

パソコン教材としてのふくらまし教材の開発とその授業の実践的研究(4)
—— 円の加法・中学生のベクトル合成の軌跡としてのいろいろな曲線へのアプローチ ——

佐伯卓也・富田正彦・上西創司(岩手大学)

あらまし

ベクトルの合成を極座標を用いて行うとき、ベクトルの端点がある円周上において考える。円周上でその半径、回転角の速さを変える(負の場合もある)と、軌跡はいろいろの図を描く。それをパソコンで実現させ、Ssにキー操作をさせながら、ある法則性を発見させる教材を作成した。さらにそれを用いて授業を実践した結果、極めて成功であった。

キーワード パーソナルコンピュータ、パソコン化教材、パソコン化授業、CAL

0、はしがき

一般のふくらまし教材についてはすでに述べているので略す(佐伯、1985b)。本稿ではVagner(1982)の開発し実践的研究をした「円の和」のパソコン教材を下敷にし、わが国の中学生(ここでは一年生)にも解る形に作り替え、授業実践をした結果について記す。

内容は二つの円のうち、一つの円の半径と回転角を一定にし、もう一つの円のみ、半径と回転角をオプションにして授業を展開した結果である。

1、パソコン化教材(PCM)の作成

「二つの円の合成」なる教材の考え方の基本を示す。図1のように原点Oを中心にし、半径が、それぞれ、 R_1 、 R_2 の二つの円を考える。

点 P_1 は第一の円周上を、点 P_2 は第二の円周上を、単位時間に、それぞれ、角度 α 、 β で動くとする。ベクトル的に

$$\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$$

であるから、点 $P(x, y)$ の軌跡を二つの円の合成と言うことにする。

$$x = R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta$$

$$y = R_1 \sin \alpha + R_2 \sin \beta$$

により、点 P の軌跡は表される。

これをPCMにするには、 α の初期値を α_0 、 β の初期値を β_0 とし

$$\alpha = K \alpha_0$$

$$\beta = K \beta_0$$

とおき、 $K=1, 2, 3 \dots$ とか $K=0.1, 0.2, 0.3 \dots$ などとし点 P の軌跡を画面上に描くようにするとよい。位相差が必要な時は

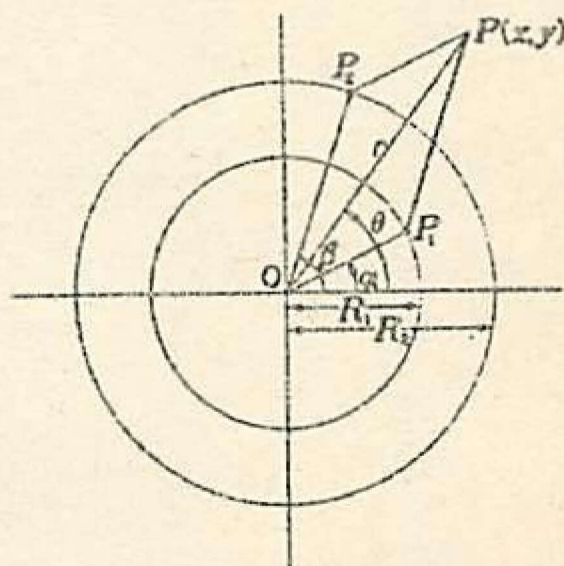


図1 円の合成の説明図

$$\beta = K\beta_0 + T$$

とすれば良い。

さらに Wagner によれば、以上のような中心を同じくする定半径、定回転角の二円のほかに（これを（1）とする）、

- (2) Rは一定、角はランダムの場合
- (3) 異なる中心を持つ二つの円の場合
- (4) 円の代わりに楕円を用いる場合
- (5) 円の半径と角が、負と正、正と負、負と負の場合
- (6) 中心が共通の二円が、Kが違った比でかつ方向が違う場合

を示唆している。

次に今回用いた実際のPCMについて触れる。開発の手初めとして（1）（（6）をも含めて）同じ中心の二円で、半径、回転角が共に一定の場合とした。もちろん $R_1, R_2, \alpha_0, \beta_0$ はパラメータとして変化させることにした。

- 1) タイトル【10~1000】
- 2) 説明用の星を描く【1010~1780】

図1の説明をしながら星を描くためのPCMである。

- 3) 任意の R_1, α_0 をインプットして二円を合成する【1790~2270】

中学生用なので、四つのパラメータを同時に変化させることを避け、第二の円の半径 R_2 と回転角 β_0 をあらかじめ $R_2 = 70, \beta_0 = 20$ (度) で入力し固定した。

なお2)の星を描く時のパラメータは $R_1 = 70, \alpha_0 = 20, R_2 = 35, \beta_0 = -30$ であったことを付け加えておく。

2、実際のPCT

授業は昭和60(1985)年12月18日岩手大学教育学部附属中学校で一年生10名を対象に行った。授業は富田が当たった。次に、その指導案の概要を示す。

1、授業名：円の加法によるコンピュータグラフィックス —— 発見学習

2、指導目標

- (1) パソコンを使うことによって、自ら楽しみながら学習に取り組むことができる。
- (2) 資料や数回の図形制作の中から簡単なきまり（法則生）を把握することができる。
- (3) 自分で図形を創作・発見することができる。

3、展開

段階	学習内容と学習活動	指導上の留意点	時間	備考
導入	1、本時の課題を把握する。 ・プログラムのタイトル部分を見せる。 ・課題プリントを配布する。 課題 プリントの図形を自分で作るう。	・本時の学習に対する課題を認識させる。 ・このプログラムを使うことによって、プリントや画面上の図を作ることができる、を理解させる。 ・どのようにして上述のような図が描けるか、原理理解の段階に話を移す。		・課題 プリント

	2、作図の原理を理解する。	①初期値をパソコンで示しながら説明をする。 ②角度の移動等の説明をする。 ③①②でできた軌跡を見せ、原理把握の度合いをチェックする。(把握が半数以下なら①に戻る。)	20分	パソコン
展 開	3、実際に描く。2～3人の生徒に実際に数値をインプットさせ図形を描かせる。 4、法則性を発見する。 ・課題をどう解決して行けばよいか話し合う。 ・全員がパソコンの近くに集り、一人の生徒が代表でパソコンを操作し、他の生徒は筆記などしながら話し合う。	・一つの円の半径と角度を固定したことを説明。 ・インプットの仕方の説明。 ・例として教師がインプットして示す。 ・一つの円の半径と角度を入力すると図形が描けることを説明する。 必要に応じて円のできる場合について説明する。 ・一つの円の数値と同じ場合、半径0または角度0の時。 ・二つめの円の半径の長さか、角度のいずれかを固定し、“縦と横”の“つながり”について調べれば良いことに気付かせる。→ 虫食いプリントの配布。	25分	パソコン 角度の範囲 -100～100 半径の範囲 0～100 虫食いプリント
ま と め	5、課題を解決する。 4での操作やプリントを参考にしながら課題の数値を探りあてる。	・課題の数値を確認する。 ・虫食い解答プリントの配布。	5分	虫食い解答 プリント
予 備	6、発展学習	・いろいろな数値での図形のプリントを配布する。		おまけプリント

次に、本授業のプロトコールの一部を示そう。

.....

T: ん、深くなる。ん、こっちがもうちょっとへっこんでしまうってことか。

S: そうです。

T: そうだとかえってこのプリントに外れてしまうと、

S: そう

T: じゃちょっと調べて見て、50の30(キー操作)

S: 「鋭い」「あそこに輪ができる」「似てるけどちょっと違う」

T: どうだ、これは、見てみると

S : 深すぎる。

T : 深すぎる。

S : 丸ができ始める。

T : でき始めるね、そうすると角度は30にして、半径をどんどん大きくしていくとどなるかな？

S : 丸がもう一個できる。丸が丸の中にできる。

T : この中にできる。で、それが？

S : 大きくなってくる。

T : 大きくなってくる、うん、じゃちょっとやって見るか。せしたら …

S : 75、80

T : 70くらいでやってみよう。

S : 半径が70

T : うん

S : 70、30 (キー操作)

S : NTTだ、NTTだ、NTT、これはNTTだ！

T : どうだ、やっぱりみんな予想してた通りだったか。

S : うん

T : それで今のやつは半径が40で角度は30で、あともう一つあるんだけど、うん、もう一つあるんだけど時間だから終わりますけど (“おまけプリント” 配布)

.....

S : 「げっ！これかっこいい」「やろうぜ」「作りたい」

T : 今は半径を10から100までの範囲で動かしたでしょ、それで角度を-100から100まで動かしたんだけど、それをもうちょっと広げて考えると

S : こうゆうふうになっちゃう

T : うん、うまく、だけどね、そういうふうな図が出来るようになる。

S : 「やってみたい」「やりたい」

.....

以上がプロトコルの終わりの方の一部である。本授業はだいぶ活気があったが、特にNTTのマークのでた所で大変わいて、一つの授業の“やまば”を作ったように見える。これらのPCTはVTRに収録されていて、そのテープは、前に示した本時のPCMのディスクととともに佐伯研で保存してある。

3、授業の評価 —— 結果

Ssは岩手大学教育学部附属中学校一年生の選抜された生徒である。事前テスト受検者は9名(男子7名、女子2名)事後のそれは10名(男子8名、女子2名)だったが、事前テストが授業日(12月18日)の3日前に行った関係で、事前・事後テスト(授業直後に実施)ともにデータの揃っているSsは8名、うち1名はIARのデータを欠くため最終的には7名(男子5名、女子2名)となった。

実施したテスト類は、PCSD-U、幾何水準テスト、EFT、GCT(ここまで事前・事後と実施している。)そしてIAR(事後だけ)であった。IWATは、本授業での指導目標を数学の命題で表現するのが困難であったという事情で、用具の作成及び実施を見送った。

3、1、PCSD-Uの結果

PCSD-UのSsは8名(男子6名、女子2名)であったが、トータルサンプルとして処理した。図2でSDプロフィールを示す。第7尺度が大部左(非好意的側)にきているのが目立つ。これは同時

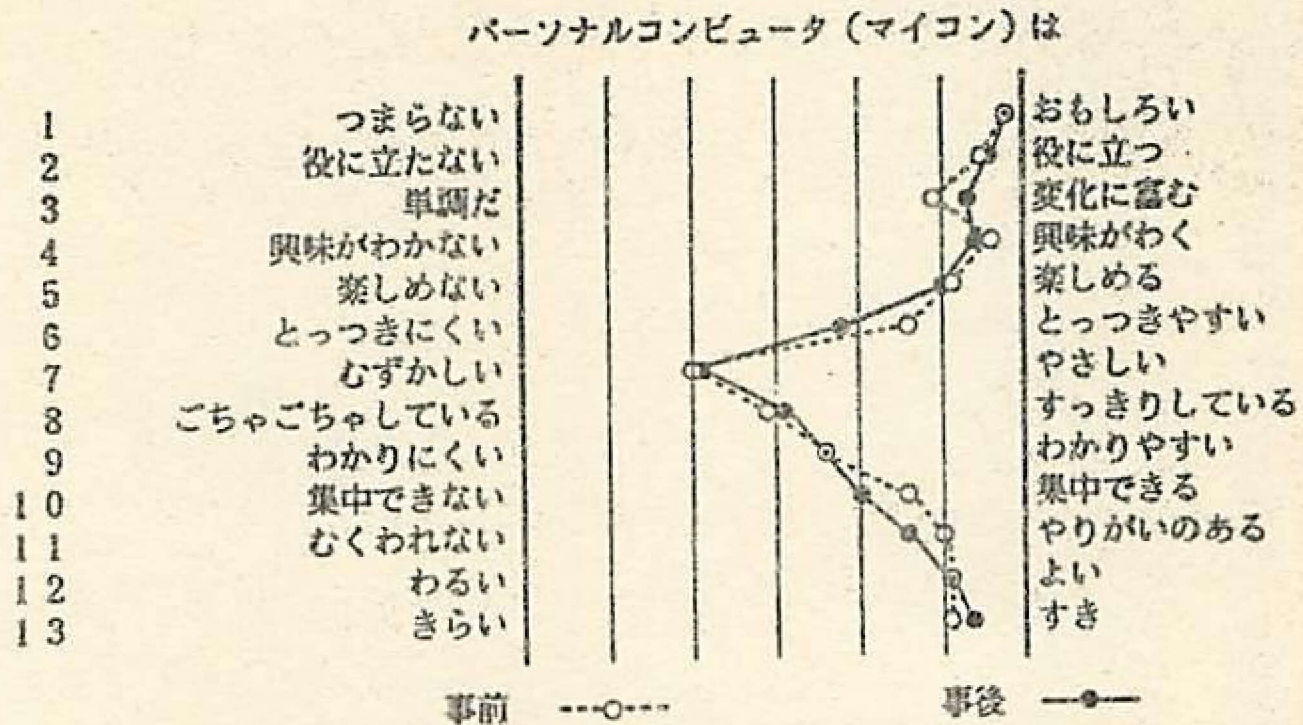


図2 PCSD-UのSDプロフィールと尺度

に進めた他の班と比べてこの授業の目立った特徴になっている。その他もこのプロフィールには他の班と違いがある。さらにこのSDプロフィールのパターンは先行研究の大学生の時のパターンとも異なっている。このことは、プロフィールが、単に刺激語「パソコン」というより、むしろ授業の内容から影響をより大きく受ける面もあることを示唆しているのかも知れない。勿論、実際の用具では尺度の好意側と非好意側とは図2とは異なり左右ランダムになっていることを付け加えておく。

次に因子分析を試みた。因子分析は対角線要素はSMCでとり、固有値と累積寄与率の関係でバリマ

表1 因子3個の場合の因子負荷量と共通性

尺度	事前テスト				事後テスト			
	I	II	III	h^2	I	II	III	h^2
1	93*	-15	-07	89	25	-83*	08	76
2	77*	16	36	74	97*	05	-03	94
3	59*	49	-53	87	30	-92*	-03	95
4	86*	-09	-18	79	66*	-63	-24	89
5	99*	-10	-01	98	65*	-54	-35	84
6	90*	02	26	88	-12	-93*	00	89
7	07	94*	15	90	-06	-31	89*	90
8	-33	90*	-03	92	-02	-07	97*	94
9	28	14	90*	92	-01	-87*	14	78
10	-87*	01	25	81	06	-35	-45*	32
11	93*	02	26	93	85*	16	25	81
13	95*	-10	-01	98	79*	-35	-42	92

(小数字は省いてある)

ックス回転は因子を2個と3個までとったものと二種類行った。表1は因子を3個とった因子分析の結果である。結果はS_sの数も少ないこともあること、授業の内容も他と異なることもあってか、尺度の

表2 因子2個の場合の因子負荷量と共通性

尺度	事前テスト			事後テスト		
	I	II	h ²	I	II	h ²
1	91*	-15	86	34	-80*	75
2	81*	21	69	82*	07	68
3	50*	41	42	45	-85*	93
4	84*	-12	71	80*	-50	89
5	98*	-09	97	83*	-37	83
6	93*	07	87	08	-88*	78
7	06	95*	90	-43	-61*	56
8	-35	88*	90	-48*	-40	40
9	40*	29	24	09	-87*	76
10	89*	06	80	34*	-17	15
11	95*	06	91	57*	08	33
12	96*	-01	92	79*	-52	89
13	98*	-09	97	94*	-17	92

(小数字は略してある)

所属因子も大抵異なっている。SDプロフィールとともにこの場合のS_sと授業の特色になっている。事後では3個の因子をとってもh²は第10尺度で.32と小さいのも問題である。表2は因子を2個までとり他の研究と比較しようとしたものである。表2でも他の研究とはかなり違っているのがわかる。

3、2、その他の結果

ファン・ヒーレ幾何水準テストについて触れる。今回の問題は佐伯の作った問題(大学生用、日教教論文発表会三重大会で発表)を少し修正したものである。成功基準は0水準は12、1水準は12、2水準は15であった。この結果事前のエラーは1、事後のエラーは2でS_sの数を8として計算した再現性係数は、事前で0.9583 事後で0.9167

であり、どちらも尺度化可能になった。

次にS_s数を8として、全変数の平均と標準偏差を表3で示す。vIIはファンヒーレ水準テストのいみである。これら全変数の事前と事後の間で有意差があるかどうかを検定した。結果はどこにも有意差は見られなかった。

さらに、全変数間の積率相関係数を計算し、その無相関検定をした。結果を表4で示す。PCSD-Uの事前・事後の相関とかファン・ヒーレ水準テストの事前とIARのI+と、GCT事後とIARの全Iに負の相関が認められた程度である。IARの中ではI+とI-

表3 全変数の平均と標準偏差

		平均	標準偏差	満点値
PCSD-U	pre	71.43	10.69	91
	post	70.86	10.41	91
vII	pre	37.14	11.80	60
	post	33.43	8.92	60
EFT	pre	87.14	18.01	100
	post	88.00	11.76	100
GCT	pre	67.14	12.78	100
	post	77.14	7.00	100
IAR	I+	13.29	2.49	17
	I-	11.71	3.28	17
	total I	25.00	2.14	34

表4 全変数の積率相関係数

	PCSD-U		vH幾何水準		E F T		G C T		I A R		
	事前	事後	事前	事後	事前	事後	事前	事後	I+	I-	全I
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	.82*	1									
3	-.24	-.31	1								
4	-.37	-.34	-.96**	1							
5	-.01	-.12	.45	.21	1						
6	.30	-.07	.45	.05	.68	1					
7	.56	.72	-.41	-.54	.20	.32	1				
8	-.18	.35	-.31	-.21	-.11	-.29	.55	1			
9	.32	.22	.83*	.75	.29	.37	-.06	-.28	1		
10	-.37	-.49	-.54	-.42	-.49	-.50	-.50	-.28	-.76*	1	
11	-.20	-.49	-.14	.24	-.42	-.33	-.84	-.76*	.00	.65	1

df = 5 * : 0.05 ≥ P > 0.01 ** : 0.001 ≥ P

の間に負の相関がでた。

さらに、これらの全変数にわたりHL分析をした。結果はどこも有為差のでた所はなかった。従って各変数の弁別力を確かめることが出来なかった。他の研究では同じ変数はいつも弁別力が認められたが、ここでは出なかったということは、テスト用具よりも、むしろS sの特質と見なした方がよいのかも知れないが、これ以上は何とも言えない。

4、考察

本PCTは同時に行った他の三つのPCT（佐伯・神林他一名、1986；佐伯、1987；佐伯・阿部他二名、1987）とは異なり全くの手探り試行的な所があった。つまり実験に入る前、生徒の反応の予想をするのが困難なので、特に予想することをしないで、予備知識程度としてアメリカの先行研究（Vagner、1982）を参考にした。しかし、Vagnerの研究はケーススタディでありS sはわずかに二人ということだった。一方筆者の研究はS sは集団であったので、その点慎重に扱った。

そこでPCM開発では次の点に留意した。二円の合成という時、パラメータは半径二つ角度二つの四つになってしまい、扱いにくくなるので一つの円を固定した。結果的にはこれは成功的であったと考えられる。

PCT、つまりパソコンをOHPのように用いて進める授業では、その授業が成功するか否かは、教師の力量の問題もあるが、その中で用いるPCM（単元の選定も入る）の作りかたが最大のポイントになると考えられる。生徒にアピールするPCMの条件は経験的に

- (1) 生徒がよく目にするゲームソフトに比べて見劣りしないような“迫力”が必要である。
- (2) 画面はアニメでもグラフでも“活発な動き”が必要である。
- (3) 一回は興味を持って見るが、二回目はもう飽きてしまうという一般のデモ用ソフトのようではなく、ゲームソフトのように何回やっても“飽きることのない”ソフトである必要がある。
- (4) 他の教材開発がそうであるように、PCM開発も生徒の反応を十分考えた“生徒本位”のソフト

である必要がある。

等の諸点に対する配慮があって達せられると考えている。

なお、一般のPCM開発のためには、そのソフトがデータベース的になっていなければならないことは別稿(佐伯、1987b)でも触れている。

(5) PCMソフトは、授業の中でパソコン化したい各エピソードに対応する比較的短いステップからなるソフトのデータベースでなければならない。即ち、各ソフトをソフト①、ソフト②、…と表すと、次のような流れ図になる(図3)。PCMの開発はこのPCTに合うものでなければならない。

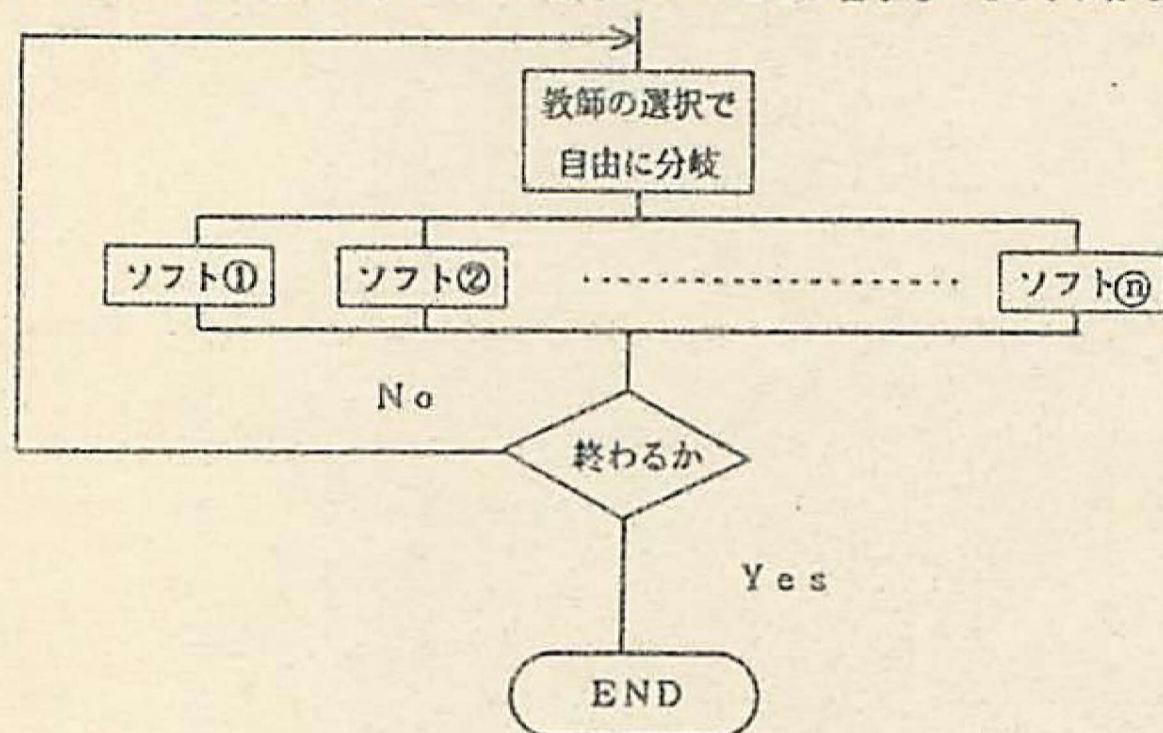


図3 PCTの中のPCMの扱い

本研究のPCMは上の条件の(4)は少し手探りのだったが、その外の(1)、(2)、(3)に配慮したつもりのもとなった。実際の授業の結果は、同時に行った他の三つの授業に比べ格段に活気に満ちた授業になった。このためPCSD-UのSDプロフィールと因子分析の結果が、他と異なったものになったのかも知れない。しかし、これは他の原因も有り得るのでこのように断言するのは危険であろう。やはり、今後の追試が必要な問題として残る事になろう。その他の諸テストについてはSsの数が足りないのであまり信頼のおける結果とは言えないので深入りはしない。これらは、教師教育としての位置付けでなされたものである、という程度にしておく。

実際のPCTで生徒にパソコンのキー操作をさせる場面が何度も出てくる。この点に関して、だれにキー操作をさせるかはあらかじめ考えずに授業に入ってしまった。そのため前の方にいる特定の生徒にだけ安易にキー操作をさせてしまった。この結果、キー操作に当たらなかった他の生徒から不満がでた。今後に向けてキー操作をだれにするかも、慎重に計画しなければならない、という反省点も出てきた。

この種のPCMの開発及びPCTの実施は初めてであり全くの手探り試行であった。そのため、PCM開発時の教材研究に弱さがあり、また、PCTの実施では計画性のなさが指摘される。しかし、今回の試行で予想以上の成果が得られた事も事実である。これらの経験やノウハウを次回の研究に生かして行けるものと考えている。

参 考 文 献

- 1) 佐伯卓也(1984)算数数学教師教育で用いるパーソナルコンピュータに対する態度測定用具の

開発、第15回東北数学教育学会年会発表資料

- 2) 佐伯卓也(1985a) 算数数学教師教育で用いるパーソナルコンピュータに対する態度測定用具の開発、日本教大協：教科教育学研究第二集、274～278
- 3) 佐伯卓也(1985b) 算数数学のパソコン化授業におけるパソコン利用のガイドライン
ふくらまし教材、数学教育学会研究紀要、26(No. 1・2)、11～20
- 4) 佐伯卓也(1985c) ファン・ヒーレ水準テスト(代数)とP-Pグラフ分析(1)——— 高校生の場合、岩手大学教育学部研究年報、45、183～195
- 5) 佐伯卓也(1985d) ファン・ヒーレ水準テストとP-Pグラフ分析(2)——— 大学生の幾何、第18回日教数教育論文発表会要項集、33～36
- 6) 佐伯卓也(1987a) パソコン化教材としてのふくらまし教材の開発とその授業の実践的研究(2) ——— 円の面積・区分求積法による展開、岩手大学教育学部附属教育工学センター教育工学研究、印刷中
- 7) 佐伯卓也(1987b) プレサース教師教育におけるパソコン化授業の指導 —— パソコンによる発見的創造的授業、投稿中
- 8) 佐伯卓也・神林雅紀・平田裕司(1986) パソコン化教材としてのふくらまし教材の開発とその授業の実践的研究(1) ——— 傾き関数・中学生の微分へのアプローチ、東北・北陸数学教育基礎的研究報告、14、19～36
- 9) 佐伯卓也・阿部チエリ・佐藤洋子・佐藤ユミ(1987) パソコン化教材としてのふくらまし教材の開発とその授業の実践的研究(3) ——— 面積関数・中学生の積分へのアプローチ、東北数学教育学会年報、投稿中
- 10) 沢 英久(1966) 分析思考と総合思考、長崎大学教育学部研究報告、13、1～16
- 11) 富田正彦(1986) コンピュータグラフィックスにおける円の加法による発見学習の実践的研究 —— パソコン学習による生徒の反応、岩手大学教育学部昭和60年度卒論
- 12) 上西創司(1986) パーソナルコンピュータによる数学教材開発 William J. Wagner の“円、極座標グラフとマイコン ——— いくつかの意外な結果”の実践的研究、computer graphics による発見学習の実践、岩手大学教育学部昭和60年度卒論
- 13) Wagner, W. J. (1982) Circles, polar graphs, and a computer — some unexpected results, Math. Teacher, 75, 323～328
- 14) 八柳久夫(1980) Crandall らのIARと、これを算数用に修正した尺度との比較、東北・北陸数学教育基礎的研究報告、8、27～39

(付 記) 本研究を進めるにあたり、岩手大学教育学部附属中学校数学科教官、吉川健次、樋口賢一、工藤 保の三氏に大変お世話になったことを記し、ここに感謝の意を表す。

A Development of Enriched Materials as a Personal
 Computerized Materials and a Practical Research
 about Teaching to Utilize the Developed Materials (4)
 —— Addition of Circles —— An Approach to Various
 Curves as a Locus of Addition of
 Vectors for Students of Grade 7 ——

Takuya Saeki, Masahiko Tomita and Souji Uenishi
 The Faculty of Education, Iwate University

(Abstracted)

Let O be the origin and consider two circles C_1 and C_2 , centers of which are at O and radii of which are R_1 and R_2 , respectively. Let $\overrightarrow{OP_1}$ and $\overrightarrow{OP_2}$ be two geometric vectors where P_1 and P_2 are on the circumference of the circle C_1 and of C_2 , respectively. Let $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$. Components of \overrightarrow{OP} are

$$x = R_1 \cos \alpha + R_2 \cos \beta \quad \text{and} \quad y = R_1 \sin \alpha + R_2 \sin \beta,$$

where $P_1 (R_1 \cos \alpha, R_1 \sin \alpha)$ and $P_2 (R_2 \cos \beta, R_2 \sin \beta)$.

If we fix R_2 and β and change R_1 and α , the locus of P describes a curve as $\alpha = K \alpha_0$ moves as a function of K for any R_1 , where α_0 is a constant (It is admitted that R_1 and α_0 take minus values if necessary).

We have developed materials of the above facts by the aid of a personal computer and carried out teachings with "learning by discovery" using the above materials for students of grade 7.