東北数学教育学会年報
1987. 3. 31　第18号

ベクトルのベクトル巾と行列の行列巾

本田嘉博（有朋学園）

ベクトルとベクトルの内積や行列と行列の積を拡張し，表題のことを定義して，その性質を調べて見たい。

以下実数の範囲内で論ずることとし，巾の底は正，対数の底は1でない正数なら任意でよい，また素数は正とする。

スペース節約のため必要に応じBASICにならい，a^b を a^b で表す。

I.（1）自然数Nは素因数分解されて

$$N=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_\ell^{n_\ell} \quad\text{------------}\quad ①$$

（$p_1,\cdots,p_\ell$ は相異なる素数
$n_1,\cdots,n_\ell$ は1以上の整数）.

またNの約数Mは全般に

$$M=p_1^{m_1}\cdots p_\ell^{m_\ell} \quad\text{------------}\quad ②$$

（m_i は0から n_i までの整数）（$i=1,2,\cdots,\ell$）.

したがってNの約数の個数は

$$n(N)=(n_1+1)(n_2+1)\cdots(n_\ell+1) \quad\text{------}\quad ③$$

この証明はふつう「Nの約数は $p_i^{n_i}$ の約数の積であり，$p_i^{n_i}$ の約数は $p_i^0, p_i^1, \cdots, p_i^{n_i}$ の (n_i+1) こだから③となる」とされる。

（2）これにたいし見方をかえて次のようにも考えられる：

①から $\log N=\log(p_1^{n_1}\cdots p_\ell^{n_\ell})=\sum_{i=1}^{\ell} n_i\log p_i$ 　④

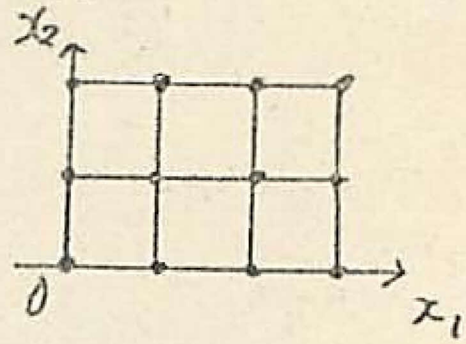
又③から、$\log M=\sum_{i=1}^{l} m_i \log p_i$ - - - - - - - - - ⑤

各p_iを一定とするとMは$(m_1, \cdots, m_l)$に対応する。
即ちMは基底ベクトルの長さがそれぞれ$\log p_i$ $(1\leqq i\leqq l)$の張るl次元ユークリッド空間の「箱型」の領域

$$D:\ 0\leqq x_i\leqq n_i\ \ (1\leqq i\leqq l) \text{ - - - - - - - - ⑥}$$

に含まれる格子点に対応し、したがって容易に③が得られる。
たとえば$N=2^3 5^2$の約数$M=2^{m_1}5^{m_2}$の個数は

$\log M=m_1\log 2+m_2\log 5$ で
Mに対応する(m_1, m_2)が右図の
・印の格子点に対応することから
$n(2^3 5^2)=(3+1)\cdot(2+1)=12$
となる。



(3) 上の考えを次のように拡張しよう：先ず例を2次元の場合にとる。

a, bは1でない正数，$(a\neq b)$，x, yは実数として
$u=a^x b^y$ のとき $\log u = x\log a+y\log b$ -- ⑦
これを2つのベクトル$(\log a, \log b)$，(x, y)の内積と見る。

<u>定義 1</u>　$a>0$，$b>0$ のとき

$$\log(a.b)=(\log a, \log b)$$

とする。

故に⑦から $\log(a^x b^y)=(\log a)\cdot x+(\log b)\cdot y$

$$=(\log a, \log b)\cdot(x, y)=(\log(a, b))\cdot(x, y) \cdots ⑧$$

<u>定義 2</u>　$(a, b)^{(x, y)}=a^x\cdot b^y$ で定義する。

これがベクトルのベクトル中の定義であるが，内積 $(a,b)\cdot(x,y)$ $=a\cdot x+b\cdot y$ において $+\to\cdot$，$\cdot\to$ へに一段格上げ(!)したものにあたる．

(4) 一般の次元に話を戻すことにしよう。

2, 3, 5, ‥‥とすべての素数を小さい順にとったものを改めて p_1, p_2, p_3, ‥‥とするとき，すべての自然数 N は

$$N=p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots=\prod_{i=1}^{\infty}p_i^{n_i} \quad \text{--------} \quad (9)$$

各 n_i は 0 以上の整数で，$n_i\neq 0$ は有限個．従って無限乗積ではない．

$$\therefore \log N=\sum_{i=1}^{\infty} n_i \log p_i \text{ も有限級数} \quad \text{---} \quad (10)$$

$\log p_1$, $\log p_2$, ‥‥の長さの基底ベクトルをもつ空間（全素数の対数空間ともいうべきもの）を Ω とすると

定理1　上の N は Ω 内の有限次元の格子点に対応する．（各座標とも正）

定義3　この格子点を表すベクトルを $\overrightarrow{\log N}$ で表す．

定理2　自然数 N_1, N_2 について明らかに

$$\overrightarrow{\log(N_1N_2)}=\overrightarrow{\log N_1}+\overrightarrow{\log N_2}$$

$$\overrightarrow{\log(N_1/N_2)}=\overrightarrow{\log N_1}-\overrightarrow{\log N_2}$$

実数 c に対し $\overrightarrow{\log N^c}=c\,\overrightarrow{\log N}$

(5) つぎにすべての正の有理数 r は互に素な自然数の比で表される．

$$r=N_1/N_2 \quad \therefore \log r=\log N_1-\log N_2$$

定義4　$\overrightarrow{\log r}=\overrightarrow{\log N_1}-\overrightarrow{\log N_2}$ で定義する．

このとき

定理 3 すべての正の有理数はΩ内の格子点に対応する.

尚. 定理1, 定理3でΩといっても, (有限次元の)それに含まれるすべての有限次元の空間の和集合の空間の意味である.

定理 4 正の有理数 r_1, r_2 についても明らかに

$$\overrightarrow{\log(r_1 r_2)} = \overrightarrow{\log r_1} + \overrightarrow{\log r_2}$$

$$\overrightarrow{\log(r_1/r_2)} = \overrightarrow{\log r_1} - \overrightarrow{\log r_2}$$

実数 c に対し $\overrightarrow{\log r^c} = c\,\overrightarrow{\log r}$

II. (1) 正数列 $\{a_i\}$ と実数列 $\{b_i\}$ $(1 \leqq i \leqq l)$ に対し

$$\log \prod_{i=1}^{l} a_i^{b_i} = \sum_{i=1}^{l} b_i \log a_i = \sum_{i=1}^{l} (\log a_i)\cdot b_i \cdots\cdots (11)$$

で $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_l)$, $\vec{b} = (b_1, \cdots, b_l)$

$\overrightarrow{\log a} = (\log a_1, \cdots, \log a_l)$ とすると

$$\log \prod_{i=1}^{l} a_i^{b_i} = \overrightarrow{\log a}\cdot\vec{b} \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

定義 5 $\vec{a}\wedge\vec{b} = (a_1, \cdots, a_l)\wedge(b_1, \cdots, b_l)$

$= a_1^{b_1}\cdots\cdots a_l^{b_l}$

$= (a_1\wedge b_1)\cdots\cdots(a_l\wedge b_l)$ で定義する.

(12) から $\log(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \overrightarrow{\log a}\cdot\vec{b} \cdots\cdots\cdots (13)$

の公式が得られる.

(2) 行列の行列巾を一般に定義する前に, また2×2行列に例をとって話を進めよう.

以下小文字はすべて正数として

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$ とする.

<u>定義 6</u>

$$A \wedge B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\wedge b_{11}\cdot a_{12}\wedge b_{21} & a_{11}\wedge b_{12}\cdot a_{12}\wedge b_{22} \\ a_{21}\wedge b_{11}\cdot a_{22}\wedge b_{21} & a_{21}\wedge b_{12}\cdot a_{22}\wedge b_{22} \end{pmatrix}$$

で定義する. 演算の順序で $\wedge$ は $\cdot$ より先である.

<u>定理 5</u> $\log(A\wedge B) = (\log A)\cdot B$

(証明) 左辺 $= \log\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$

$$= \log\begin{pmatrix} a_{11}\wedge b_{11}\cdot a_{12}\wedge b_{21} & a_{11}\wedge b_{12}\cdot a_{12}\wedge b_{22} \\ a_{21}\wedge b_{11}\cdot a_{22}\wedge b_{21} & a_{21}\wedge b_{12}\cdot a_{22}\wedge b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \log(a_{11}\wedge b_{11}\cdot a_{12}\wedge b_{21}) & \log(a_{11}\wedge b_{12}\cdot a_{12}\wedge b_{22}) \\ \log(a_{21}\wedge b_{11}\cdot a_{22}\wedge b_{21}) & \log(a_{21}\wedge b_{12}\cdot a_{22}\wedge b_{22}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\log a_{11})b_{11}+(\log a_{12})\cdot b_{21} & (\log a_{11})\cdot b_{12}+(\log a_{12})\cdot b_{22} \\ (\log a_{21})b_{11}+(\log a_{22})\cdot b_{21} & (\log a_{21})\cdot b_{12}+(\log a_{22})\cdot b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \log a_{11} & \log a_{12} \\ \log a_{21} & \log a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\log\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \text{右辺}.$$

定理 6 $(A\wedge B)\wedge C = A\wedge(B\cdot C)$

証明. $\log(\text{左辺}) = \log(A\wedge B)\cdot C$ （定理 5）

$= ((\log A)\cdot B)\cdot C$ （ 〃 ）

$= (\log A)\cdot(B\cdot C)$ （行列の結合法則）

$= \log(A\wedge(B\cdot C))$ （定理 5）

$= \log(\text{右辺})$ ∴ 左辺 = 右辺.

定理 5 と 6 は A, B, C が単なる正数のとき成り立つ.
しかし $\log(A\cdot B) = \log A + \log B$ は成り立たない.

∵ 左辺 $= \log\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$

$= \log\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \log(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & \log(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}) \\ \log(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & \log(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}) \end{pmatrix}$

右辺 $= \log\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \log\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \log a_{11} & \log a_{12} \\ \log a_{21} & \log a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \log b_{11} & \log b_{12} \\ \log b_{21} & \log b_{22} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \log a_{11}+\log b_{11} & \log a_{12}+\log b_{12} \\ \log a_{21}+\log b_{21} & \log a_{22}+\log b_{22} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \log(a_{11}b_{11}) & \log(a_{12}b_{12}) \\ \log(a_{21}b_{21}) & \log(a_{22}b_{22}) \end{pmatrix}$. Q.E.D.

今相に $(A\cdot B)^\wedge C = (A^\wedge C)\cdot(B^\wedge C)$ も成り立たない。

反例. $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$

$$左辺 = \left(\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\right)^\wedge\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}&a_{11}+2a_{12}\\a_{21}+a_{22}&a_{21}+2a_{22}\end{pmatrix}^\wedge\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}&(a_{11}+2a_{12})^3\\a_{21}+a_{22}&(a_{21}+2a_{22})^3\end{pmatrix}$$

$$右辺 = \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}^\wedge\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^\wedge\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}^3\\a_{21}&a_{22}^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&2^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}+a_{12}^3&a_{11}+(2a_{12})^3\\a_{21}+a_{22}^3&a_{21}+(2a_{22})^3\end{pmatrix}$$

よって一般に 左辺≠右辺。

(2) 上のことを一般の場合の行列に拡張しよう。

$l\times m$ 行列 A の i,j 要素が a_{ij} $(1\leqq i\leqq l,\ 1\leqq j\leqq m)$ のとき

$$A_{l,m}=(a_{ij})_{l,m}$$ と略記することにする。

今相に $B_{m,n}=(b_{jk})_{m,n}$ のとき

<u>定義 7</u> $A_{l,m}{}^\wedge B_{m,n}=\left(\prod_{j=1}^{m}(a_{ij}{}^\wedge b_{jk})\right)_{l,n}$ で定義する。

またすべての小文字が正数のとき

$$\log A_{l,m} = \log(a_{ij})_{l,m} = (\log a_{ij})_{l,m}$$ とする.

定理7　$\log(A_{l,m} \wedge B_{m,n}) = (\log A_{l,m})\cdot B_{m,n}$

証明は定理5と同様になされる,

定理8　更に $C_{n,p} = (c_{k,l})_{n,p}$ のとき

$$(A_{l,m} \wedge B_{m,n}) \wedge C_{n,p} = A_{l,m} \wedge (B_{m,n} \wedge C_{n,p})$$

証明はやはり定理6と同様になされる,

後記　以上のことにどんな意味があるか残念ながらわからない。強いて探せばエントロピーとか転移確率行列へ頻度行列のようなものが考えられよう.

あるいは既に論ぜられているかもしれないが，小生なりに1人で遊んだものである。大方のご指導，ご批判を乞いたい。

New Definition of "Vector ^ Vector and Matrix ^ Matrix"

Yoshihiro Honda (Yuuhou Gakuen)

(1) $$(a_1, a_2, \cdots, a_\ell) \,\hat{}\, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_\ell \end{pmatrix} = a_1 \hat{}\, b_1 \cdot a_2 \hat{}\, b_2 \cdot \cdots \cdot a_\ell \hat{}\, b_\ell$$

(2) When each i, j element of lxm matrix $A_{l,m}$ is $a_{i,j}$,

$A_{l,m}$ is expressed $\left(a_{i,j}\right)_{l,m}$

It is the same with $B_{m,n} = \left(b_{j,k}\right)_{m,n}$

Then

$$A_{l,m} \,\hat{}\, B_{m,n} = \left(\prod_{j=1}^{m} a_{i,j} \hat{}\, b_{j,k}\right)_{l,n}$$

New defitions of vector ^ vector and matrix ^ matrix are proposed as above.

Some properties abot these definitions are introduced and discussed.