

「数学的フィルム」についての一考察

植田 敦三 (山形大学)

1. はじめに

筆者は、以前から活動性に数学の起源を見出す活動主義的数学教育に関心を持ってきた。¹⁾ この立場の数学教育は、今日では市民権を得ていると思う。しかし、そこには学習指導方法上の問題が依然として残されたままである。平林によると、その問題とは、いかにして活動性を触発させるか、そしていかにしてその活動の成果を表現させるか、ということである。²⁾ また、数学的活動の心的過程を研究しているZ. P. Dienesも「環境をつくっている外見上の無秩序から、なんらかの秩序のようなものをいかにして引き出すことができるか」³⁾ という問題が主要なテーマであると述べている。この問題意識も平林のそれと軌を一にするものである。

筆者はこの問題へのアプローチとして「数学的フィルム」の利用を考えている。「数学的フィルム」は1940年にスイスのJ. L. Nicoletによってはじめて用いられたが、それに言及した数学教育者は筆者の知る限りにおいてはC. Gattegnoが最初である。C. Gattegnoは論文「The idea of dynamic patterns」⁴⁾において、幾何教育の立場から、数学を教えるときの問題は子供の自発的な思考と数学的厳密性、抽象性とを関連づけることの難しさに関わっているとし、「どのようにすれば子供の経験を数学的にできるか」という問題に対する解決策を「数学的フィルム」に求めている。しかし、その後はC. Gattegnoを除いてはT. F. Fletcherの考察が注目される程度で、あまり積極的には研究されていない。ところが、今日ではパーソナルコンピュータが容易に利用できるようになり、「数学的フィルム」が身近なものとなってきた。⁵⁾ この傾向は「数学的フィルム」の意味についての考察の必要性を示している。

本小論では、活動主義的数学教育論を展開しているC. Gattegnoの所論を拠り所として、「数学的フィルム」の教育的意義について反省することが目的である。

2. C. Gattegno の数学教育論

C. Gattegnoの教育学は「situationの教育学」として知られており、彼の主張は論文集「For the teaching of mathematics」⁶⁾から、その概要を知ることができる。

C. Gattegnoは数学を、「数学に種々の形式を与えている関係への連続的な意識化 (awareness) の行為」⁷⁾として捉えている。C. Gattegnoのこの観点は彼独自のものというわけではない。数学の発展過程を「現象」、「組織化の手段」、「手段への意識化」という視点から歴史発生的に分析すれば得られるものであり⁸⁾、数学の発展において果たした我々人間の心的行為に着目して数学を捉えているC. Gattegnoの数学観を端的に表明したものである。

C. Gattegnoの教育論はアームチェアな理論ではなく、常に実践的裏付けのもとに形成されている。彼は自分の実践的研究をかなり成功したと述懐しながら、自分の教授法は「数学をすること (to do mathematics) は、我々が関係それ自身 (relationship per se) といっているものに興味を感じるという特殊な心的態度をとることである」⁹⁾という考えに基づいていたと述べていることから、C. Gat

tegno の教育論が上述した数学観に立って展開されていたことがわかる。

ここで注意しなければならないことは、C. Gattegno が数学を関係の意識化という心的行為として捉え、それを根拠として教育実践に移ったとき、彼は「situation」という教育的概念を明確に意識せざるを得なかったということである。¹⁰⁾ 「心的行為はsituationという用語なくしては定義されない」¹¹⁾ という事実への自己反省が教育研究の出発点であった。「現象」と「組織化の手段」を「situation」と「関係」と読み替えれば、活動性としての数学はsituationという用語なくしては記述できない、ということでは理解できる。

更に、C. Gattegno のsituationの概念を理解するためには、数学教育への社会的要請についての彼の反省を忘れてはならない。伝統的な教授過程として原子論的アプローチによるものがある。学習者に教材の一部分を与えて、次にそれに応じた練習問題を課し、又別の部分を与えるという教授法である。C. Gattegno は、このようなアプローチでは今日の複雑な社会に対処できる人間を育成できないと主張している。¹²⁾ 「life situationは多くの要因を含んでいるが、我々はそれらすべてを相手にはせず、付帯的と思えるものを取り去ってsituationを変える」¹³⁾ — C. Gattegnoはこのことをsituationとの対話(dialogue)という一ことによって種々のレベルで自発的に関係を設定して対処している。しかも、一つの関係に着目するだけで終わってしまうのではなく、同一のsituationに対しても「連続的に自分の視点を変化させており、我々はそうせざるを得ない存在である」¹⁴⁾ という。C. Gattegnoはこのような態度に活動性としての数学の本質に通ずるものを見出した。すなわち、数学化(mathematization)とは、まさにsituationに関係を孤立させる活動であるという認識があった。¹⁵⁾ 数学化することは、我々が直面しているsituationに設定した関係と関わりのないものすべてを無視することである、というのである。

このようにC. Gattegnoは社会を一つのsituationと捉え、そこでの生活はsituationとの対話であると考えた。教育に対する社会的要請は彼にとってはsituationと対話できる人間の育成である。更に、この対話は活動性としての数学の本質的側面である数学化という心的行為に通ずるという認識に立って、C. Gattegnoは数学をsituationと対話する態度を育成する教科として位置づけている。ただし、彼が問題にするsituationは生徒の心的行為を数学へ向かわせるかなり人工的なsituationであって、社会のようなsituationではない。これを区別するためにC. Gattegnoは「数学的situation」¹⁶⁾ という言葉を用いている。

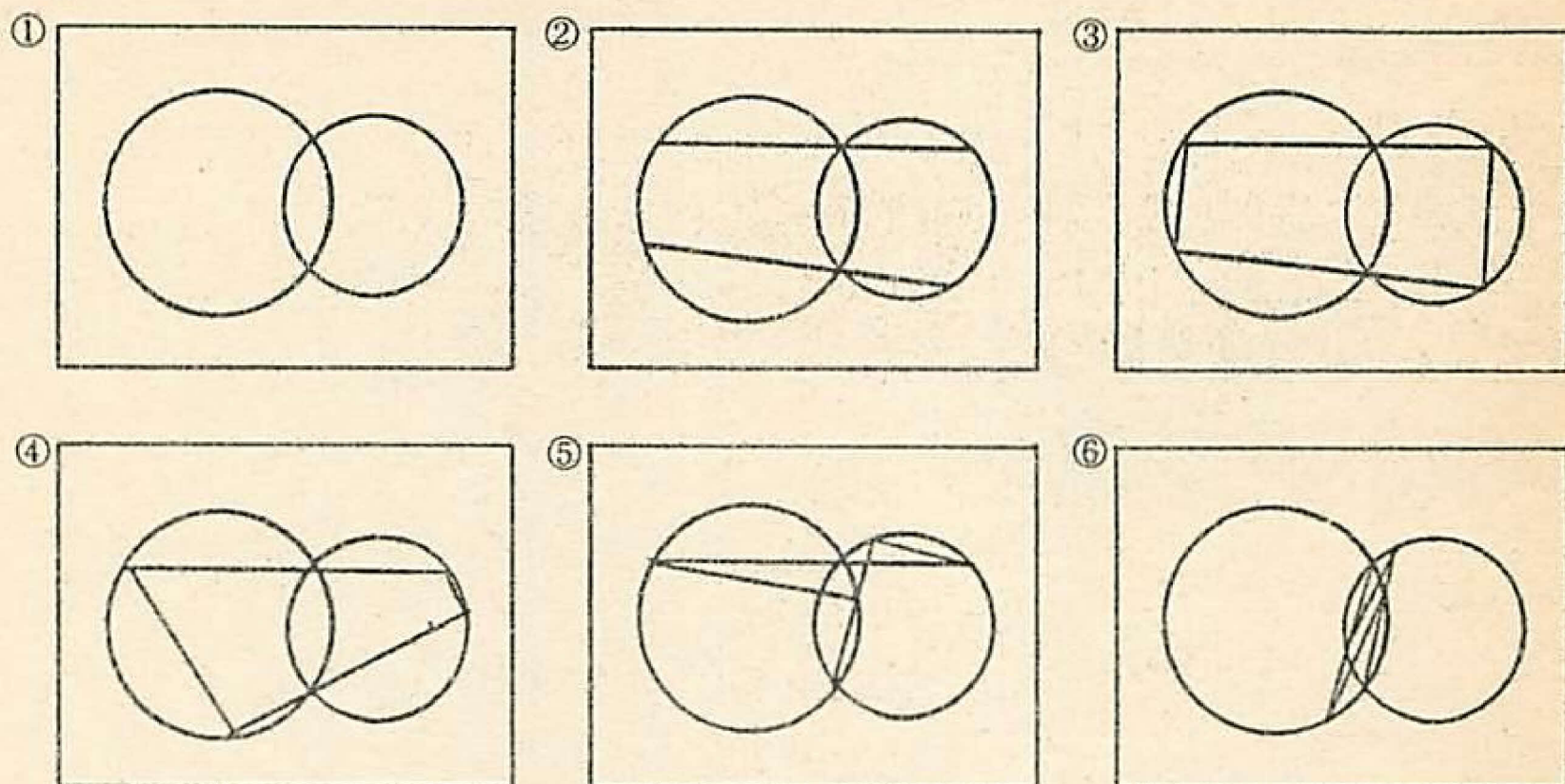
態度形成は学習者自身の自己反省を前提とするため、C. Gattegnoにとって数学を教えることは、数学的situationに巻き込まれている学習者に自分自身の思考の特徴に気付かせることであり、関係を創造する精神の自由性に気付かせることである。¹⁷⁾ そうすれば教師がすべきことは自ずから明らかになる。学習者が対話することにより関係を設定しうるような、それも学習者のmultivalentな思考に応ずる可能性を持った数学的situationを構成することである。数学的situationを構成し、そこに学習者を巻き込めば、学習者は連続的に自分の視点を変化させて、自分を没頭させるような多くの考えをそこから導き出すことができる。これがC. Gattegnoの教育学の主張である。¹⁸⁾

3. 「数学的フィルム」の例

本節では2つの「数学的フィルム」の例を示すことにする。1つは中学校の論証幾何からのものであ

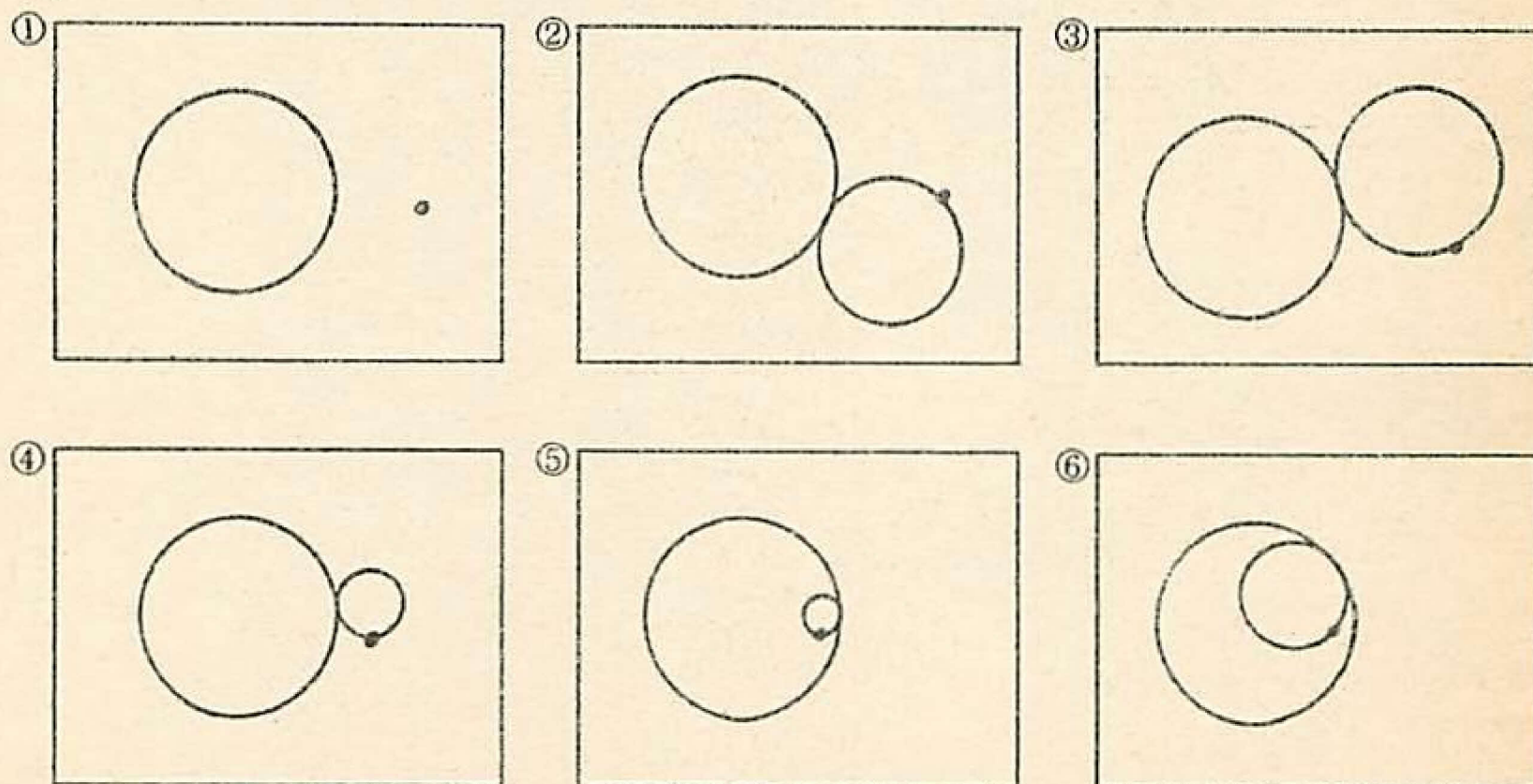
り、他の1つは現行の学習指導要領では高等学校の代数・幾何に含まれている2次曲線の単元を念頭においたものである。

1)



まず画面に①のような2点で交わる2つの円が表示される。次に②、③のように交点を通る線分、そしてそれらの線分の端を結ぶ線分が表示され、できた四角形が一定の条件の下で変化する。次に交点を通る2本の線分のうちの1つが固定されたまま他の1本が動き出す。動いた線分的一端が交点と一致すると、後は他の一端だけが動く(⑤)。今まで固定されていた線分が動きだす。

2)



画面に位置、大きさを変えながら動く円がしばらく表示された後に停止して、点があられる(①)。次に点を通り円に接する円があられ、この条件を満たしながら移動する。(②、③)。その後で点のは

じめに表示された円の内部に向かって動き(④)、円の内部で止まる(⑤)。そして再び先の条件を満たしながら円が移動する(⑥)。

前節では、C. Gattegno の教育学の主要概念に「数学的situation」があることを指摘したが、その概念自身についての反省はしなかった。「数学的situation」の概念については、彼自身も積極的に説明していない。しかし、「数学的situation」の特性として、少なくとも「多様性(multivalence)」、「意識性(awareness)」をあげることができる。¹⁹⁾ 中等教育段階までの幾何学的事実はうまく組織化された一連のパターンの中の不変性として学習者の知覚的経験を通して把握し、自分の言葉で表現できる範囲内にある。しかも幾何学的事実によっては多様なものをその中に埋め込むことができる。このような観点から上に示した2つの「数学的フィルム」の例は幾何から題材をとっている。多様性という観点からすれば、1)の例は2)に比べてunivalentなものかもしれない。しかし、作成した「数学的フィルム」がC. Gattegno の言うsituationになるかどうかはその利用法に関わっていることを心に留めておかねばならない。

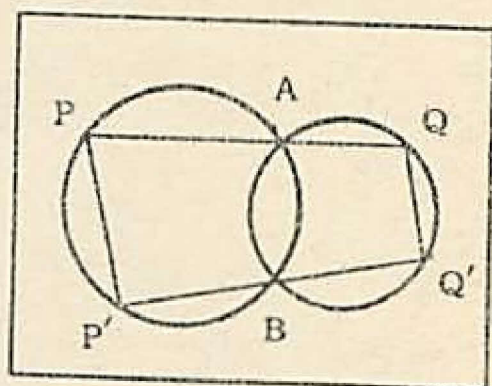
4. 「数学的フィルム」の教育的意義

1) 論証幾何との関わりにおいて

論証幾何学習の困難性についてはいろんなところで指摘されている。困難点の一つとして、証明過程において全称命題をその問題場面にあてはめることの難しさをあげることができる。²⁰⁾ 全称命題を言語的に覚えていても、その問題場面に適用できなければ何にもならない。論証幾何がうまく学習されるかどうかは、全称命題がどのように学習され、どのように保持されているかということに大きく起因する。論証幾何の問題は文章で与えられても、最終的には図を用いて考察されるため、全称命題は言語的に保持されていると共に、イメージとしても保持されていなければならない。前節1)の「数学的フィルム」によって示される不変的關係は、通常次のような証明問題として提示されている。

二つの円 O, O' が2点 A, B で交わっているとき、 A を通る直線が両円と交わる点をそれぞれ P, Q とし、 B を通る直線が両円と交わる点をそれぞれ P', Q' とすると、 $PP' \parallel QQ'$ であることを証明せよ。

このように提示された問題では、円に内接する四角形に関する命題の図的イメージに示唆された補助線を引くことができるかどうかポイントである。イメージとは何か、ということ自体大きな問題であり、本



小論では触れられないが、²¹⁾ イメージ形成において「数学的フィルム」はかなり有効であると思われる。

数学研究において不変的關係が大きな位置を占めていたことについては、今更いうまでもない。前節1)の例で示したような動的に変化する事象の中に不変的關係を見出すことは意味のあることであり、学習者にとっても静的な一つの図で示された場面によって何らかの性質が示され、それについて証明されるより、一群の図のパターンの中から不変的性質を意識して証明するほうがずっと興味をひくことであろう。²²⁾ 上で述べたイメージ形成の上からも大切なことである。

ところで、論証幾何との関わりで「数学的フィルム」の教育的意義について述べるとき、忘れてならないのは図的表記の問題である。教科書等に描かれている図は一群の図の代表として理解されるべきである

が、学習者には一つの図として解釈されている場合が多い。我々が定理として扱っている関係は図で表わされている対象すべてに成り立つものであるが、その一般性の意識化は学習者にまかされているため、特殊な対象の性質が扱われているという印象を学習者に与えてしまうことになる。上のように問題が提示されたとき、問題の説明として付けられている図で示されている場合だけを証明して、それで証明が終ったと考える生徒が多いと言われている。そのような生徒には変数としての PQ 、 $P'Q'$ 及びその変域が意識されていないのであろう。「数学的フィルム」には、図的表記の変数表示不可能性に対比される教育的意義がある。

代数では変数、定数をvieta以来 x, y, z そして a, b, c のようにアルファベットの後半、前半として区別して用いられているが、幾何に関してはそれほど明確ではなく、与えられた問題の文脈からそれを捉えており、問題の理解には変数一定数、独立一従属という関係の理解が必要である、と平林は指摘している。²³⁾ その点「数学的フィルム」は動く線分、円、動かない線分、円等によって変数一定数の関係を示し、自由に動いているもの、それに従って動いているものによって独立一従属の関係を示している。また、変数の変域はそれが動く範囲で示している。

このように考えてくると、「数学的フィルム」の教育的意義は図的表記の限界との対比によって分析できそうである。

2) 「問題づくり」の授業との関わりにおいて

「問題づくり」の授業とは、「児童・生徒に与えられた一つの問題（この問題を原問題または原題とよぶことにする）から出発して、その問題の構成要素となっている部分を、類似なものや、より一般的なもの等に置きかえたり、その問題の逆を考えたりすることを通して、新しい問題を作り、自ら解決しようとするような主体的な学習活動」²⁴⁾ を中心にした指導のことである。

従来の「問題づくり」の授業を図式的に捉えてみると、まず提示された「原問題」を解決した後に「問題づくり」という行為が位置づけられる。それに対して、「数学的フィルム」を「原問題」として位置づけると、生徒がしなければならないことは、問題を解決するという行為にかわって、フィルムによって示された現象と対話することであり、そこに主体的に関係を意識することであり、意識した関係をより明確にし、数学的考察にたえうるものとして表現し洗練していくことである。

このような授業は1節で述べたC. Gattegno の教育学の目指すところである。本来、「situation」はこのような指導方法も含んだ概念であるとすれば、「問題づくり」の授業で期待できることは、²⁵⁾ そのまま「数学的フィルム」の教育的意義として位置づけることができる。

筆者が担当している「数学科教育法（理学部数学科3年対象）」において実験的に試みた模擬授業の結果から、前節2) で示したような「数学的フィルム」は「問題づくり」の授業における「原問題」として利用できることにある程度の手がかりを得た。

数学的situation との対話にある程度慣れ親しんだ生徒は、先に示した2次曲線のフィルムからどのような問題を意識するだろうか。便宜上、フィルムの最初にてでくる定円をC、定点をP、動円をKとする

- ① 円Kの中心の軌跡はどのようになるか。
- ② P。がCの円周上にくるとKの中心の軌跡はどうなるか。
- ③ P。がCの内部にくるとKの中心の軌跡はどうなるか。

- ④ 円Cが直線だったらどうなるか。
- ⑤ 円Cが点だったらどうなるか。
- ⑥ 点P。が円だったらどうなるか。

:

:

④、⑤の問題は、フィルムでは定数であった定円Cを変数とみなすことによって構成される問題である。変数一定数、独立一従属の関係はそれを見る者の主観にかなり依存している。そのため両者の読み替えはかなり自由になる。種々の問題が構成可能な理由はこの「読み」の自由性にあるといえる。しかし、「数学的フィルム」も一種の図的表記であるから、そこには自ずから図的表記の限界としての「思考の方向づけの問題」がある。²⁶⁾ところが、「問題づくり」の授業の文脈から考えるとこの問題を単純に欠点として考える必要はない。²⁷⁾ situation から関係を汲みつくすことによって situation を構造化することが数学的活動であるとすれば、この欠点は利点でもある。

筆者には、C. Gattegno の教育学の本質点概念「situation」, 「awareness」は「読み」の自由性及びその方向づけという観点から捉えることによって理解できるように思える。

5. おわりに

筆者は、「数学的フィルム」を「問題づくり」の授業の文脈で利用することを考えている。本小論では、そのための準備的作業として活動主義的教育理念をC. Gattegno に求め、その立場から「数学的フィルム」の教育的意義を図的表記の限界の問題との対比において若干の反省を試みた。しかし、本稿での考察は断片的であり、不十分である。特に、「読み」の問題は「数学的フィルム」についての考察において本質的であると思う。今後の課題にしたい。

最後に、4節で示したような「数学的フィルム」の作成法について触れておく。「数学的フィルム」はパーソナルコンピュータのグラフィック機能を利用して作成している。このようなパーソナルコンピュータの利用は佐伯の分類によれば第一水準での利用である。²⁸⁾ 今日、第一水準の利用といえは、ある数学的概念を提示する目的で用いられている場合が多いと思うが、オープンエンドな situation を提供するものとしても活用できよう。

引用・参考文献および注

- 1) 植田敦三、活動主義的数学教育の基礎的研究、修士論文(1978)。
- 2) 平林一栄、数学的教育の活動主義的展開に関する研究、学位論文審査資料。
- 3) Z. P. Dienes, 滝沢武久訳、構造的思考、ディーンズ選集6, 新数社(1976), 17項。
- 4) C. Gattegno, The idea of dynamic patterns in geometry, Mathematical Gazette, (1954), Vol. 38, pp. 207-209.

- 5) 我が国でも、数学教育における8 mm フィルムの利用に関する研究はいくつかあるが、利用できる既製のフィルムの不足がこの方面での研究の発展を妨げていると指摘している。鳥居一雄、幾何学教材用フィルム(8 mm)製作の記、日本数学教育会誌、数学教育、(1959)、Vol. XL I, 80-82項、及び木山富寿他、数学教育における8 mm 映画、日本数学教育会誌、数学教育、(1962)、Vol. XL IV, 66-69項を参照。
- 6) C. Gattegno, For the Teaching of Mathematics, Educational Exploress Company, (1963)。
- 7) 上掲書6), Vol. 1, P. 68。
- 8) H. Freudenthal, Mathematics as an Educational Task, (1973) 及び H. Freudenthal, Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, (1983), D. Reidel Publishing Company を参照。
- 9) 上掲書6), Vol. 1, P. 55。
- 10) 上掲書6), Vol. 1 の序文を参照。
- 11) 上掲書6), Vol. 1, P. 52。
- 12) 上掲書6), Vol. 1, P. 84。
- 13) 上掲書6), Vol. 1, P. 81。
- 14) 上掲書6), Vol. 1, P. 80。
- 15) 上掲書6), Vol. 1, P. 81。
- 16) 上掲書6), Vol. 1, P. 54。
- 17) 上掲書6), Vol. 1, P. 55。
- 18) 上掲書6), Vol. 1, PP. 83-84。
- 19) C. Gattegno にとっては、「数学をすること」は関係それ自身に興味をもつという心的態度をとるということであり、situation が数学をそこから引き出すためのものであるならば、situation はある関係に着目することができ、その関係が更に新しい situation を創造するのに利用されるものでなければならぬ。situation は関係の孤立化、それによる新しい situation の構成を許す多様性をもっていなければならない。また、situation の教育学は学習の主体を生徒におくため、関係それ自身は生徒によって意識化されねばならない。生徒によって意識されるものは相対的なものであるから、situation は生徒の興味、知的レベルに応じてそれなりの関係の意識化を許すものでなければならない。
- 20) 平林一栄、論証幾何学習の構造、日本数学教育会誌、数学教育、(1958)、Vol. XXXX, 74-77項。
- 21) 植田敦三、数学的概念の認識過程についての基礎研究(VI)——統・論証理解への道——、広島大学教育学部附属共同研究体制・研究紀要、(1983)、第12号、23-29項。
C. Gattegno, 上掲書6), Vol. 2, PP. 19-32。
- 22) 川口廷、小、中学校における図形の指導内容考察についての一つの拠点、日本数学教育会誌、数学教育、(1958)、Vol. XXXX, 69-74項。
- 23) 平林一栄、数学教育における表記の問題、4、論理語、数学教育学論究、(1964)、Vol. VII,

50項。

24) 竹内芳男, 沢田利夫編, 問題から問題へ, 東洋館出版社, (1984), 25項。

25) 上掲書24), 21-23項。

「問題づくり」の授業に期待できることとして次のことがあげられている。

i) すべての児童・生徒が積極的に授業に参加する。

ii) 自分の力に応じてだれでもが精いっぱい学習に励む。

iii) 算数・数学に興味を感じる。

iv) 発見の喜びが味わえる。

v) いつでも「問題を発展させる」態度がつけられる。

vi) 個別学習と集団学習の調和した授業が展開できる。

vii) 多様な観点からの評価を可能にしてくれる。

26) 平林一栄, 片山一法, 図的表記の言語性, 数学教育学論究, (1969), Vol. XVII, 12項。

27) 上掲書24), 199-202項を参照。

28) 佐伯卓也, 算数数学におけるパソコン化授業, 東北数学教育学会年報, (1983), 第14号, 25-35項。

A Note On "Mathematical Film"

Atsumi Ueda

The Faculty of Education,

Yamagata University

The author has been exploring the ways to utilize "mathematical Film" in the context of teaching of developmental treatment of mathematical problems. In this paper, he reflects on and clarifies the basic idea of the activism in mathematics education proposed by C. Gattegno. Secondary he discusses the educational significance of "Mathematical Film" from the view point of C. Gattegno, pointing out its merits in comparison with the geometrical diagram.