強化し，充実させる過程あるいはさらに，拡張したり，他の認識と構造づけたり，発展し統合する過程が必要であり，また，対象を考察するときには数学的考え方が自由に発揮できる過程を構成していく必要があろう。

しかし，これらの過程で，どのような過程をたどるかは，単純ではなく，合理的，論理的な態度でいこうとする構えが必要であろう。また，発見的に考えていこうとするいわば，方法的な構えが必要であろう。この数理認識を形成するためにとられる過程においてみられる諸能力ならびにこれらの複合された能力によって，しだいに数理の認識の形成がなされるのではないかと思われる。

(3) 論理的に思考する能力

数理的に認識していく過程には論理的に思考する能力が一層必要となっている。そこでここでは論理的に思考する能力とは何かを追求してみようと思った。

論理的に思考するということは，推論を構造としてとらえ

Akita University

ていくことにもなるのではないかと思う。

条件の多い複雑な内容を考えるさいには，単純な内容に分析し，また，見通しの困難なことがらも単純な過程にわけ，それらの単純な内容や細かい過程でどのような関係があるかを明らかにし，総合的に判断して，それらの相異点や関連がどのようになっているかを正しくとらえることが必要であり，それによって全体の構造をしることができるであろう。そして，これによってこのような単純な要素から複雑な構造がどのように構成されていくのかを認識していくことができるであろう。

このことは命題においても同様で，複雑な命題を論ずるには簡単な基盤となる命題に分析し要素化して複雑な命題がそれからどのように組みたてられているかを考察する。そして単純な命題が組みあわされて得られる命題，つまり複合命題の真偽は，それらを構成しているいくつかの単純命題の真偽と，それらを構成している命題の結合のしかたによってきまる。そしてこれらの単純命題の系列は真として与えられた前提であるかあるいは系列の各命題は，推論の与えられた条件からの妥当な推論の結論であり論理的に同値な命題である。このような妥当な推論の連鎖をつくることによって，最終の妥当な結論が得られることになる。

したがって，解決過程においても，このことがたいせつになってくる。これまではとかく羅列的に示していたが，これをこのような見方にたって考えてみよう。複雑な条件を細かい条件にわけ，枠でかこむなりして，どの条件とどの条件が結合しているか，あるいは，他の条件から導かれたものは何で，それとの結びつきを考えていって推論の系列を図示していくことになろう。これによって問題の解決の手順もわかる

Akita University

し，何が明らかであって，何が明らかでなかったかをも知ることができるであろう。よく学生は「わからない」ということをいうのであるが，このことは，推論の系列においてどこかが切断していることを意味すると思う。だから「わからない」というときには，このような推論の系列のどこが切断しているのかをみいだし，そこはどのような関係から生じてくるのかを明らかにしていけばよいと思う。このような推論の系列の図は次第にbranchingしていくこともあり　ときにはfeed backしているときもある。

このような系列の図こそ問題の構造や思考の系列を示すものである。したがって　数学的内容がどのような要素になっており　その要素がどのような結合関係になっているか，また，どのような構成内容からなっていて，それが他の内容とどのように関係し，関連し，結合されているかをとらえる能力が必要となってくる。そして，それがどのような論理の連鎖になっているかを把握していく能力が必要となってくる。このようにとらえていくことによって数学的思考の構造もわかってくる。

これまで論理的に思考する能力について考究してきたが，このさい，直観的能力，抽象化し，一般化する能力，柔軟な思考なども必要となってくる。

4．数学を構造として把握する能力

最近の数学教育においては，論理性を重んじ，数概念や創造性が重視されるようになってきた。そして，科学や技術の進歩に即応して数学的な考え方をもつことがたいせつになってきた。それは，数学をつくりあげていく考え方，あるいは

Akita University

ものごとを数学的にとらえていく態度を養うことであり，与えられた構造を理解するというよりは，構造を構成していく考え方を育成することが必要とされてきた。そして，つくらせ，発見させる過程の中に，数学的概念が形成されることになるであろう。

メダーは，数学的能力として「数学の構造的な面を取扱うことが根幹で，新しい内容として，位相的な考え方，記号論理的な考え方とともに構造的に取扱う」といっている。さらにヒルベルトは「数学的対象の実体は公理系によって構築されている」といっている。すなわち「科学の基礎を探求することを問題とするときは，その科学における基礎の概念の間の関係を正確に余すところなく包含する公理系をうちたてなければならない」といっている。現代数学の著しい特徴の一つは，個々の微分方程式を解いたり，積分したりということもさることながら，ばらばらにある数学的対象の中に本質と思われる共通の性質をみいだし，数学的記号や用語により抽象化をはかり，論理的に展開して公理系にまとめて，この公理系をみたすシステムを考察の対象とするところにある。公理系それ自体がそれらの基礎概念であり，その命題は，これらの原理から有限段階の論理過程を経て導かれるもののみが正しいと認められるといっている。そして，公理から出発して，有限段階の論理過程を経たのち，互いに矛盾することのないことを確かめたとき，その概念の数学的存在の証明が得られると考えられるとしている。これによって，公理系を一つ与えると，そこで数学的体系が一つ定まり，構造を調べていくことになる。

公理が指標となるのは，抽象性や形式性との関連もあるが「何が基本法則」か即ち「何が公理としてえらばれるべきか」

Akita University

をとらえさせ，考えさせるところにある。公理主義的理論は純粋形式であるから，その能力を必要とする。複雑な法則性の関連しあった現象やその法則の関連する内容においては解析を必要とし，そこから生ずる法則の形式的な論理的能力が必要となってくる。このように，もっとも本質的な「基本法則」を抽象して定式化しなければならない。

公理は「ルール」の指定であるが，それは構造の規定ということにもなる。そして，どのような法則性をもっているかによって構造を規定することになる。公理系をみたす集合の構造が数学的構造である。集合のもつ構造に着目して数学の本質的な考え方を理解させることが必要となってくる。集合の間の結合関係を考えるのが構造的な考え方であり，この集合の間の対応関係を考えていくのが関数的な考え方ということになる。さらに「操作の集合」「変換の集合」という見方も要求される。数学的構造の一つの規定として，「数学的対象における数学的法則の存在様式である」という見方もある。公理をみい出すには，多くのものに共通な性質を抽象する能力も要求される。その上にたって数学の構造をとらえていく能力ならびに集合の要素を結合し，それらの関係をとらえる能力が必要とされてくる。

5. むすび

これまで工業技術者として必要な数学的能力として工学的現象の考察に必要な数学的能力ならびに数学の特質や心理学的に考察される数学的能力，これからの時代に要請される数学的能力についてその構成している要素ならびにそれらの間の相互関係を論究してみた。これらは複雑で互いに作用しあ

っており，それらの関係については今後の課題としなければならないと思う。これまで考究してきたことを要約すれば次のようになると思う。

数学的能力の構成要素として，数学的概念の形成能力，数学の構造をとらえていく能力ならびに数学的構造をとらえ，集合の要素を結合しそれらの関係をとらえる能力，数理的に認識する能力ということになろう。これらの中には，集合的，関数的，変換的な考え方をする能力も含まれ，公理的方法をとらえていく能力も要求される。さらに，一般的能力として，数学的記号を用い記号化し結合し，それらの関係を論理的にとらえる能力，論理的思考能力，分析力，綜合力，抽象化し一般化する能力も必要とされる。さらに推理過程にみられる洞察力，論理的な構成能力，思考の柔軟性なども要求される。

文　献

1. クルチェツキー　数学的能力の構造
2. 三塚正臣　数学的論理の概念形成について　日本数学教育学会誌第53巻第1号
3. 赤 摂也 他　数理科学の諸問題
4. J.S. Bruner　Studies in Cognitive Growth
5. G.T. Kneebone　Mathematical Logic and Fundation of Mathematics