東北数学教育学会年報
1989　3.31　第20号

問題の類似性判断に対する MDSの適用について

植田　敦三（山形大学教育学部）

1．はじめに

既知の問題を解くときはいうに及ばず、我々は新しい問題を解くとき過去の問題解決を通して獲得した知識を適用しようとする場合が多い。G.Polya(1954) は問題解決に有効な方略の一つとして「よく似た問題」に関する知識を用いることをその著書『いかにして問題を解くか』の中で主張している。また、「問題づくり」の授業においては児童・生徒がつくった問題を彼ら自身に分類・整理させ、そこから得られた情報を様々な目的で学習指導に利用している。ここでは問題の同型性、類似性に関する児童・生徒の判断を授業に生かしているのである（竹内、沢田、１９８４）。このような教材の扱い方は「問題づくり」の授業に限ったものではなく、普段の授業においてもしばしばなされている。

このように同型性、類似性判断に関する児童・生徒の活動を我々は学習指導において利用しているし、問題解決方略としても指導している。また、H.Freudenthal(1973)も主張しているように、同型性への認識は数学において重要な教材である。問題の同型性判断に関わる要因を研究することは数学教育において意味を持つものといえる。この方面の研究方法の一つとして、分類法がしばしば利用される。しかし、この方法ではグルーピングされた問題はすべて被験者にとっては等質なものと判断されたと解釈せざるを得ない。また、分類されたグループ同士の関連性に関する情報を得ることも困難である。しかし、同一のグループに分類された問題は均質なものではなく、問題相互に心的距離が存在すると仮定することはそれほど難しいことではない。もし、そのような問題の類似構造が明らかになれば、そこから得られる情報は問題解決の研究にとって様々な目的で利用できるであろう。

本稿の目的は２節で述べる一対比較法的検査から得られたデータに対してKruskalのＭＤＳ（multidimensional scaling、多次元尺度解析）を適用することにより問題相互の類似構造を描き出すことができるかどうかを調べることである。描き出された問題の類似構造が妥当性を持ったものかどうかは、個々の問題の課題分析を通して得られる結果と照合することによってある程度判断できる。

2．調査問題及び調査方法

調査問題は、ディリクレの原理（部屋割り論法）を共通な構造にもつ、以下に示した５つの問題である。

調 査 問 題

問題１　あなたのクラスの友達の生まれた月を調べると、生まれた月が一致することがありますか。

問題２　試験のとき、筆箱に入っている鉛筆の本数が一致する人がいますか。

問題３　１７個の部屋しかないホテルに１８人の客が泊まっているとしたら、同じ部屋に泊まっている人がいますか。

問題４　あなたの学校には誕生日が一致する人がいますか。

問題５　１０個のサイコロを同時に投げたとき、出た目の中に同じ目がありますか。

これらの問題をＡ４用紙に印刷したものを問題解決の調査用紙として用いた。回答は、（はい、いいえ、どちらでもない）の選択肢の中から１つを選び、その理由を記述するという形式をとった。ただし、問題解決においては、高校生のときのクラス、学校を意味すると被験者に指示した。この問題解決の前に、問題の類似度を以下の方法で判定してもらった。

上の５つの問題から１０組の問題対を構成して、一つの問題対ごとに問題をＢ５の用紙に印刷し、その下に被験者が感じている「ちがう－おなじ」という程度を記入するための１５cmの線分を引いておき、そこに×印を付けて判定してもらうようにした。

被験者は山形大学教育学部小学校課程数学選修学生３名、養教別科学生４名の合計７名である。調査時期は１９８８年１１月中頃、所要時間は約１５分であった。

3．調査結果

類似性に関する一対比較法的検査から、「ちがう」の側の線分の端から×印の付けられた点までの距離を測定し小数第一位を四捨五入した結果を各被験者の測

定値とした。測定値は０cmから１５cmまでの値となる。表・１は各被験者の測定値の平均と標準偏差である。

表・１　測定値の平均と標準偏差（単位はcm、( ) 内は標準偏差）

問題	1	2	3	4
2	8.0(4.9)			
3	6.6(4.0)	3.1(3.6)		
4	10.9(4.6)	9.0(4.1)	7.1(4.4)	
5	10.4(4.1)	4.4(3.0)	7.4(5.0)	8.4(5.1)

表・１からわかるように、この測定値の標準偏差はかなりおおきく、そのまま問題相互の類似距離を表しているとは考えにくい。しかし、問題相互の類似度の順序を表していると考えることはそれほど難しくはない。そこで各被験者の測定値をランクに直してその平均を問題相互の類似性に関する尺度値（表・２）とした。

表・２　問題相互の類似尺度値

問題	1	2	3	4
2	４．４			
3	５．７	８．１		
4	２．７	４．１	５．０	
5	３．３	７．１	５．３	４．３

本調査で得られたデータは順序データであるから、その順序性を手がかりとしてデータを空間布置するKruskalのＭＤＳを用いることが適当であろう。KruskalのＭＤＳとは、実測値とその空間布置における距離との関係が、一方が大きい値ならば他方も大きく、一方が小さいならば他方も小さいという単調関係を満たすように分析する方法である。各被験者および被験者全体における問題間の類似性判断の一貫性に関するデータを表・３に示した。KruskalのＭＤＳでは、空間布置

と実測値との適合度を示す指標としてstressなる値を用いている（林、飽戸、１９７６）。Kruskalは多くの経験と実験から適合度を、stress×100 が２０％のとき「あまりよくない」、１０％のとき「まあまあ適合している」、５％のとき「よく適合している」、２.５％のとき「非常によく適合している」、０％のとき「完全に適合している」と適合の度合を評価している。表・３では、この適合度を用いて各被験者の尺度値の一貫性を示している。また、全体と個人との関連はランクに直した各被験者の尺度値と表・２に示したランクの平均との相関係数で見ることができる。ただし、相関係数との比較が容易にできるように表・３では 1.0-stress を用いて個人の一貫性を表す指標としている。被験者S_4、S_6を除いた残りの被験者、被験者全体の尺度値にはほぼ完全な一貫性があると判断できる。また、全体と個人との相関はそれほど高くはない。

表・３　個人および全体の尺度値の一貫性

被験者	個人の一貫性 1.0-stress	全体と個人のとの関係
S_1	1.00	0.82
S_2	0.99	0.64
S_3	1.00	0.62
S_4	0.90	0.62
S_5	1.00	0.50
S_6	0.86	0.32
S_7	0.99	0.28
全体	0.99	(1.00)

４．調査問題の課題分析

本調査において用いた問題の解決に適用される共通した原理はディリクレの部屋割り論法である。この原理は次のように記述できる。

今、２つの集合Ｘ、Ｙに対して写像ｆ：Ｘ→Ｙを考える。＃Ｘ、＃Ｙで集合Ｘ、Ｙの要素の個数を表すとする。このとき、＃Ｘ＞＃Ｙであるならば、写像ｆは１対１ではない。

この原理を適用する場合の要点は濃度を比較する２つの集合を意識し、それらの要素を系列化するところにある。この系列化の操作は考察の対象になっている集合を自然数の集合に読みかえることである。この操作によって集合の濃度が意識される。このことに留意しながら本調査に用いた問題の解決過程のモデルを構成すると次のようになる。このモデルは筆者が行った予備調査において得られた被験者からの説明をもとにして作成したものである。これはあくまでもモデルで

あり、実際に問題を解決する場合に全てのステップを段階的に実行しているということを意味するものではないし、このような過程を必ずふんでいるということでもない。

ステップ1：具体的事例の系列的想起。

ステップ2：系列的に表れた要素のグループを構成する。この段階で考察の対象となる集合の要素が意識される。

ステップ3：構成された集合の要素を自然数に順序よく対応させ、自然数の集合を構成する。

ステップ4：ディリクレの原理を適用する。

以下、このステップに焦点を当てて各調査問題を分析してみよう。

① 問題1、4

問題1と問題4には、一致するかどうかが問われているものは「生まれた月」、「誕生日」という違いはあるが問題の解決のプロセスは同じであろう。ステップ1において「私の生まれた月は12月」、「A君の生まれた月は3月」、「B君の生まれた月は3月」、・・・、と自分の知っている友人の生まれた月を想起する。ステップ2において、私、A君、B君、・・・というクラスの生徒の系列、クラスの生徒が生まれた月の系列12月、3月、3月、・・・を構成した後、クラスの生徒の集合{私、A君、B君、・・・}、月の集合{1月、2月、3月、・・・、12月}を構成する。このときに、重複していたものは取り除かれる。そしてステップ3において各々の集合の要素に自然数を対応させ、その自然数の集合を考察の対象にする。問題1であれば{1、2、3、・・・・・・、40}と{1、2、3、・・・、12}である。

② 問題2

ステップ1では「私は鉛筆を5本持っている」、「他の人も大体4～6本であろう」、「高々7本くらいであろうが、中には20本くらい持っている人がいるかも知れない」と考えるであろう。ステップ2においては5本、4本、・・・、4本、5本、・・・、5本、6本、・・・、6本、7本、20本という鉛筆の本数の系列から、クラスの生徒が持っているであろう鉛筆の本数の集合{4本、5本、6本、7本、20本}を構成し、その後、ステップ3においては鉛筆の本数が5通りしかなくても、最も多い本数までの自然数の集合{1、2、3、・・・20}を構成する。問題2は生徒が持っているであろう鉛筆の本数を「高々～本であろう」と解決者自身が現実的に妥当な数値を設定しなければならないこと、また、持っているであろう鉛筆の本数の場合の数を最高の本数に合わせて決定する傾向があるところが、問題1、4とは異なっている。

③ 問題3

問題3ではイメージによって直観的に解決されるであろう。上の解決過程のモデルの各ステップをこの問題で明確に区分するのは困難である。

④ 問題5

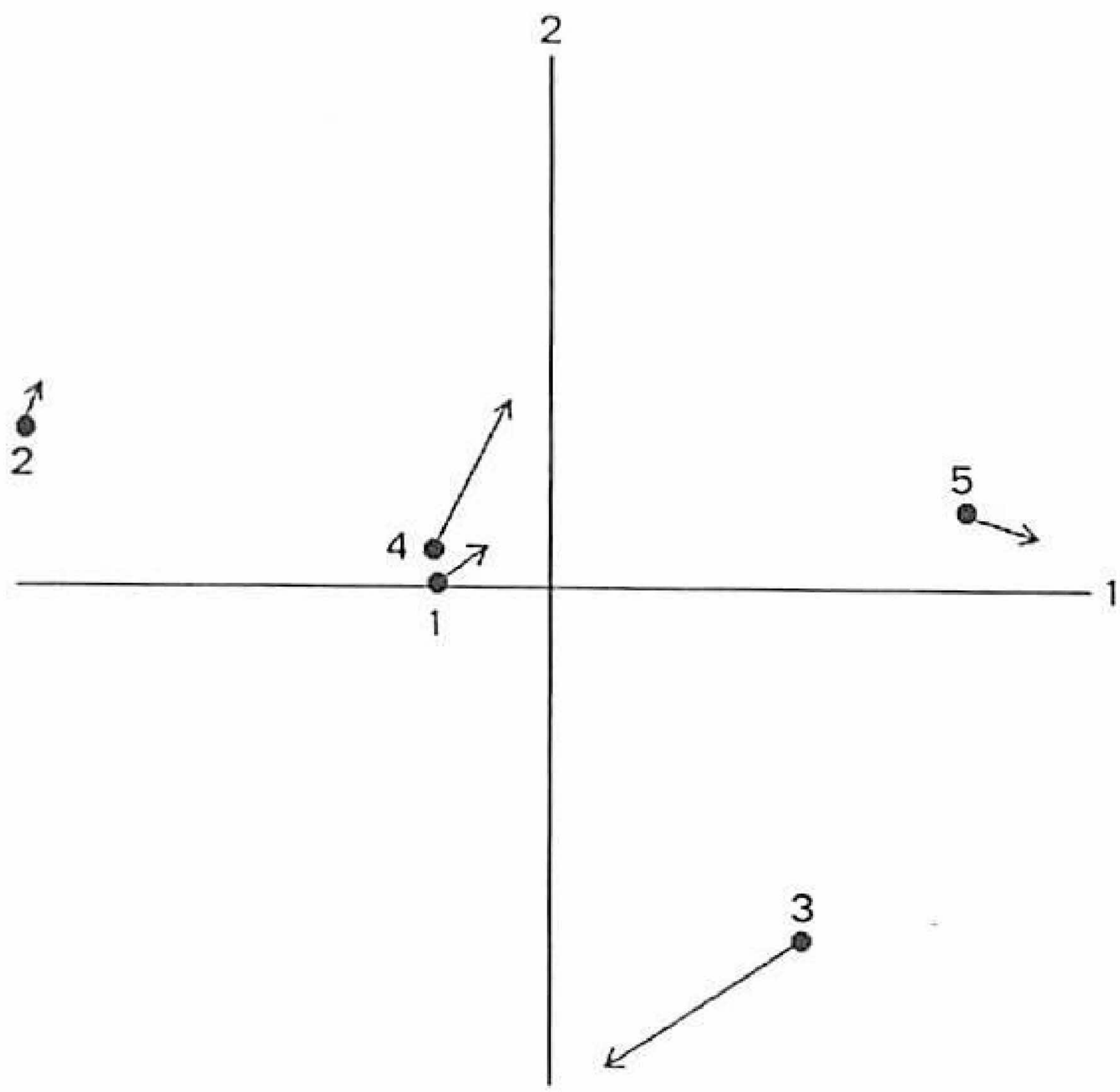
ステップ1では「振ったときに出るサイコロの目は偶然であるから、どんな目がでるのかわからない」、「まあ、1回目は2としておこう」、「2回目は6」、・・・、というように具体的に場面を想起しようとするが、サイコロを振って出てくる目がいくつになるかについては全く必然的なデータが存在しない。問題1、2、4には少なくとも「私は～である」という事実を基礎にできるが、サイコロの場合は全て仮定である。ステップ2で回数、サイコロの目の数の集合を構成する。問題5では、サイコロを振る回数、サイコロの目の数はともに順序づけられているため、ステップ3を必要としないであろう。

このように問題の解決過程をモデルを用いて分析すると、本調査に用いた問題は{問題1、問題4}、{問題2}、{問題3}、{問題5}の4つのグループに分類できそうである。

Chartoff (1976) は代数の文章題を生徒が分類するときに用いる基準として以下の4つの観点があることを明らかにしている。(1)問題解決の仕方についての認識、(2)問題の設定場面、(3)同じタイプの問題としての一般性、(4)問題の質問。本研究において用いられる調査問題では、通常の学校数学においてほとんど問題とされることのないものであること、また、調査問題の質問内容も同じであることから、(3)と(4)の問題の一般性、問題の質問という観点は本調査における問題の類似性判断において生じないであろう。また、問題の設定場面が類似しているのは問題1、4である。ところが、問題1、4は課題分析の結果同一のグループに属する問題ということになる。よって、上に示した4つの問題グループが描き出された問題の類似構造に表れていれば、描き出された類似構造はある程度の妥当性を持ったものといえるであろう。

図・1は、表・2の問題相互の類似尺度値のデータにKruskalのMDSを適用することによって描き出された問題の類似構造の空間布置である。・印に付けられている数字は調査に用いた問題の番号である。また、矢印の先は、全体との相関係数がよいほうから上位4名のランクの平均をデータとして、全体の場合と同様にKruskalの方法で処理した結果得られた問題の空間布置である。両者はほぼ同じ問題相互の類似構造を描き出している。図・1の空間布置からわかるように、問題1、4が互いに近接し、残りの問題が互いに分離されている。先の議論から、

図・1　　問題の類似構造の空間的表現



この空間布置はある程度の妥当性を持つものと判断できるであろう。

ところで、植田（１９８８）は問題３を除いた残りの調査問題につい中・高・大学生を対象にした調査を実施しており、以下に示す５つの解決方略があることを見い出している。

方略１：自分の経験、常識に照らして判断する。

（例）同じ人を知っているから。

１０個も投げれば１個ぐらいはあると思う。

方略２：試行したり調べてみないとわからない、という判断をする。

（例）やってみなければわかりません。

方略３：計算によって判断する。

（例）その日に生まれる確率は　1/３６５　なので、私の学校は約５００人だから、５００/３６５＝１．４。だからあまり期待できない。

方略４：集合の濃度が明示されていないため判断できない。

（例）何本から何本まであるのかわからない。

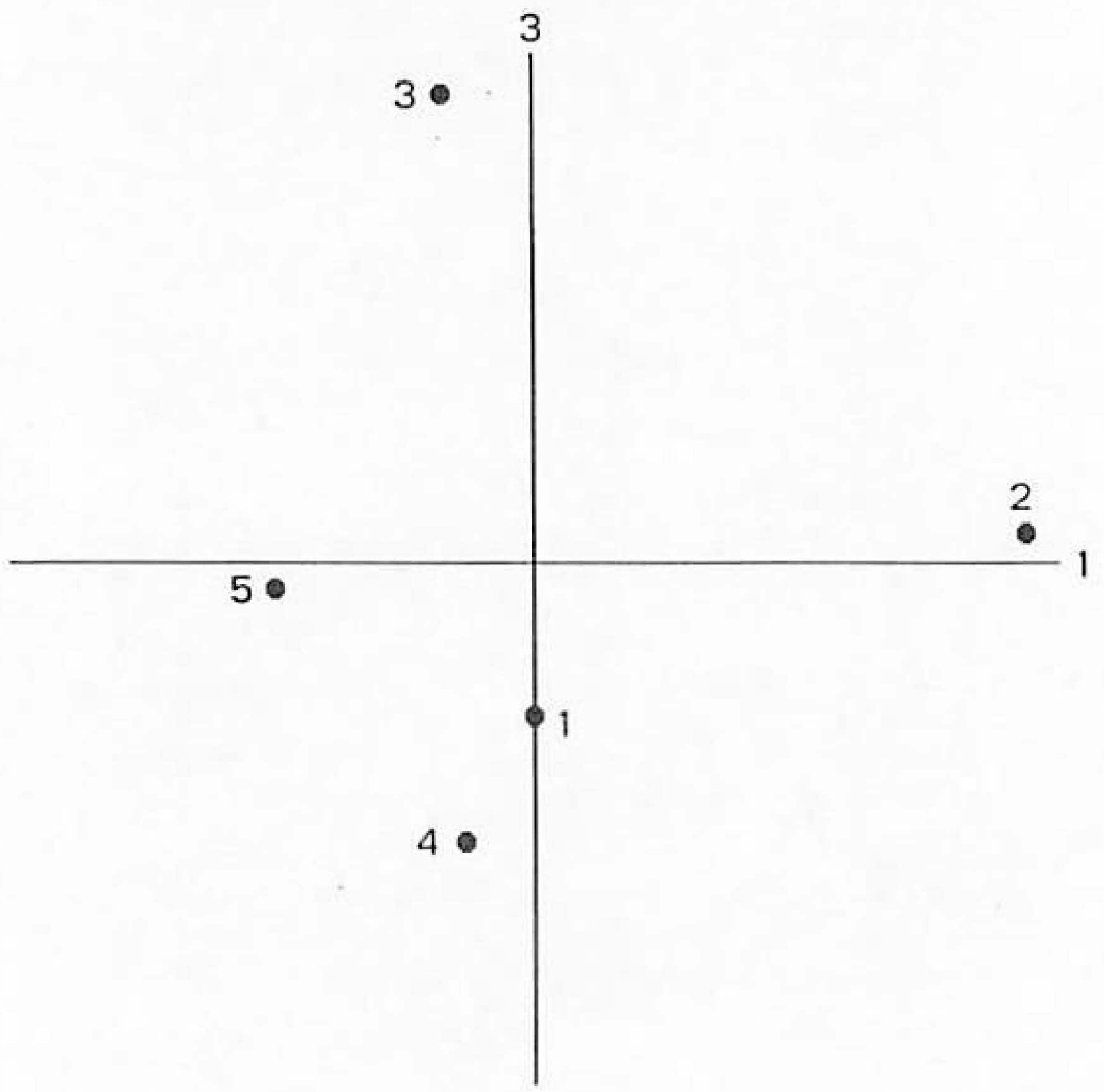
方略５：ディリクレの部屋割り論法を適用して判断する。
　　　（例）１年は１２ケ月、クラスの生徒数はそれを上回る
　　　　４４人だから。

Chartoffが指摘しているように、問題の類似性判断に「問題解決の仕方についての認識」が関与するとすれば、上の解決方略から見た問題相互の類似性に関するデータからも同じ様な問題の類似構造が描き出せるはずである。そこで、問題相互の問題解決方略に関する一致度数を求めると次のようになった（表・４）。

表・４　　解決方略からみた問題の類似度

問題	1	2	3	4
2	3			
3	4	1		
4	5	1	4	
5	2	0	3	3

図・２　　解決方略から見た問題の類似構造の空間的表現



この表・４のデータは問題相互の親近性を表す１つの数量と考えられるので、このデータに数量化第４類を適用することによって問題の類似構造を描いてみた。得られた４つの軸のうちの２つずつを組み合わせて図・１の空間布置と比較したところ、第１軸と第３軸を用いたものが最もよく似た構造を示していた（図・２）。このように解決方略からもよく似た類似構造が描き出せるということは、図・１の問題の類似構造の空間的表現の妥当性を示す１つの資料となろう。

４．結語

Silver(1979)は問題の類似性に関する研究において、問題の内的表象を研究に取り入れることの重要性を指摘しているが、個々の問題の内的表象がどのようになっているかということに加えて、類似性に関する研究においては個々の問題に対する内的表象間の関係を研究対象にすべきであろう。この観点からShepard & Chipman(1970)、Shepard & Kilpatric & Cunningham(1975) は形（アメリカの州の形）、数（０、１、・・・、９）の類似性に関する研究を行っており、Kru-scalのＭＤＳが内的表象間の関係を研究する方法として有効であることを示している。

本稿では、問題の類似性に関する一対比較法的検査およびそこから得られた尺度値からKruskalのＭＤＳによって数学の問題の類似構造を描き出すことができるかどうかを調べた。その結果、調査問題群に対して被験者が持っているであろうと予想される構造を描き出すことができた。

本稿で調べたような問題の類似構造に関する情報を、問題解決研究においてどのくらい有効に利用できるかは今後の課題ではあるが、少なくとも市川（１９８８）がいう「問題変形アプローチ」による研究においてかなり有力な手法となろう。

引 用・参 考 文 献

１）Polya,G.（１９５４）、「いかにして問題を解くか」、柿内賢信訳、丸善株式会社。

２）竹内芳男、沢田利夫編（１９８４）、「問題から問題へ　── 問題の発展的な扱いによる算数・数学科の授業改善 ── 」、東洋館出版。

３）Freudenthal,H.(1973), "Mathematics as an Educational Task",D.Reidel

Publishing Company, Dordrecht-Holland.
4）林知己夫、飽戸弘（１９７６）、「多次元尺度解析法」、サイエンス社。
5）Chartoff, B. T. (1976), An exploratory investigation utilizing a multidimensional scaling procedure to discover classification criteria for algebra word problems used by students in grades 7-13, Dissertation Abstructs International:Dictoral Dissertation, Northwestern University.
6）植田敦三（１９８８）、同型な問題に対する中・高・大学生の反応についての一考察、第２１回数学教育論文発表会発表資料、５８－６３。
7）Silver, E. A. (1979), Student Perceptions of Relatedness among Mathematical Verbal Problems, J. R. M. E. 10, 195-210.
8）Shepard, R. N., Chipman, S. (1970), Second-Order Isomorphism of Internal Representations:Shapes of States, Cognitive Psychology, 1, 1-17.
9）Shepard, R. N., Kilpatric, D. W., Cunningham, J. P. (1975), The Internal Representaion of Numbers, Cognitive Psychology, 7, 82-138.
１０）市川伸一（１９８８）、３囚人問題の解決と理解の過程をめぐって、「認知科学の発展」、日本認知科学会／編、１－３２。

A note on an application of MDS to perception of similarity in word problems

Atsumi Ueda
Faculty of Education, Yamagata University

The purpose of this study is to research the applicability of the Kruskal's MDS to investigate the relation between the internal representations of word problems. Our concluding remark is as follows. Tne method of Kruskal's MDS do provide a convenient way of representing the mental distance between word problems.