東北数学教育学会年報
1989　3.31　第20号

正定数の左巾列（仮称）の収束条件

有明学園　本田嘉博

正数a，実数bに対し$a^b = a \wedge b$で表し，これを$a(\wedge b)$と見るときa右巾b，又$(a\wedge) b$と見るときa左巾bとよぶことにする。

$p_n = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n$　$(0 < a_k,\ 1 \leqq k \leqq n)$ですべての∧が右巾のとき$p_n$を右 巾列とし，逆にすべての∧が左巾，すなわち右から左に演算が進むとき左巾列とよぶことにする。

このときBASIC言語ではまったくかっこをつけないときは右巾列と約束している。

これに対し，左巾列では$A_1 = a$，$A_n = a \wedge A_{n-1}$　$(n \geqq 2)$を考える。

以上に対し$\lim p_n = a \wedge \lim_{n\to\infty} (a \wedge (n-1))$の条件はtrivial であるから

$\lim_{n\to\infty} A_n$だけの収束条件を求めよう。

（1）正定数aに対する左巾列では

$A_n = a \wedge A_{n-1}$　$(2 \leqq n)$，$A_1 = a > 0$　…①

$\therefore$　$A_n > 0$　$(1 \leqq n)$，$\therefore$　$\log A_n = A_{n-1} \log a$

$A_n \to A$とすると$\log a = \log A / A$（$= f(A)$とおく）　…②

このグラフは（図1）となり

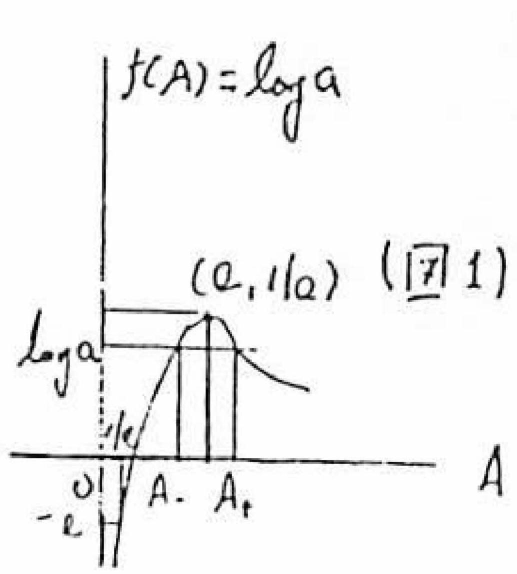
$\log a \leqq f(e) = 1/e$　…③

$\therefore$　$a \leqq e \wedge (1/e)$　…③′

これがaの必要条件であるが次に

$1 < a \leqq a_0 = e \wedge (1/e)$　…④

のとき$\lim A_n$が収束することを示そう。



先ず④のとき，明らかにA_nはnに対して増加。

また曲線$y=a_0 \wedge x$は$x=e$で直線$y=x$に接する。

故に④のaについて$y=a \wedge x$は$y=x$と

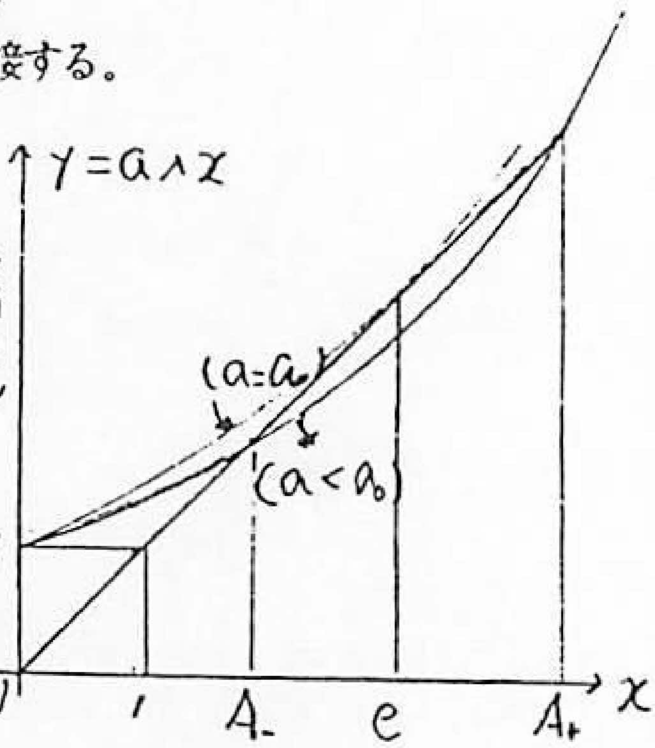
$x=A_-$，A_+で交わり$A_- \leqq e \leqq A_+$

$\therefore \lim_{n\to\infty} A_n = A$が存在し$a \wedge A = A \leqq e$

これと$a \wedge A_- = A_- \leqq e$から$A=A_-$

即ち　$\therefore \lim A_n = A_-$で示された。

（図2）



（2）$a=1$のとき$A_n=1$

（3）$0<a<1$　…⑤のときの$\lim_{n\to\infty} A_n$収束の必要条件を求めよう。

先ず$x_1<x_2$ならば$a \wedge x_2 < a \wedge x_1$ …Ⓐ

$\therefore$　⑤から$a \wedge 1 < a \wedge a < a \wedge 0$　即ち　$A_1<A_2<1$

$\therefore$　$a \wedge 1 < a \wedge A_2 < a \wedge A_1$ 即ち　$A_1<A_3<A_2$

これを続けると

$0<A_1<A_3<\cdots<A_{2n-1}<A_{2n+1}<\cdots$

$\cdots<A_{2n+2}<A_{2n}<\cdots<A_4<A_2<1$ …Ⓑ

$\therefore n\to\infty$にたいし　$A_{2n-1}\to A_-$，$A_{2n+1}\to A_+$

…⑥

が存在して　$A_- \leqq A_+$

更に　$a \wedge A_{2n-1}=A_{2n}$　から$a \wedge A_- = A_+$

$a \wedge A_{2n}=A_{2n+1}$　から$a \wedge A_+ = A_-$

$f(x)=a \wedge x$はxの減少関数で$f(0)=1$，$f(1)=a<1$だから，

直線$y=x$とただ1点P（A_0，A_0）で交わり　$0<A_0<1$ …⑦

$f(A_{2n-1})-A_{2n-1}=A_{2n}-A_{2n-1}>0$　$(1\leqq n)$

$f(A_{2n})-A_{2n}=A_{2n+1}-A_{2n}<0$　$(1\leqq n)$ だから

$$A_{-}\leqq A_0\leqq A_{+}$$

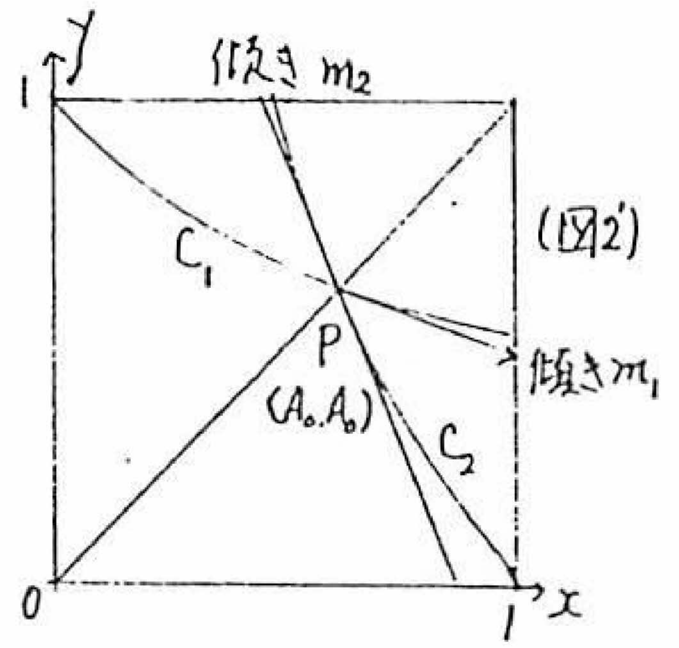
故に $\lim A_n$ が存在するための条件は $A_{-}=A_{+}$ である。 …⑧

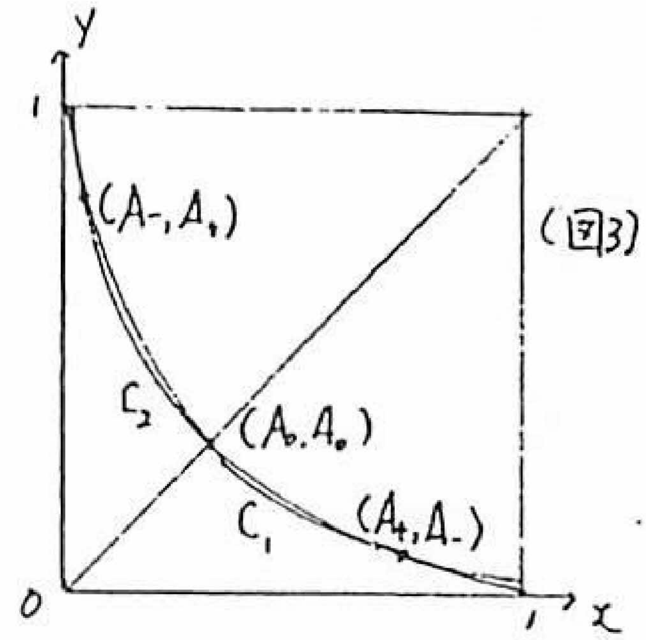
さて，曲線 $C_1: y=a\wedge x$ と $C_2: x=a\wedge y$ とは直線 $y=x$ に関して対称であり，点P (A_{-}, A_{+}) は C_1 上，点P (A_{+}, A_{-}) は C_2 上にあるから，⑧とは C_1，C_2 がP以外では交わらぬことである。 …ⓒ

さて $m_1=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_P=(a\wedge A_0)\log a=A_0\log a=\log(a\wedge A_0)$

$=\log A_0<0$　(∵⑦) …⑧'

$\therefore\quad m_2=\left(\dfrac{dx}{dy}\right)_P=1/m_1$





更に $\dfrac{d^2y}{dx^2}=(a\wedge x)(\log a)^2>0$ だから $\dfrac{dy}{dx}$ はxにたいして増加

又 $\dfrac{d^2x}{dy^2}=(a\wedge y)(\log a)^2>0$ から $\dfrac{dx}{dy}$ はyに対して増加だから

xにたいして減少。

故にⓒとは $m_2\leqq m_1$　　$\therefore 1/\log A_0\leqq\log A_0<0$ のこと。

$\therefore\quad 1/e\leqq A_0$

$\log a$ は（図1）からも明らかなように
⑤の範囲で A_0 にたいし増加。

$\therefore -e \leqq \log a < 0$

$\therefore e \wedge (-e) \leqq a$ 　　　$\therefore$ 　$e \wedge (-e) \leqq a < 1$ 　　　…⑨

これが十分条件であることも以上を逆にたどることから明らかである。

（4）$0 < a < e \wedge (-e)$ のとき

$\log a < -e$ 　$\therefore A_0 < 1/e$ 　（∵図1から）

$\therefore$ 　$\log A_0 < -1 < 1/\log A_0$ 　　$\therefore$ 　$m_1 < -1 < m_2$

$\therefore$ 　$A_- < A_0 < A_+$ となり（図3）のように C_1，C_2 は3点で交わる。

上のことから次の定理が得られる。

定理 $0 < a$ のとき

$A_1 = a$，$A_{n+1} = a \wedge A_n = (n \geqq 1)$ について $\lim_{n\to\infty} A_n$ は

（1）$e \wedge (1/e) < a$ のとき $+\infty$ に発散

（2）$(1/e) \wedge e \leqq a \leqq e \wedge (1/e)$ のとき収束

（3）$a < (1/e) \wedge e$ のとき $\lim_{m\to\infty} (A_{2m-1}, A_{2m}) = (A_-, A_+)$ の A_- と A_+

間を振動し

$A_- = a \wedge A_+$，$A_+ = a \wedge A_-$，$A_0 = a \wedge A_0$ も存在して

$0 < A_- < A_0 < A_+ < 1$ である。

$e \wedge (1/e) = 1.444667861009766$

$(1/e) \wedge e = .06598804673972699$

Convergence condition for "the left progressing poweric series" (provisional name) of finite positive number

by Yosihiro Honda (Yuho Gakuen)

As is used in BASIC language, $a \wedge b$ means a^b. Now for finite a(>0), let's consider the series $\{A_n\}$:

$$A_1 = a, \quad A_n = a \wedge A_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

This series may be called provisionally "left progressing 'poweric' series, as every operator $\wedge$ progresses from right to left.

In this paper the convergence condition of $\lim_{n\to\infty} A_n$ will be shown:

$$(1/e) \wedge e \leqq a \leqq e \wedge (1/e)"$$

here e is the base of natural logarithm.