

数学教育回顧談

黒田 稲夫

1. 下記の一説はイギリスの画家 Hogarth に負うものであります。

「無地の長方形 $ABCD$ ($AB > AD$) において、その両辺 AB, AD を眺めるとき、それらの長短を比較するのは人情の常。心中ひそかに AB, CD 上にそれぞれ点 E, F を定めてできる四角のような正方形 $A E F D$ を長方形 $ABCD$ から切り去った後に残る長方形 $E F C B$ がもとの長方形 $ABCD$ と相似であるならば、そこに、いかにも安堵したという気持が生じてもとの長方形 $ABCD$ は人の見る目に著しい快感美感を引き起すものである。」

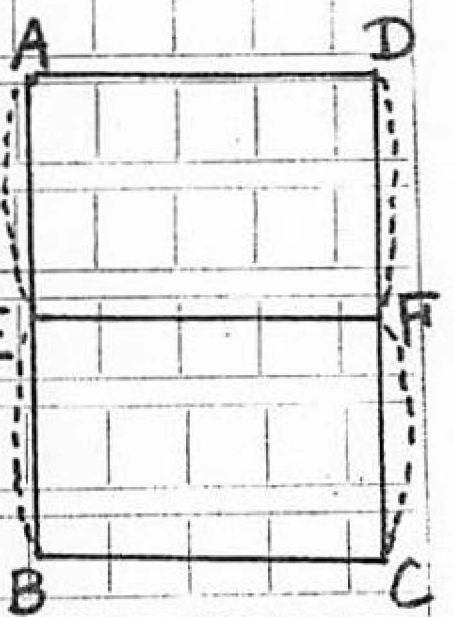
この説に従って $\frac{AB}{AD}$ を計算してみますと

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618 \dots$$

この結果は実際、ドイツの実験心理学者 Fechner の綿密な実験の成果とよく符合しています。

ところで、只今の稍、濃厚な洋風の説は、また次のように至って淡泊な和風のものに改変されます。即ち

「無地の長方形の厚紙 $ABCD$ ($AB > AD$) において、心中ひそかに AB, CD の中点をそれぞれ E, F と定め、 EF に沿って、この長方形を折半して生ずる両合同長方形 $ADFE, EFCB$ がもとの長方形 $ABCD$ と相似であるならば、そこに、いかにも安心したという気が起って、もとの長方形は人の見る目に著しい快感美感を湧き立たせるのである。」



この説に従って $\frac{AB}{AD}$ を計算してみますと

$$\frac{AB}{AD} = \sqrt{2} = 1.414\dots$$

先の $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ を洋風の黄金分割の比の値ということにあれば、後者 $\sqrt{2}$ は和風の黄金分割の比の値ということになりましょうか。

前述の二つの結果は $a=1, 2$ として次のように一つの式にまとめられ、循環連分数の形式で表わすことができます。

$$\frac{AB}{AD} = \frac{1}{2}(2-a+\sqrt{a^2+4}) = 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \dots$$

$a=1, 2$ なるに応じて、それぞれ

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots,$$

$$\frac{AB}{AD} = \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

これによって、 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ の近似値が次のように

求められます。

$$1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}} = \frac{5}{3}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} = \frac{8}{5},$$

・・・

同様にして $\sqrt{2}$ の近似値としては $\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots$ が相次いで得られます。

なお $\frac{AB}{AD}$ を求める式で、序に $a=3, 4$ としてみまると、それぞれ下記が得られます。

$$\frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{13}-1}{2} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}}} = 1.302\dots \div \frac{4}{3},$$

$$\frac{AB}{AD} = \sqrt{5}-1 = 1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \dots}}} = 1.236\dots \div \frac{5}{4}.$$

2. 前節では諸種の数値を得たのでありますが、以下の本節では、それらの数値と関連して数個の事項について述べてみたいと思います。

A. 先に述べたように無地の長方形の厚紙について、人の見る目に美観を与える場合には、和風、洋風に従って、それぞれ

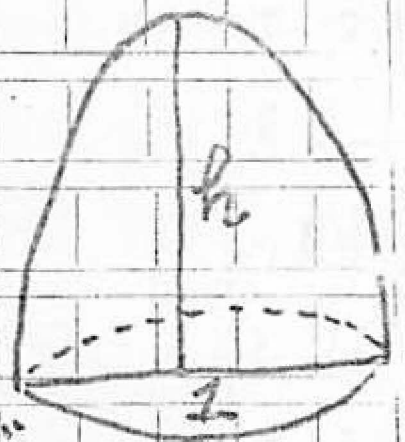
$$\frac{\text{長辺}}{\text{短辺}} = \sqrt{2} \div \frac{3}{2}, \frac{5}{3} \quad (\text{いわゆる七五三が連想される})$$

$$\frac{\text{長辺}}{\text{短辺}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \div \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5} \quad (\text{今四角形のことには関係ない})$$

これに対し、無地でない長方形絵画の場合、それが美観を与える縦横の寸法については、また Fechner の研究調査の結果として下記が知られています。

縦>横の場合は縦の平均値 $= \frac{5}{4} (= \sqrt{5}-1)$
 縦<横の場合は横の平均値 $= \frac{4}{3} (= \frac{\sqrt{3}-1}{2})$ 。

ら。建築学者伊東忠太博士は各地の古鐘
 について、鐘の底面を占める所の直径
 を1と定め、それに対し鐘の高さ
 の割合を測定してその平均値
 として1.408を得ました。



そうしてみると日本古鐘の本質が
 いとも簡潔に次式で表現されることになりま
 す。

その平均値 $= 1.408 \approx 1.414 \dots = \sqrt{2}$ 。

おちこちに伝わりひびく妙なる鐘の音は所詮
 $\sqrt{2}$ のリズムに他ならぬものといえましょうか。

C. 続いて、音楽関係のいわゆる自然長音
 階級についてみまうに、主音のdoに対して
 その中根部の4音 mi, fa, sol, la の振
 動数の割合はそれぞれ $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$ で
 あつて、これらの数値が上記に述べた数値
 の中のものであることに深い感興を覚えま
 す。

D. 先に $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ の近似値として $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$,
 $\frac{13}{8}$, $\frac{21}{13}$, $\frac{34}{21}$, ... を得たのでありますが、

今これらの数値をそれぞれ2から減じた数

値で数列を作ってみますと下記を得ます。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \dots$$

ところで、今度は互生葉植物の葉が莖に附着する有様を図のように観察し、葉の開きの角 θ を求め、これを 360° で除して $\frac{\theta}{360}$ を作り、簡単な分数に化してみますと、それらは只今得た数列の中に見出されることが出来ます。例えば



①...多くの五木根植物の二列葉(ユリなど)

②...ハンノキ, シラカバ,

③...バラ, ヤナギ, サクラ,

④...キャベツ, オウバコ, ダイコン,

⑤...針葉樹の針,

⑥...マツカサの鱗片

これによって互生葉植物の葉の付き方の法則(葉序)が知られます。

このような調子で、例えばキャベツの海苔也走を頂くときは $\frac{3}{8}$ を賞味しているということになりましょうか?

E. 次の行列式を観察してみます。

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$$

★1行の618は $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.618\dots$
 の618, ★2行の753は
 例の七五三を連想させ

ます。また Δ の値は360で4直角の度数, 従
 って $\Delta + 5 = 365 = 73 \times 5$ (平年1年の日数)。

F. いわゆる七五調, 八五調の詩について
 考えますと明らかに

$$\frac{7}{5} = 1.4 \doteq \sqrt{2}, \quad \frac{8}{5} = 1.6 \doteq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

であって, 和風, 洋風の黄金分割の比の値と
 密接な関係のあることが知られます。そこで
 次のような問題(中学生向きか?)を作っ
 てみました。

下記は有名な七五調の詩である。これを読
 んで後の問に答えよ。

はるはさくらの
 あきはきみじの
 なつはあすしき
 ふゆはましるき
 みよやひとびと
 このてんねんの
 てぎやみごと
 かみのたくみの

ふ文字
 あやころも
 かにしき
 つきのきぬ
 ゆきのぬの
 うつくしき
 おりものを
 おりたもう
 とうとしや

(イ) この詩に題をつけよ。

ロ) アンダーラインの部分を漢字で書け。
 ハ) () の中へ適当な英単語を記入せよ。

はる(), なつ(), あき(),
 ふゆ()。

(ニ) 計算を明記し、四捨五入法により、 $\sqrt{2}$ の値を小数第3位まで求め、 $\frac{2}{5}$ の値と比較せよ。

(ホ) さくらの花の絵をかけ。また、ゆきの結晶について説明せよ。

(ヘ) この詩の作者は誰か。またこの詩に曲をつけて有名な歌にした作曲家は誰か。

3. 最後に、H. W. Turnbull という方が、その著書 *The greatest mathematicians* の末尾で述べた次の一文を想起してみます。

The greatest mathematics stands on the borderland of all that is wonderful in Science and all that is beautiful in Art.

ここで、また、おのずと口ずさまれるのが「ここは串本、むかいは大島、中をとりもつ巡航船」でしたか？ともかく、あの串本節！数学は科学と芸術



さては自然と人生の仲をとりもつ役劇を演じているもののように考えられないでしょうか?!

以上、大層あやしげなことを書き綴ってしましまして甚だ汗顔恐縮の至り、何分の御容赦をお願い申し上げます。