Akita University

高専における数学の教育内容の改善について
―― 情報処理教育との関連から ――

三塚正臣

1．はじめに

情報処理教育が現在の時代の要請となってきた。教育課程は社会の要請に応じて組織されるという見方をすれば，高専における数学の教育課程も改善されなければならなくなる。では，情報処理教育の導入に対して数学の教育内容がどのように，どのような根拠に基づいて改善されるのか。変わらない内容は何であるかを深く考究しなければならないと思う。

さらに，高専の数学教育における目的論を考えてみるとき・それにともなって，数学の教育内容は，学生の発達段階，思考経験にもとづいてどのように編成されなければならないのかを考察しなければならない。

本論文においては，これらの立場から，数学の教育の目的性，教育内容の問題点の論究と教育内容の改善について考究するのが主な目的である。

2　数学の教育内容の課題性

数学の教育内容は，高専の数学教育の目標から考えなければならない。教育課程の標準において，目標として，「数学

Akita University

が論理的，体系的に組みたてられている過程を理解させ，数学の基本的な考え方を修得させること，ならびに，これにより，論理的な思考の必要性を理解させ，さらに進んだ数学の考え方や処理のしかたを生みだす能力を養うこと」ならびに，「数学における基本的な知識の修得と，技能の習熟をはかり，それらを的確にかつ能率的に活用する能力をのばす」「実生活の問題を数学的にとらえ，その解決の見通しをたて，これを処理する能力を養い，数学を科学，技術などに積極的に活用する態度を養う」といっている。前者は数学の本来の特質を意味し，後者は専門学科における数学との有機的な関連，工学の基礎的内容を理解するために必要な数学的知識や計算技術の修得の必要性を論じている。一体，工学においては，物理的現象を数量的には握したり，機械の設計の基準を与えるための計算的な数学や，工学の動作状態や性質を説明するための数学的内容が必要であり，常微分方程式，偏微分方程式，ベクトル解析，ラプラス変換，行列，数値計算法などがある。また工学との直接的関連は少ないが，工学上の性質を明らかにするために数量的なは握の基礎として重要な役割をもっているものに，代数学，確率・統計などの数学モデルもある。

さらに，最近第三のものとして，工学上の現象面から抽象された，もともと数学の部門にはなかった理論であり，応用数学に関連をもっている。そして数値計算法を中心とした内容で，電子計算機を用いて数値解析をおこなうときに非常に重要な内容となってきた。これは新しい数学の内容として検討しなければならない部門である。

（1） 数学の教育の目的性

数学は，論理体系によって，順序正しい構造の一環として

Akita University

位置づけられ，さらに，複雑な抽象過程をもち，数学的概念数学的原理，方法がきわめて一般性を保っている。また反面抽象化され，一般化された数学的概念，原理，方法を単なる知識，技術として記憶されるべきものではなく，「抽象化，一般化の過程はどうか」その過程において数学的思考経験が機能的にはたらくよう能力を養うべきであろう。数学は深い理論の展開と 厳密なる議論が多く，方法的考察や数学的事実の吟味まで含んでいる。そこに論理的思考が要求される。また推論の構造の解明ならびにその構造の理解がせまられる。そして数学的な思考を養う必要が生ずる。論理的思考の考察については「数学的論理の概念形成について」において論じた。とくに，命題と命題との間の関係は握においては，思考の結合的形式的方法を用い，推論の連鎖をつくって，複雑な構造がどのように構成されていくのかを認識させることが必要で，そこに用いられる考え方にひそんでいる法則性を体系的に追求することが必要となる。かく数学的推論の構造をわからせることがとくに必要である。

高専の数学においては，数学理論に重点をおくのか，応用に重点をおくのか，あるいは数学的考え方に重点をおくのかという問題がある。これらのすべてに重点をおくバランスのとれた教育目標が望ましいのであるが，時間数のわりには，教授内容が多いことも事実のようである。ひとつの考え方として，数学的な考え方を重視し，理論と応用との結びつきを与えることであろう。しかし，形式的な応用にはしり，その基礎となっている数学的な考え方や理論をないがしろにすることは 数学の特質からみて，反することであろう。純粋に理論的に発展してきた数学的方法が工学上きわめて大せつであることも知られている通りである。それ故に，もっと多く

の数学が必要とされるが，ひとつの主題にあてる時間を減じても，その課程の中に多くの課題をいれるべきであろうか。それとも，学生に，数学的思考を教え　自分自身の創造力を開発させるのに適切な応用上，一般的に重要と思われるいくつかの重要な基本事項を選択して集中的におこなうべきであろうか。もし後者のようにおこなったとすれば，「数学の基礎においてよい訓練をうけた学生は，自分でよく習熟さえすれば，新しい方法に習熟することができる」という仮説が成立するのではあるまいか。

高専の数学において最も重要なことのひとつは，「学生が数学的思考になれる」ということではあるまいか。そうすれば，誘導の原理や考え方を認識するようになり，工学上の問題に数学的な考え方を応用することの必要性もわかってくるであろう。

また専門学科との有機的な関連において考えてみると，工学の基礎的内容を理解するために必要な数学的知識，とくに微分方程式，ベクトル解析などの数学的知識，ならびにいくつかの基本的な数値的方法が必要となってくる。

（２）　数学の教育の外的条件からの課題性

①　情報処理教育との関連

大量の情報量の増加にともない，情報処理の必要性から，数学教育との関係が論ぜられるようになってきた。予測，生産，販売計画，あるいは情報探索など，あるいは科学技術計算部門，最適設計などに電子計算機が不可欠である。電子計算機は単純計算あるいはデータ処理，複雑な論理演算を含む計算にわけることができるが，また，事務計算，データ処理あるいは，リニア・プログラミングを用いた生産計画や最大原理を用いた最適計算，工程管理，シミュレーションによる

Akita University

機械工場計画や数値計算法にもとづく微分方程式，積分方程式の解を求めるものもある。さらに，在庫管理，工程管理などの製造部門，あるいは，人員配置計画，需要予測から受注計画，生産実績などの各種統計もあり，あるいは，技術部門における設計性能計算，O·Rなどの経営計算などもある。

技術計算に関するものについてみると，性能，振動，安定，自動制御計算などにおける固有値，代数方程式の根の近似解，フーリエ解析などの数値計算法があり，強度計算，材料力学計算においては，常微分方程式，偏微分方程式の数値解法，行列の計算法，水力学，流体力学計算においては，常微分方程式，偏微分方程式の数値解法，機械要素，機構の計算もある。さらに，熱力学計算においては常微分方程式，偏微分方程式などの数値解法など技術計算に関する内容も要求される。このほか，ダイナミック，プログラミングや最大原理などの最適化理論，連立微分方程式の解法が大きな比重をしめる。

また情報処理の発展によって，複雑な大規模な計算が可能になった。これにともない，多くの問題に対して数学モデルをたて，このモデルを電子計算機のプログラムとして働かせる。数学モデルのプログラム化にあたって重要なのは数値解析の理論と手法ということになる。実際に問題を電子計算機を用いて解くには，問題を解析し，数学的な定式化したモデルを考え，さらに定式化した式をどのようにして電子計算機で処理するかという数値計算の手法を検討し，その手法にもとづいてプログラムを作成する。したがって電子計算機を用いて問題を解くには，問題に対する知識と同時に，数値計算法の知識とプログラミングの知識が必要となってくる。

② 情報処理教育の立場からみた必要な数学の内容

Akita University

電子計算機は，電子計算機システム（hard ware）とシステムを動かして種々の計算をおこなうためのプログラム（soft ware）とから構成されている。したがって数学として考える場合，電子計算機システムの解析と総合に関する基本的な考え方に必要な数学と，soft ware に必要な数学的手法とを考えなければならない。

hard ware のための数学において直接関係があるのは，論理式であり，ブール代数であろう。できるかぎり忠実に状況を論理式で表現し，電子計算機の中に入れる。また問題を解く場合何を目的として解くか。その条件と因子を論理的に表示することも考えなければならない。またどんな順序で計算させるかを決定しなければならない。この計算の順序をチャートの形で表示したものがフローチャートであるが，これは論理の列を図式化し，論理式で表現することになる。

ここに推論や数学的論理の概念の形成が必要となってくる[2)]

また分類，照合，探索などにおいては，その符号をみて処理のしかたを判断していく手順のくりかえしがあり，AND，OR，NOT，NAND，NOR などの論理演算によって処理することにもなる。命題を記号でおきかえ，複合命題として論理的に考えていくことになる。数学的論理は，データ処理の面でも，システム設計，プログラム作成上でも必要な数学的内容であろう。

データが与えられ，問題が与えられると，数学的に解析し問題の性質から考えて，数学的に定式化し，その式をどのように解くのかを考えなければならない。また，プログラム言語にかきかえ，電子計算機にかけることになるが，問題をプログラムにかえるときに用いられる数学的手法は，数学の中のどんな分野の問題であるか。また，どんな数学が必要とな

Akita University

るのか。関連内容は何であるか。どのような数学理論を展開していくかを判別しなければならない。

3 教授内容の問題点の論究と教授内容の改善

問題を解析し，定式化し，数学的モデルをつくり，電子計算機にかけることになるが，その際に用いられる数値計算法は何かを解明しなければならない。また，定化式をどのようにして解くか，数学の理論の体系とどのように関連しているか。これらの数値計算法は，応用数学におけるこれまでの数値計算法であるか。あるいは，電子計算機にかけられるようにした本来のものとはことなった新しい数値計算法であるかどうかをみきわめなければならない。そして，それは目的によって，線形モデルか，近似計算か，あるいは，微分方程式か，数値微分 数値積分か，代数方程式の根を求めるものであるか，あるいは，固有値，線形計画法の問題であるのかを考えなければならない。これらの過程においては，数学を基本としておこなわれることが多く，これらのことを電子計算機のための数学といってよいであろう。

さきに論究したように，教授内容を考えるときに，これらの電子計算機のための数学を考えに入れなければならないのではあるまいか。

また，数学の教育の目的性において論じたように，数学の特質を考えなければならない。

（1） 教授内容の分散と多様性

教授内容を考えるとき，第一の要件は数学的学力との関連であり，第二の要件は教授内容の多様性の問題であろう。

Akita University

現在実施している教育課程は，時間数のわりには教授内容が多い。入学時には，数学的思考が十分に形成されていない。また，推論の構造が理解されていない。したがって，数学的思考をできるだけはやく訓練しなければならない。

さきに情報処理教育との関連を考えたが，数学的論理や電子計算機のための数学的内容が関連してくる。しかし，その故に，数学の特質を失なったり，数学的思考をおろそかにしてはいけない。たしかに数学理論や数学的考え方に重点をおかないで，応用のための計算技術だけを目標とするならば，課程の中にもっと多くの内容をいれてよいのであるが，しかし数学的な考え方を重視し，理論と応用との結びつきを考えるならば，これ以上の内容に多くの課題をいれることは困難といってよいであろう。そこで，教育内容の再構成ということになる。大綱的に考えてみると，基礎数学の内容を再考慮することが第一要件であろう。このことについては，あとで論ずることにしてある。第二に代数学の内容の改変であろう。3年における内容は，現在微分積分学の偏微分，重積分，複素関数論，微分方程式論である。内容的にも理解困難なところが多い。3年においては，これまでの内容に，ベクトル解析を課するような考え方も台頭しているようである。これらに偏微分，重積分の考え方を理解させ，微分方程式，複素関数論の考え方を理解させることができるのであろうか。3年の内容は理論も深く，二変数関数の極大極小，陰関数の極値問題，曲線の追跡，特異点，重積分の曲面積など理解困難な内容が多く，方法論的に理論も深くなっている。微分方程式においても同様である。したがってベクトル解析などの内容をさらに課していくとすれば，進度をはやめるか，あるいはこれまでの水準を変えていくほかあるまい。はたして数学的

Akita University

考え方や数学理論を理解することができるであろうか。

最近の学習理論に，spiral 方式が台頭している。第一の spiral においては，基本的概念としての諸概念や価値があると思われる素地としての少数の重要な定理や，数学的原理を中心として厳密性を失わないで，内容を編成する。第二の spiral においては同一の基本概念を spiral にくりかえしながら深化させることになるが，そのようにするならば，数学的概念も一層深く理解させることができよう。この考え方は，内容が豊富にならないかぎり有効な方法と思う。微分積分学，ベクトルなどはこの考え方によって第一 spiral，第二 spiral を考えてよいと思う。

電子計算機のための数学あるいは，その数学的手法においても，spiral に編成されるのではないかということが提示されるであろう。しかし，電子計算機にかけるための数値計算法は微分積分学，代数学，微分方程式の内容と理論的に関連しないことが多く，したがって，これまでの内容に単に付加するのでは意味が失われる。

このように考えてみると，3年において多様化をはかることは，さけなければならないであろう。

以上のような論拠にたって，次にそれぞれの教授内容について考察してみよう。要約すれば，次のようになるのではあるまいか。

（２） 教授内容の論究と教授内容の改善

① 基礎数学の教授内容について

現在の数学の教育課程において考えなければならない一つの課題は基礎数学であろう。中学校，高等学校の数学の内容の改正にともなって，その関連を重視しなければならない。また，基礎数学としての立場もある。この見地から考えると

Akita University

集合と論理，推論の構造であり，数学的論理と論理代数との関連であり，新しい数学の立場としての関数概念，写像，微分積分学の第一次指導が論点となるであろう。以下これらについて論究しよう。

② 論理，推論の構造，論理式，フローチャート，アルゴリズム[3)] 推論の構造をしるには，命題の構造をしらなければならない。推論を短かい推論の系列に分割し，妥当な推論の連鎖をつくって，条件文や論理式によって表現し，記号による定式化をはかり，それぞれ妥当な推論であることを確かめる。ここに記号化，置換えをする能力を必要とし，その因果関係を考え，論理性を検討していくことが必要であろう。したがって妥当な推論形式と論理的に同値な命題が根拠となり，基本的な思考の法則化を明確にすることが必要となるであろう。

複雑な命題の構造を明らかにするには，簡単な命題に分析し，見通しの困難なことがらを単純な過程に分析し，その過程において関係を明らかにし，全体の構造や関連を正しく認識することになるが，このような単純な要素や過程から複雑な構造がどのように構成されていくのかを認識していくさいそこに用いられる考え方にひそんでいる法則性を体系化し，記号化して，関係を論理式の形で明らかにしていくことが必要となる。このような推論過程をふまえていくことによって数学的推論が大いに働くようになり，数学の厳密な理論を追求することができるようになるのではないかと思う。

命題間の論理の法則性や，推論や証明のメカニズムを明らかにしていくためにも，その根幹をなしているのは命題論理で，合接，離接，否定，これらの法則や *tautology*，双対の原理，条件文，双条件文，必要条件，十分条件，逆，裏，対偶，論理演算の相互関係，全称命題，存在命題，推論が必要

となってくる。これらはまた，数理を解明するときにも，また条件構造のは握に役立つ。さらに数学的論理による推論そのものを明確にすることは，数学の理論構成，推論の能力を高める上にも役立つであろう。

ⓑ 数学的論理の概念と論理回路，ブール代数との関連，高専の特質から考えてみると，数学的論理の概念をAND回路，OR回路，NOT回路を用いて理解をはかることはとくに興味があるように思われる。

命題の合接はAND回路，ブール代数における論理積に，離接はOR回路，ブール代数の論理和に対応するが，交換法則，結合法則，分配法則，De.morganの定理などが相互に対応づけられる。これらの基本法則．基本性質によって論理式の演算が可能となり，これはAND回路，OR回路，NOT回路，NAND回路，NOR回路を組みあわせた，論理式に対する論理回路であらわすことができる。これらの回路によって，複雑な論理回路を理解したり，設計したりすることができるようになり，さらに論理関数の構造をは握することができる。高専の専門学科においては，情報処理教育の立場から4年～5年において，電子計算機の科目として，ハードウェアの内容では，基本回路，順序論理回路などの論理回路，加算，減算，乗算，除算回路の演算装置，制御装置，記憶装置として磁心，磁気ドラム，磁気テープ記憶装置，磁気ディスク記憶装置，入出力装置がある。

これに必要な数学の基礎概念はブール関数であり，その論理性が必要とされている。ブール関数の要素の集合が，集合論としてのブール代数（ブール束）であることから，ブール関数の諸法則が集合論としてのブール代数の諸定理に対応している。したがって，集合論の立場からのブール代数の発生

Akita University

とブール関数との関連をは握させ，これが数学的論理の概念に対応していることを明らかに理解させる必要があろう。

電子計算機に必要な数学として，素地としては集合論としてのブール代数があげられ，それとの同一性からブール関数の構造が明らかになり，論理回路に用いられることになる。しかし，その根底に論理が基盤をなしている。命題の論理の基本性質，基本演算についても論理代数の基本性質，基本演算が対応し，論理式，論理回路へと発展していく。

高専においては，電子計算機のソフトウェアの基盤となっているこれらの数学的内容は数学的には扱われていない。しかし新しい数学の立場から，また推論の立場から，推論の構造，数の表現，ブール代数，論理回路図ならびに，これらの基盤となっている論理，および問題解析やデータ処理の手順に役立つフローチャートの考え方が高専の1年における基礎数学の内容として扱われなければならないと思う。

フローチャートはアルゴリズムの構造をあらわす最も単純な方法であり，図式によって問題の解決法を表わす方法で，理論の示すところにしたがって演算の手順を示す。フローチャートは問題解決の場合に思考の動きを表わすのに有効であって，全体をは握し，相互の関係を認識することができる。

ⓒ 微分積分学の早期導入

微分積分学の早期導入の教授理論とその実証的研究[4)]については，spiral 方式によって1年において導入して，第一次指導を行ない，第二の spiral によって基礎概念を深化させていく。この方式は，微分積分学の理解に大いに役立つであろうと考えられる。

Akita University

以上，基礎数学の内容の改善について論究を試みたが，項目的に要約すると次のようになると思う。

ア．数と式　内容を精選し，有理式の意味，因数定理，恒等式の意味をふまえ，組立除法による多項式の計算をおこなう。

イ．方程式と不等式　方程式の解法は基本的な範例にとどめ，連立一次方程式はGaussの消去法による解法を重視する。二次方程式，判別式は基本的内容とする。無理方程式，分数方程式は削除，あるいは軽減をはかる。また，二次不等式，三次不等式は，数，表とグラフによる解法を中心とし，軽減をはかる。さらに，絶対値のついた不等式においては，AND，ORの概念，真理値，論理和，論理積などの論理の概念を用いて概念の深化をはかることが必要であろう。

ウ．関数と写像　新しい数学の考え方に即して，関数の意味，写像，逆写像，写像の合成を考察させる。さらに関数のグラフの平行移動，対称移動を考え，二次関数，三次関数を中心として関数の増減，最大最小，極大極小の意味を明らかにする。分数関数は簡単な形にとどめる。

エ．三角関数，指数関数，対数関数は，これまでの内容と考えてよい。

オ．数列と極限　簡単な数列をモデルとして極限の概念を導入しその意味を明らかにする。さらに関数の極限の意味，定理，自然対数eの導入，関数の連続などの概念を初歩的に扱い，連続関数の性質まで論ずる。さらに数学的帰納法を扱う。

カ．微分法，微分係数，導関数の導入，初等関数の微分などの基本公式，関数の和，差，積，商の微分，合成関数の微分，対数微分法，逆関数の微分，媒介変数による微分，陰関

Akita University

数の微分，関数の極大極小の第一次指導，関数の増加の状態，極大極小とその条件を二次関数，三次関数を中心として扱う。さらに，積分との関連においてRolleの定理と平均値の定理を扱う。以上が微分の第一のspiralの内容である。

キ．積分法　不定積分の定義，基本積分の公式を導入し，置換積分法，部分積分法，有理関数の積分，簡単な無理関数，超越関数の積分などを導入し，定積分の定義，定積分の置換積分法，部分積分法，簡単な面積，体積を扱う。

ク．平面図形と式はこれまでの内容とする。

ケ．集合と論理　さきに述べた論拠にたって次のような内容を，集合と論理の内容と考えたらどうであろうか。

命題の真理値，命題関数と真理集合を扱い，命題の合接，離接，否定，排他的論理和を論理回路（AND回路，OR回路NOT回路，NAND回路，NOR回路）との関連で扱い，論理代数の論理和，論理積，De.Morganの定理，tautology 双対の原理，条件文，双条件文，必要条件，十分条件，逆，裏，対偶，論理演算の相互関係，全称命題，存在命題，論理の基本公式と基本演算，論理式と論理回路図，アルゴリズム，フローチャート，思考手順，推論の構造，などが考えられる。

以上，基礎数学について論じたが，これまでの内容と相当変わっていることといえよう。これらの内容は，それぞれ，これからの数学の内容の基礎の概念となることがいえよう。

② 2年数学の教授内容について．

(ア) 2年数学においては，微分積分学はspiral方式によって第一のspiralである微分法，積分法を深化と拡大をはかり数学的理論を展開する。第二のspiralとして　数列の極限存在，有界単調数列の収束性，関数の極限，微分可能と

Akita University

連続性，複雑な関数の微分，逆三角関数の微分，双曲線関数の微分，Ralleの定理と平均値の定理の深化と関連，関数の極大極小，増加・減少の性質，不定形の極限値，高次導関数Taylarの定理，関数展開，剰余項の問題，高次導関数を応用しての関数の増加、減少，極大極小問題，関数の凹凸，高次導関数を用いての変曲点，方程式の応用，根の近似値の理論，Newton法による近似解，これらの関連でNewton－Raphson法による方程式の解法など，微分積分の理論を展開し，概念の深化をはかる。さらに無限級数の収束条件，正項級数，交項級数，絶対収束級数 べき級数の収束半径について論ずる。

積分法においては，第二のspiralとして置換積分法，部分積分法の複雑な問題，無理関数の積分，超越関数の積分などをとりあげる。定積分に関する理論として，定積分の定義を厳密におこない，定積分の計算，定積分に関する平均値の定理，定積分の置換積分法，特異積分，平面図形の面積，体積である。第二のspiralである発展内容は，導入内容をまとめた上で発展拡充，深化させたものである。

(イ) 代数幾何学は内容を精選し，幾何学は空間座標を中心として，二平面間の関係、直線と平面との関係、平面の方程式，二次曲面の方程式を扱う。

さらに力学などの物理量がベクトルで表現され，ベクトル計算の法則は実数の法則と同様に構造化される。したがってベクトル解析の基礎となっている概念や方法をSpiral方式にもとづいて導入し，ベクトルの成分表示やベクトルの和，スカラーとの積，単位ベクトルを用いて物理の問題や幾何の問題への応用について考えてみよう。この見地から考えてみると，ベクトルの導入として，ベクトルの意味と相等，ベク

Akita University

トルの単位ベクトル，基本ベクトル，ベクトルの成分表示，ベクトルの演算，一次独立性，一次従属性，共線ベクトル，共面ベクトル，スカラー積，ベクトル積，ベクトルの三重積までを第一の Spiral として導入してよいのではないだろうか。第二の Spiral として，スカラー場とベクトル場，ベクトルの微積分，曲線，方向微分係数，スカラー場の勾配，ベクトル場の発散，ベクトル場の回転，線積分，面積分，曲面，三重積分，ガウスの発散定理，グリーンの定理，ストークスの定理，並びにその結果と応用がその内容と考えられる

(ウ) 代数学はこれまで，多項式，方程式の内容が含まれておったが，順列・組合せと，二項定理，多項定理と行列と行列式，連立一次方程式，固有値，固有ベクトルなどの線形代数を重視しなければならない。行列演算は，一次方程式，一次変換，連立微分方程式などに関連した広い分野で用いられる。このため，物理学，工学，統計学その他の分野で行列はますます用いられるようになった。この点から考えて線形代数の比重は大きい。また電子計算機のための数学内容との関連も大きい。したがって線形代数として完結しておく方がよいと思う。行列と行列式の内容としては，行列の基本概念と計算方法，行列の積，小行列，階数，特異行列，ならびに行列式連立一次方程式，クラーメルの公式，同次，非同次の連立一次方程式，数値計算法に大いに関連があるガウスの消去法，逆行列，固有値を扱う，さらに固有ベクトル，固有行列式，固有方程式，双一次形式，二次形式，エルミート形式，ユニタリー行列の固有値，数値計算法である固有値の限界，行列の固有値の近似値を計算するための標準的な方法の一つは，逐次近似法である。

以上2年の数学内容は微分積分の第二の Spiral の立場か

Akita University

らの展開とベクトル解析の第一のSpiralとしての理論展開，さらに線形代数としての立場をとっていくなどの問題がある。

③ 3年数学の教授内容について

3年における微分積分学は偏微分，二変数関数の極大極小，陰関数の微分法，極値問題，曲率，縮閉線，伸開線，曲線の追跡問題，特異点問題，特異積分，級数の微分，積分，重積分，曲面積であり，一階微分方程式，一階高次微分方程式，二階常微分方程式，連立常微分方程式，簡単な偏微分方程式複素関数においては，初等関数，正則関数，複素積分留数，実積分への応用など，その内容も高度で，理論も深く，方法論的にも理解しなければならない内容も多い。

3年において，電子計算機の利用技術に関連する教育，つまり情報処理教育との関連において，電子計算機にかけるために必要な数値計算法を扱うという考え方やベクトル解析をおこなうという考え方もある。数学の理論展開やその方法論的考察，ならびに数学的な考え方に対する認識という観点から，単に工学上の応用というだけの知識ということだけでなく，数学的考え方を身につけさせることを重視しなければならない。

数値計算については，これまでの数値計算法とは異なり，電子計算機に必要な数学としての立場からの数値計算法であって，これらは，それぞれの分野の数学理論との関連が大きいが故に，どの分野とどのように関連しているのか，その関連性を十分に考えなければならない。単にプログラミングのための手法というのではなく，数学理論との関連を考えれば，数値計算法の意味やその手法の立場も理解されることであろう。このように考えれば，数値計算法は，電子計算機の機

Akita University

能の性質上，微分積分，微分方程式が終了した時点において考えられてよいのではあるまいか。したがって，数値計算法は3年末かあるいは応用数学をおこなう4年のはじめの段階において取り扱うことが妥当ではあるまいか。

ベクトル解析については，2年において扱うベクトル代数との関連から考えれば，Spiral方式という観点から，ベクトル解析の基本的概念を深化し，微分積分学の応用としての立場から，ベクトル関数の微分，ベクトルの積分，接線ベクトル，演算子▽，スカラー関数の微分，あるいはスカラー場のgrad，ベクトル場のdiv，rot，勾配，発散，回転に関する公式，ベクトルの線積分，曲面，面積分，立体積分，積分定理，ガウスの定理，グリーンの定理，ストークスの定理などを扱うという考え方もよいと思われる。これらの内容の履修時間は35～40時間は必要と思われる。

3年の内容については，その綱密性から考えて十分に検討されなければならない。

④ 応用数学としての立場からみた数値計算法についての考察

数学の教育内容の改善として，電子計算機のための数学をどのように考えていくかということが大きな課題であった。数値計算法については，電子計算機にかける場合に必要な数学という観点から考えなければならないことはさきに述べた通りである。微分積分学や代数学，微分方程式，あるいはフーリエ変換にみられる数学理論とは異なり，電子計算機にかける場合，プログラミングとして必要な数学内容を中心として編成しなければならない。また，そのために必要な数学的手法あるいはそのために必要な数学的内容例えば，誤差論とか，補間法などは何かを考えなければならない。

Akita University

電子計算機にかけるために必要な数学的手法の特徴は，解を求めるプロセスにおいて，同じ操作を何回も繰り返されることである。例えば，連立一次方程式の解法にもいろいろの解法があるが，とくに考えられるのは，ガウスの消去法であり，一般の連立方程式の解法で用いられる消去法を用いた。すなわち，連立方程式の解法のプロセスは，与えられた連立方程式をそれと同値の連立方程式に変換するプロセスであって，このプロセスにおける操作を何回も繰り返しおこなうことで，電子計算機の操作によって解が得られる。したがって数値計算法としては，これらの特質からみて，関連している数学の各分野において扱うよりも，同じ操作をくりかえしおこない，電子計算機にかけるという機能からみて，まとめて数値計算法として実施すべきことと思う。

次に，これらの数学的手法を考察してみよう。

(a) 連立方程式

㋐ Gauss の消去法

連立方程式の係数行列 a_{ij} と方程式の右辺をあらわす列ベクトル b_i からなっている行列 A について，対角要素の値を 1 とし，その他の要素の値を 0 にするように消去すればよく，したがって，行列に演算をおこなったのち，残っている要素は方程式の右辺を表わす列ベクトルと対角要素の 1 だけとなる。このプロセスをみると，行列 A の第 k 行を a_{kk} でわり，行列 A の第 i 行から第 k 行の a_{ik} 倍を減くという手順にしたがって，この行列 A を変形するが，これを「a_{kk} を軸として行列 A を掃き出す」というが，この掃き出し演算を第 k 行を除くすべての行についておこなう。この解決過程を示したフローチャートをつくり，プログラミングしていくことになる。この掃き出し法は代数学の理論の関連においておこなう

ことになる。

① 反復法(Gauss－Seidel法)

x_1, x_2, x_3,……x_nを未知数とし，a_{11}, a_{12}, a_{13}……a_{1n}, a_{21}, a_{22},……a_{2n}……を係数とし，b_1, b_2……b_nを定数とするn元連立一次方程式例えば，三元連立一次方程式についていえば，x_1, x_2, x_3を第一式，第二式，第三式から求め，初期値の考え方を用いて，初期値$x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$を与え，各式に代入する。第一式についていえば，x_2，x_3の初期値として$x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$を与えてx_1の新しい近似値として$x_1^{(1)}$を得る。次に第二式においてx_1，x_3の代りに$x_1^{(1)}$，$x_3^{(0)}$を用いて$x_2^{(1)}$をつづいて$x_1^{(1)}$と$x_2^{(1)}$を用いて$x_3^{(1)}$を得る。第一回の操作はこれで完了し，$x_1^{(1)}$，$x_2^{(1)}$，$x_3^{(1)}$をさきの$x_1^{(0)}$，$x_2^{(0)}$，$x_3^{(0)}$の代りに用いて同様に，$x_1^{(2)}$，$x_2^{(2)}$，$x_3^{(2)}$を求める。このように，この操作を繰り返し，順次新しい近似値を求めていく。つまり$x_1^{(1)}$,$x_2^{(1)}$,$x_3^{(1)}$を求めるとき用いた$x_1^{(0)}$,$x_2^{(0)}$,$x_3^{(0)}$の代りに$x_1^{(1)}$,$x_2^{(1)}$,$x_3^{(1)}$を用いて$x_1^{(2)}$,$x_2^{(2)}$,$x_3^{(2)}$を求めるのである。このような操作の繰り返しの計算ということで電子計算機の機能が発揮される。

(b) 逆行列

Aをn次の正方行列とするとき，$|A| \neq 0$の行列Aに対して$AB=I$（Iは単位行列）を満たす行列BをAの逆行列A^{-1}というのであるが，$AA^{-1}=A^{-1}A=I$となることを示す，すなわち$A \cdot X=I$となるXを求めることになる。行列の積の性質によると，行列Aに行列Xのn個の各列をかけあわせると，対応するIの列と等しくなる。例えば，$n=3$としてAの逆行列は$A \cdot X=I$となるXで，3元連立一次方程式の3つの組から，未知数x_{ij}を求めることになる。これらの3組の連立方程式の係数行列はみな等しく，定数項だけが異なっているのであるか

Akita University

ら，消去法による解法を用いて，これらの連立方程式を解くことができる。そして，行列Aの右に単位行列をつけ加えた行列の各要素をデータとして読みこみ連立方程式の消去法による解法を用い，単位行列の右に，行列Aの逆行列A^{-1}がえられるようにすればよい。消去法におけると同様，電子計算機を用いていくことができる。したがって，連立方程式の解法アルゴリズムを少し修正すれば逆行列を計算するアルゴリズムが得られることが明らかである。連立方程式の解を求めたり，逆行列を計算するのに用いた消去法はある行列に適当な基本行列を施していくプロセスであるといえよう。

(C) 代数方程式の根の近似解

代数方程式$f(x)=0$の根を求めるには，3次または4次の方程式ではCardanoの解法やフェラリ（Ferari）の解法などの代数解法がある。しかし5次以上の方程式では一般に代数的解法がないので，近似解法を用いていく。

代数方程式の近似解法としては，Newton-Raphson法はさみうち法（regula falsi法），ベアストウ法（Bairstow法），リン法（Lin法），グラーフェ法（Graeffe法），レーマ法（Lehmer法），ベルヌーイ法（Bernoulli法）などがある。

(ア) Newton-Raphson法

この方法は$f(x)=0$の近似解x_0がわかっているときに，近似根を反復修正して真の値に接近させるのでよく，収束の速い方法である。これは，$f(x)$の導関数が簡単に求められるときに，容易に利用され，第一次近似根は$x_1=x_0+h=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$以下，第n次近似根は$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$となる。これを用いて，平方根$f(x)=x^2-a=0$の根を考えてみると，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$がえられ，$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$と

Akita University

なるまで求めていく。しかし $|x_{n+1}-x_n|>\varepsilon$ のときは，x_{n+1} を x_n とおきかえて，新しい x_{n+1} を求め，$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$ となるまで反復修正していく。電子計算機においては，ε の値を与えておいて反復していく。

(イ) regula-falsi 法（はさみうち法）

この方法は一次反復法で，$f(x)=0$ の近似値にごく近い数で $f(a)$ と $f(b)$ とが異符号になるような2数，a，b を選ぶとき，根は区間〔a，b〕に必ず一つは存在するという連続に関する定理を用いていく。即ち，曲線上の二点〔a，$f(a)$〕，〔b，$f(b)$〕を結ぶ直線が x 軸との交点を C_1 とすると $C_1=\dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

次に $f(C_1)$ と $f(b)$ とが異符号であれば区間〔C_1，b〕に対して同じような操作をおこない，C_1 と同様に $C_2=\dfrac{C_1f(b)-bf(C_1)}{f(b)-f(C_1)}$ を得る。逆に $f(C_1)$ と $f(a)$ とが異符号であれば区間〔a，C_1〕に対して同じような操作をおこない，C_1 と同様に $C_2=\dfrac{af(C_1)-C_1f(a)}{f(C_1)-f(a)}$

C_3 ……を求め，$|f(C_i)|<\varepsilon$ を満足するまで操作をおこない，C_i を真の根の近似値とする。電子計算機では ε を例えば，$\varepsilon=10^{-6}$ などの値を与えておく。この操作の繰り返しに電子計算機が用いられる。

(ウ) 三次方程式のカルダノの解法

これは代数学にとりあげられている三次方程式において，$x=y-\dfrac{a}{3}$ とおいて変形し，$y^3+3py+q=0$ の形に変え，$y=u+v$ とおくことによって求めようとしている。これは代数学の理論を用いている。さらに高次方程式の実数値解はきまらない場合が多く，近似解を求めることを考えていく。

(エ) ベアスウ法

この方法は $f(x)$ を2次式の積に変形し，この2次式を根の公式にもとづいて解き，全部の根を求める方法で，実根，複素数の別なく適用することができる方法である。すなわち，

Akita University

$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ を x^2+rx+s でわり，$f(x)=(x^2+rx+s)(x^{n-2}+b_1x^{n-3}+\cdots b_{n-2})+px+Q$ とおき，係数を比較して $b_k=a_k-rb_{k-1}-sb_{k-2}$ $(k=1,2\cdots)$ $b_{-1}=0$，$b_0=0$ とする。剰余については $p=b_{n-1}$，$Q=b_n+rb_{n-1}$ である。P，Q は r, s の関数で $P(r,s)=0$，$Q(r,s)=0$ が同時に成りたつならば，$f(x)$ は x^2+rx+s なる因数をもつ。r，s を推定し，r を $r+\Delta r$，s を $s+\Delta s$ にすれば，$p=b_{n-1}\rightarrow 0$，$Q=b_n+rb_{n-1}\rightarrow 0$ とする。

$\frac{\partial b_{n-1}}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial b_{n-1}}{\partial s}\Delta s+b_{n-1}=0$，$\left(\frac{\partial b_n}{\partial r}+r\frac{\partial b_{n-1}}{\partial r}+b_{n-1}\right)\Delta r+\left(\frac{\partial b_n}{\partial s}+r\frac{\partial b_{n-1}}{\partial s}\right)\Delta s+b_n+rb_{n-1}=0$，この b_k などの偏微係数の計算は漸化式 $b_k=a_k-rb_{k-1}-sb_{k-2}$ を r，s でおのおの微分して $c_k=b_k-rc_{k-1}-sc_{k-2}$ $(k=1,2\cdots n-1,$ $c_{-1}=0$，$c_0=1)$ $\therefore \frac{\partial b_k}{\partial r}=-c_{k-1}$，$\frac{\partial b_k}{\partial s}=c_{k-2}$ $(k=1,2\cdots n)$ よって $c_{n-2}\Delta r+c_{n-3}\Delta s=b_{n-1}$ $(c_{n-1}-b_{n-1})\Delta r+c_{n-2}\Delta s=b_n$ となる。この Δp，Δq の連立方程式を解いて，その大きさが望みの大きさ以下に小さくなるまで以上の手法を反復する。Δp，Δq が求める大きさ以下になったとき，反復操作をやめ，そのときの p，q を係数とする2次方程式を解いて最初の二根を求める。次に，$f(x)$ を x^2+px+q で割った商の多項式を 0 とおいて続く2根を求める。以下同様にし順次次数を 2 ずつ下げた方程式を解くことによって最初の方程式の根をすべて求めることができよう。

(d) 固有値と固有ベクトル

固有値，固有ベクトルは，物理学，工学上の応用に関連して生ずることが多い。これらの固有値の理論のうち，固有値を近似的に定めるための多くの方法が開発されたが，電子計算機の発達とともに，その使用に適した方法に改められた。

Akita University

n次正方行列の固有値を計算するには，固有多項式を定めるが，これは，固有行列式を展開して固有値λの同次数の項をまとめて整理し，次に固有方程式の根を求める。nが大きいときは，これは，Newtonの方法などの近似法が利用される。
固有値について，もっとも効果的な数値計算法としては，
①固有値の大きさの限界をみつける方法 ②固有値の近似値を計算する方法がある。固有値を求める方法としては，固有値λを含んでいる行列を直接展開していくのでは合理的でないので，行列を展開しやすい形にかえるとか，固有値が直接求められるものに変えるとかの種々の方法がある。実対称行列の固有値を求めるには，直交変換によって対角化できることを生かしたJacobi法やGivens法あるいは，Householder法が最もすぐれている。

行列の固有値の近似値を計算するための標準的な方法の一つは逐次近似法である。これらの理論に対して，行列Aの固有方程式の係数を計算するために，行列Aをフロベニウス行列に変換し，これに対する固有方程式を計算するのである。ノンシンギュラーな行列Sによって$P=S^{-1}AS$となるとき，PとAと相似であるといい，$\det(A-\lambda E)=\det(P-\lambda E)$したがって行列Aから相似な行列Pにいたる過程を示せばよい。それには，要素をピボットして他の要素を掃き出して，フロベニウス行列式に変換される。さらに行列Aの固有値が何んらかの方法によって求まった場合，その固有値に属する固有ベクトルを求める方法がある。これがダニレフスキーの方法とよばれるものである。これなどは，電子計算機の内容と考えてよいであろうし，さらに，行列Aの固有方程式においては，固有方程式を完全に解かないで絶対値最大の固有

Akita University

値を求める方法がある。絶対値最大の固有値とそれに属する固有ベクトルの計算は多くの応用分野で重要である。

絶対値最大の固有値を求める方法は，一般の代数方程式の最大根を求める場合にも適用できる。また，行列Aの最大固有値を求めるには，Aの固有行列式を展開せずに行なえるのが特徴である。さらに，固有多項式の係数を用いた行列の逆転なども電子計算機に必要なものであろう。

(e) 常微分方程式の数値解法について

微分方程式の数値解法は，微分を適当な差分でおきかえ，問題を有限変数の方程式に帰着させ，適当な変数の値に対応する解の関数の値を順に定めていく方法である。この方法は近似解法で，電子計算機にかけられることになる。この方法の中にはRunge－Kutta法，それを修正したRunge－Kutta－Gill法，Milne法がある。Rung－Kutta法Runge－Kutta－Gill法は点傾斜法と梯形法であり，Milne法は予測子修正法である。電子計算機の記憶装置は予測子修正法よりも点傾斜法の方が少なくてすむ。梯形法は3n個でMilne法は7n個必要となるのに対してRunge－Kutta法では4n個，Runge－Kutta－Gill 法では3n個でよいといわれる。またプログラムを組む場合にも，予測子修正法よりも点傾斜法の方が判定の回数が少なく比較的容易にできる。また点斜傾法では初期値が与えられているだけで十分であるが，予測子修正法では数個の出発値が必要となってくる。これからみると点傾斜法がよく用いられているが，誤差の大きさを問題にする場合には，点傾斜法では計算とは別に誤差制御をおこなわなければならない。

1階常微分方程式$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$の解が$y=\varphi(x)$という式で与えられなくても，任意のxに対するyの値$\varphi(x)$がいつ

Akita University

も求められるのであれば，微分方程式の解が求められたといってよいであろう。例えば，初期条件が $x=x_0$ のとき，$y=y_0$ である一階線型微分方程式 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ で，任意の x に対する数値解 y を求める方法を考えてみよう。微分方程式の数値計算法の一つのモデルにもなるであろう。

曲線上の点 $A_0(x_0, y_0)$ における接線の方程式は，傾き $m_0=f(x_0, y_0)$ となるから接線 A_0T_0 は $y-y_0=f(x_0, y_0)(x-x_0)$ が得られ，h の値が十分に小さい時には，接線 A_0T_0 の $x_1=x_0+h$ における y の値は $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ の解 $y=\varphi(x)$ の x_1 における y の値 y_1 とほぼ一致するとみて，$y_1 \fallingdotseq h\cdot f(x_0,y_0)+y_0$ と考えてよい。これによって求められた $y=\varphi(x)$ 上の点 $A_1(x_0+h, h\cdot f(x_0,y_0)+y_0)$ における接線 A_1T_1 の方程式は，接線 A_1T_1 の傾き $m_1=f(x_0+h, hf(x_0,y_0)+y_0)$ であるから接線 A_1T_1 は，$y-y_0-hf(x_0+y_0)=f(x_0+h, hf(x_0,y_0)+y_0)\{x-x_0-h\}$

この A_1T_1 の $x_2=x_0+2h$ における y の値は，h が十分に小さいときには，$y=\varphi(x)$ の x_2 における y の値 y_2 とほぼ一致しているとみてよい。

$$\therefore y_2=f(x_0+h, hf(x_0,y_0)+y_0)\cdot h+f(x_0,y_0)\cdot h+y_0$$
$$=f(x_0+h, hf(x_0,y_0)+y_0)\cdot h+y_1$$

このような操作を同様に繰返していけば，y_3, y_4 …… y_n の値を求めることができ，プログラムに組むことができる。

一般に，$x_n=x_0+nh$ に対する y_n の値から $x_{n+1}=x_0+(n+1)h$ に対する y_{n+1} の値を求めると $y-y_n=f(x_n,y_n)(x-x_n)$ 故，x_{n+1} に対する $y_{n+1}=h\cdot f(x_n,y_n)+y_n$ となる。

この方法では数値解の誤差が生ずるが，この誤差をできるだけ小さくするように工夫したのが Runge－Kutta 法である。Runge－Kutta の方法は一階常微分方程式においてその理論の関連として扱ってもよいが，その方法論は理論と同一でな

Akita University

い。したがって数値計算法としてまとめるのがよい。

(ア) Runge－Kutta法

初期条件 $x=x_0$, $y=y_0$ での一階常微分方程式 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ の数値解法を考えてみると、この方法は、任意のxの値に対するyの値を求めるのに、$x_k=x_0+kh$に対するyの値y_kから、次のx_{k+1}に対するyの値y_{k+1}を求めることになる。

これを定めるのに、さきの$y_{k+1}=y_k+h \cdot f(x_k, y_k)$で定めたが、$y_k$に加えられる$h \cdot f(x_k, y_k)=K_1$の値を修正し、誤差を少なくしようというのである。即ち$[x_k, x_{k+1}]$の中点上の二点における微分係数$f(x_k+\frac{h}{2}, y_k+\frac{K_1}{2})$, $f(x_k+\frac{h}{2}, y_k+\frac{K_2}{2})$を求め、それによる$x$の増分$h$に対する$y$の増分$K_2$, K_3とを定める。次に、x_{k+1}における微分係数$f(x_k+h, y_k+K_3)$を求め、それによるxの増分hに対するyの増分K_4を定める。このようにして求めた値K_1, K_2, K_3, K_4を$K_1:K_2:K_3:K_4=1:2:2:1$の割合で平均した値$\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$を$y_k$に加えている。以上をまとめると、

$K_1=hf(x_0, y_0)$, $K_2=hf(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{K_1}{2})$

$K_3=hf(x_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{K_2}{2})$, $K_4=hf(x_0+h, y_0+K_3)$

$K=\frac{1}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4)$として $y_1=y_0+K$によってy_1を求め、これをあらためてy_0とし、以下これを繰り返す方法である。なお、hの値が大きくなると切り捨て誤差は大きくなり、hの値が小さすぎると計算時間が長くなり四捨五入の誤差は大きくなる。x_0から$\frac{h}{2}$だけ進め、1回目に得られた近似値を$y^{(1)}$, 2回目に得られた近似値を$y^{(2)}$とすると、真の値Yと$y^{(2)}$との間には、$Y-y^{(2)}=\frac{1}{15}(y^{(2)}-y^{(1)})$となり、$\frac{1}{15}(y^{(2)}-y^{(1)})$は$y^{(2)}$に対する修正量となることがわかる。

(イ) 常微分方程式のRunge－Kutta－Gill法

微分方程式の初期値問題の数値解法として現在最も多くつ

かゆれており，Runge－Kutta 法を修正し，電子計算機の記憶装置の必要数を減らし，繰り返し計算による丸めの誤差の累積を少なくしたものであり，k_0，k_1，k_2，k_3，y_1，y_2，y_3，y_4，q_1，q_2，q_3，q_4を次のように定める。

$k_0 = hf(x_n, y_n)$，$y_1 = y_n + \frac{1}{2}(k_0 - 2q_0)$，$q_1 = q_0 + 3[\frac{1}{2}(k_0 - 2q_0)] - \frac{1}{2}k_0$

$k_1 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_1)$，$y_2 = y_1 + (1-\sqrt{\frac{1}{2}})(k_1 - q_1)$，$q_2 = q_1 + 3[(1-\sqrt{\frac{1}{2}})(k_1 - q_1)] - (1-\sqrt{\frac{1}{2}})k_1$

$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_2)$，$y_3 = y_2 + (1+\sqrt{\frac{1}{2}})(k_2 - q_2)$，$q_3 = q_2 + 3[(1+\sqrt{\frac{1}{2}})(k_2 - q_2)] - (1+\sqrt{\frac{1}{2}})k_2$

$k_3 = hf(x_n + h, y_3)$，$y_4 = y_3 + \frac{1}{6}(k_3 - 2q_3)$，$q_4 = q_3 + 3[\frac{1}{6}(k_3 - 2q_3)] - \frac{1}{2}k_3$

このようにして求め，$x_{n+1} = x_n + h$，$y_{n+1} = y_4$とする。q_0は出発点，x_0では0とおき，あとは一つ前のステップでのq_4を新しいq_0として上の方法を繰り返していくのである。

（ウ）常微分方程式のMilne法

$x = x_0 + nh$におけるyの値y_nを順次求めるのであるがy_{n-1}までわかったとき，y_nの値を予測し，つぎに$f_n = f(x_n, y_n)$の値を補助に用いて修正する方法である。一般には次のような手順でおこなっている。①必要な数の出発値を他の適当な方法で求める② 予測子によってy_{n+1}の予測値$y_{n+1}^{(0)}$を出し，③ 与えられた微分方程式の右辺に代入して$y_{n+1}^{(0)\prime} = f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})$を出す。④ $y_{n+1}^{(0)\prime}$をあわせて用いて修正子により，$y_{n+1}^{(0)}$の修正された値$y_{n+1}^{(1)}$を出す．さらに，⑤ $y_{n+1}^{(0)}$と$y_{n+1}^{(1)}$との差がある値よりも小さくなればそのステップの計算は完了し，次のステップにうつる．そうでなければy_{n+1}を用いて③ないし⑤を望む値よりも，$y_{n+1}^{(0)}$と$y_{n+1}^{(1)}$の差が少さくなるまで反復する。この時の判断は相続く2つの修正値についておこなう。この方法のうち，梯形則とMilne法とがある。梯形則は精度はややおちるが，出発値は初期値のほか一点だけ必要である。さて，Milne法というのは，hをあまり小さくしないで精度をあげたい時に用いる。初期値のほかに3個の出発値をつくる。

予測子；$y_{n+1}=y_{n-3}+\frac{4}{3}h(f_{n-2}-f_{n-1}+2f_n)+\frac{28}{90}h^5y^{(4)}$

修正子；$y_{n+1}=y_{n-1}+\frac{h}{3}(f_{n-1}+4f_n+f_{n+1})-\frac{1}{90}h^5y^{(4)}$

打切り誤差T_cの見積りは，修正子と予測子との差C_0からT_cは

$T_c=-\frac{1}{29}C_0$を考えていく。

(エ) 連立微分方程式への応用

Runge-Kuttaの方法や，Runge-Kutta-Gillの方法は，n個の未知関数$y_1, y_2 \cdots\cdots y_n$をきめる連立一階常微分方程式$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, y_2, y_3 \cdots\cdots y_n)$ $(i=1, 2 \cdots\cdots n)$の場合は$y_1, y_2 \cdots\cdots y_n$をベクトルとして取り扱うことによって，一元の時と同じように行なえる，また高階常微分方程式$\frac{d^ny}{dx^n}=f(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}})$の場合には，$y_1=y$, $y_2=\frac{dy_1}{dx}=\frac{dy}{dx}$, $y_n=\frac{dy_{n-1}}{dx}=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$のようにおりて階数をさげ，$y_1 \cdots\cdots y_n$に関する連立方程式として上の方法を適用すればよい．

なお，偏微分方程式の一般的な数値解法というものはなく，特定の問題に対して手法が論ぜられている。二階の線型偏微分方程式においては，放物型偏微分方程式，双曲型偏微分方程式の場合において考えられ，楕円型偏微分方程式の場合逐次加速緩和法とよばれる数値計算をおこなうのである。

(ｆ) 数値微分について

数値微分においては，微分係数$f'(x_1)$を近似的に求めるのに平均変化率を用いて近似的に等しいとみていく考え方もあり，さらに，曲線上の$x=x_1$の近傍におけるx_1-h, x_1, x_1+hに対する曲線上の三点を通る放物線をLagrangeの補間多項式によって求め，さきの平均変化率の考え方を用いて近似させる。

すなわち，一般に関数$y=f(x)$上の点$A(x_0, y_0)$における微分係数$f'(x_0)$を数値微分によって求めるには，点Aを中央におくようにして微小値hを幅とする等間隔なn個のx座標に

Akita University

対するyの値を求め、そのn個の点を通る多項式$P_n(x)$を、Lagrangeの補間多項式で表わし、その多項式$P_n(x)$の$x=x_0$における微分係数$P_n'(x_0)$を求め、$f'(x_0) \fallingdotseq P_n'(x_0)$としていく。この考え方は微分における微分係数の理論とは異なる立場をとるが故に数値計算法としてまとめておく方がよい。

(g) 数値積分

数値積分の基本的な考え方は、数値微分の場合と同様に、区間[a, b]の曲線をn等分した(n+1)個の点(x_0, y_0), (x_1, y_1) ……(x_n, y_n)を通る補間多項式$\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{A_i}P_i(x)$を積分し$S=\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{A_i}\int_a^b P_i(x)\,dx$とする。また、台形の公式、あるいは、Simpsonの公式は、いずれもLagrangeの1次, 2次補間多項式を用い、Simpsonの公式は、グラフを放物線におきかえて積分をおこない求めている。

代数学における補間法の基礎概念はどうしても必要となってくる。

(h) 初等関数の多項式近似

初等関数の数値計算をおこなうためには、初等関数を多項式で近似していかなければならない。そこには、Taylarの定理が用いられる。その一つとして$f(x)=e^x$の多項式近似がある。具体的には、その一つとして、たとえば、$e^{2.7}$のように多項式の相当の項数まで計算しないと、$e^{2.7}$の値に収束しないので$x=2.7$と変数変換して$z=0.1$程度の大きさにすればできるように$\frac{2.7}{\log_e 10}=1.1692$の整数部分Iと小数部分Fとにわけ、$e^{2.7}=10^I\cdot e^{F\log_e 10}$, $0<F\log_e 10<3$となる故に、$z=\frac{F\log_e 10}{16}$と変換することによってzの値は0.1以下にすることができる。$\therefore e^{2.7}=10^I\cdot(e^z)^{16}=10^I(1+z+\frac{1}{2}z^2)^{16}$

$x=2.7$に対するzの値は$z=\frac{F\log_e 10}{16}=0.0244$

$\therefore e^{2.7}=10^1\times(1+0.0244+\frac{1}{2}\times0.0244^2)^{16}\fallingdotseq14.83$と求まる。

$\sin x$, $\cos x$ などの多項式近似はすでに知られている。$\log_e x$ の多項式近似について考えてみよう。$\log_e(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\cdots$ は x の値が十分に小さいときはある項目以下は殆んど無視できる。

$\log_e A$ の値を多項式近似によって求める方法を考えてみよう。$A = M \times 10^P$, $0.1 \leqq M < 1$ と変換することによって $\log_e A = \log_e M + P\log_e 10 \fallingdotseq \log_e M + \frac{P}{0.4330}$ したがって $\log_e M$ の求が求まれば $\log_e A$ の値を求めることができよう。M の値を $y = \frac{M-1}{M+1}$ なる変換をおこなうことにより $M = \frac{1+y}{1-y}$ とし $\log_e M = \log_e(1+y) - \log_e(1-y) \fallingdotseq 2(y + \frac{1}{3}y^3)$ $-0.82 \leqq y < 0$ なる値をとり $\log_e A \fallingdotseq 2(y + \frac{1}{3}y^3) + \frac{P}{0.4330}$ となる。これを用いて $\log_e x$ の多項式近似をおこなうことができよう。

さらに $\sqrt{a}$ の計算として $y = x$, $y = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ の交点の x 座標として求めようという方法もある。また $\sqrt{a}$ の近傍の値 x_0 を任意に選び，x_0 と $y_0 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0})$ は $y_0 = x_1$ と考えると $\frac{1}{2}(x_0 + \frac{a}{x_0}) = x_1$ は x_0 にくらべて，x_1 の方が $\sqrt{a}$ に近い値になる。さらに x_1 に対して $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1}) = x_2$ とすることによって x_2 は x_1 よりさらに $\sqrt{a}$ に近い値をとることがわかり同様の操作を繰り返えしていくと，求められた x_n の値は n の値が大きくなるほど $\sqrt{a}$ の値に次第に近づくことがいえよう。

以上はいくつかの例であるが，初等関数の多項式近似をおこなうことも意味があると思う。

(I) 線型計画法

線型計画法は，オペレーションズ・リサーチや経営工学の分野で取り扱われている。数学的には三つの線型不等式を満足する non-negative の数，$x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ でこれらの変数に関する一次関数の値を最小または最大とするものをみいだすということである。線型計画法のうちで，もっとも有効

Akita University

な解法はシンプレックス法である。シンプレックス法は不定連立方程式の標準型への変換を用いる。これは不定連立方程式を連立方程式のときと同じように表の形式で書き、逐次基本行演算を施し適当な変数の組を基底変数(表のうちの単位行列に対応する変数)として標準形で表わしていく。

線型計画問題では、一般には線型不等式の系によって制約条件が与えられ、非負の解に対する線型関数の最大と最小を問題とする。

以上が応用数学において数値計算法として取り扱いたい内容であるが、これらとは別に、モンテカロル法とシミュレーションがあるので少し考察したい。

モンテカロル法は問題解析上の手段として、一種のサンプリング法である。多数回のランダム抽出の操作あるいはランダム実験を繰り返し、その結果の統計的推論であり、求める解を近似的に得ようとするものである。その方法は、与えられた問題にあった十分多数のランダムサンプルを集め、その結果を中心極限定理を用いて信頼度を推定することにある。そして電子計算機によって多数の乱数を発生させながら、短時間に多くのサンプルを得ることができるようになった。モンテカロル法は確率的因子を含んだ問題において、その現象をそれによって得た多数回のランダム資料をもとにして、統計的に検討を加えるシミュレーション手法としての応用法である。

また非確率的問題においても適当な確率モデルによって表わし、反復計算によって近似解をうる方法があり、解析的に困難な問題を実際に解いている。また非確率的な問題に対する応用例としてπの計算、定積分の計算、Fredholm型の積分方程式の解法、Laplace方程式の境界値問題などがある。

Akita University

また，複雑な現象を定量化し，解析を進めるのでありその方法は現象の定量化から理論式をたて，模擬実験によって，理論モデルを組みたて，論理式におきかえて，電子計算機によって論理的にシミュレーションをおこなう。このさいシミュレーションにおいては，必要な数学の論理性を考察するのであるが，何の為に，何を目的として，問題を解くのか，何のためにシミュレーションを実行するのかを明らかにしなければならないだろう．また収集されたデータがシステムの解析や，管理総合のために本質的なものかどうか，数学的モデルをつくるときや，シミュレーション実行の際にたてる仮説との整合性や適合性を考えなければならない。シミュレーションそのものを取り扱うことは困難としても，これらの基本的な考え方を形成することが必要であると思う。

もちろん，これらのほかに，ダイナミック・プログラミング待合せ理論，ゲーム理論，スケジュリングなどいくつかの問題があるが，高専において取り扱うことは困難と思われる。

応用数学は，統計確率，フーリエ解析，ラプラス変換などが加わり，3年との関連でベクトル解析が考えられるようになるかもしれない。

4 むすび

これまで高専における数学の教授内容の問題点の論究と教授内容の改善を情報処理教育との関連性をきわめながら考究してきた。情報処理教育において必要な数学内容ならびに数学的手法，ならびにそれらに関連している数学理論との関連的立場にたって考えていかなければならない。また数値計算法においては，電子計算機にかけることができるようにプロ

Akita University

グラミングできることであり，解を求める過程において，同じような操作，思考操作を繰り返しおこなうことであり，数学的な考え方や電子計算機にかけるために必要な数学的手法として統一的にまとめあげることが必要と思う。

また，高専における数学の目的性にたって，数学理論の展開，数学的考え方という立場から，教育内容について論究を加えてみた。基礎数学として考えなければならない内容，2年，3年において扱う数学内容についても一応私案として論究してみた。

なお，これらの教育内容は実証的研究によって修正されなければならないと思う。

文　献

1) 三塚正臣：　数学的論理の概念形成について
　　1971　日本数学教育学会誌　第53巻 第1号

2) 前掲 1)

3) 前掲 1)

4) 三塚正臣：　微分積分学の早期導入の教授理論と実証的研究について
　　1970　東北数学教育学会年報　第1号

5) 川畑正大著：　電子計算機のための数学

6) 田中明雄著：　応用数学――数値計算法

7) 国井利泰他著：　FORTRAN 数値計算とプログラミング　共立出版

8) J.G.Kemeny A. Schleifer. J.L. Snell. GL Thompson: Finite Mathematics with Business Applications prentices-Hall Inc 1962

9) 小林竜一著：　OR概論　共立出版