

東北数学教育学会年報

1990 3.31 第21号

## カバリエリの原理：中学生対象の数学教材 パソコンソフト開発とその授業の実際

佐伯卓也（岩手大学）

協力者：伊藤千津、金崎公美、佐藤由香

（昭和63年度佐伯研究室所属学生）

カバリエリの原理を知らせるパソコン教材と自作の教材を併用したメディア・ミックス的授業を試行した。授業はほぼ成功的であった。開発したパソコンソフトの効果も予定通りであったが、利用した自作の教具によるメディア・ミックスを意識した利用により効果を高めたように見えた。

キーワード：中学校数学、パソコンの教育利用、CAI、授業研究  
メディア・ミックス、カバリエリの原理

### 0 はしがき

本研究は一連の中学校数学のパソコン教材開発とその授業の実践的研究の一つとして位置付けられる。ところで、取り扱った教材はパソコンによる立体の体積にかかわる教材であった。そのねらいは＜カバリエリの原理＞を目標にした区分求積による体積を求める教材である。カバリエリの原理とは、イタリアの数学者カバリエリ（Cavalieri）が実験的に発見した（1629）原理と言われ、それは「2つの立体をある定まった平面に平行な平面で切ったとき、常に切り口の面積が等しいならば、2つの立体の体積は等しい」という原理（定理）であることはよく知られている。また、区分求積法による平面図形の面積や立体の体積を求めるパソコン教材は、筆者の研究室では多数試行されているので、蓄積も多い（佐伯、1986ab, 1987, 1988；佐伯他 1987, 1988）。この先行研究の方法を用いてパソコン教材の開発を企てた。また、この授業ではパソコンソフトの機能を高めるため、3種類の教具（模型）を作成し利用した。それは、①透明プラスチック製の四角柱とそれを斜めにしたもの、②発泡スチロールの立体、③波動バネ、であった。これらをパソコンとともに用いて、メディア・ミックスの効果を出した。

授業の評価はI W A TとP C S D-Sで行った。それらの結果は、ほぼ予測通りの結果を得たと評価される。

1 授業計画

この研究では、最初の計画は高校数学の積分の応用の単元にある、回転体の体積の求め方をしてその公式の誘導を考えていた。その方法は、先行研究にあった＜面積関数＞（佐伯他、1987）を用いて平面図形の面積を出しそれをx軸等を軸として回転して回転体の体積を求める高校の数学の案を考えていた。この案で計画を進め、授業も2単位時間を考えパソコンソフトの開発も進めていた。しかし附属教官との接触を繰り返すうちに、どうしても中学生には無理な内容ということになり、急拠計画を変更し本研究のテーマ、カバリエリの原理の指導になった。

この変更は授業予定の10日前であったこともあり、この時点での、パソコンソフトの作り直し、指導案の書き直し、授業の実施計画の練り直しは協力者の学生にはかなりのショックであったし、その上かなりきつい作業と考えたが、変更することにした。ところで、このような変更は、恐らく作成に100時間とか200時間もかかる普通一般のCAIソフトでは不可能ではないかと思う。しかし、筆者の試行している非CAI的PCTに用いるパソコンソフトでは可能であると考えて授業主題の変更に踏み切った（ここで、筆者は実際にこのような変更はどのような時間、手順でなされるかの興味を持ったことを指摘しておく）。

次に指導案を示す。

数学科学習指導案

指導者 伊藤 千津

- 1、日 時
- 2、指導学級
- 3、主 題
- 4、本時の目標
- 5、本時の展開
- 昭和63年12月14日 16時～16時50分
- 岩手大学教育学部附属中学校第1学年選抜組
- 立体の体積
- ①体積の求め方を学習する（ $V = \text{底面積} \times \text{高さ}$ ）。  
②区分求積による体積の求め方を知る。  
③体積は断面積（無限に高さの小さい柱体の体積）の総和であることを知る。  
④具体的事象を直観だけにたよらず数学的に考えようとする態度を養う。

段階	指導事項	教師の活動	生徒の活動	時間	指導上の留意点・教材器具
導	1. 学習課題の提示	1. 底辺の長さが高さが等しい三角形を3つ提示する ①どの三角形の面積が大きいか			1. 学習課題が3次元であるのに対し2次元の図形を用い、次の段階へとつなげる ・ 三角形の高さの概念の想起 ・ 高さを言葉を用いて定義する ・ 直観によらず数学的に考えさせ

入	2. 角柱の提示	②面積の大きさを調べるために公式の確認 2. 立体A,Bの提示 ①どちらの立体の体積が大きい ②体積を比べるにはどのような方法があるか	$S=1/2 \times \text{底辺} \times \text{高さ}$ ②水を入れる・計算で求める	10分	る（紙板書） 2. 視覚的にとらえた場合、A,Bの体積が異なっているように見せたい ・実際に水を入れて確かめる ・立体A,Bの体積が等しいことを確認する ・計算をする場合は式を生徒に考えさせ、体積を求めるにはどの部分の長さが分かればよいか考えさせる（模型）
展	3. 角柱の体積 4. 円柱の提示	3. 立体Cの体積を求める ①体積を求めるにはどうしたらよいか ②形が異なる3つの立体(A,B,C)の共通している長さは何か ③BとCの立体の体積が等しいか Cの立体をBに近付けるにはどうするか 4. 立体D,Eの体積が等しいことを予想させる ①どのようにしたら立体Eの体積を求めることができるか ②どのように分けて考えるか	・立体を細かく分割した四角柱の体積の和 ・側面積（平行四辺形） $\times$ 奥行き ・ならず ・底面積 ・高さ ・側面積（誤答） ・細かく分ける ・ならず ・分けて考える	10分	・模範解答をいくつかパソコンを用いて提示する（検証） ・立体A,B,Cの体積が等しいことから立体Cの分割を細かくすれば立体Bに近付くことに気付かせる ・次に行う区分求積の考えを養う ・立体の形成（この場合底面積と断面積が等しく、底面が高さ分集まったもの）を理解させる（模型、パソコン） ・学習プリントと模型、パソコンを使用して分割方法を考えさせる ・内接円柱群と外接円柱群についての説明をする ・パソコンを使用し区分求積法によって体積を求める ・立体D,Eの体積が等しくなることを確かめる（模型、パソコン、



		(机間巡視)		20分	学習プリント)
終	本時のま	5.練習問題			・高さの概念を定着させる
結	とめ	6.体積は断面積 の総和によって 求められること を理解させる		10分	・断面積が常に底面積と等しい場 合(底面積)×(高さ)によって 体積が求められることを理解させ る

学習プリントは略す。

## 2 教材開発

前節の授業計画を元にして、模型とPCM(パソコン教材)を作成した。

### (1) 模型

模型は透明プラスチック製の4角柱、発泡スチロール製の区分求積の説明用の立体そして波動バネ模型の3種類を新しく作成したり、利用したりした。図1の(A)、(B)は透明プラスチック製の立体で中に水を入れられるようになっている。(A)(B)は底面

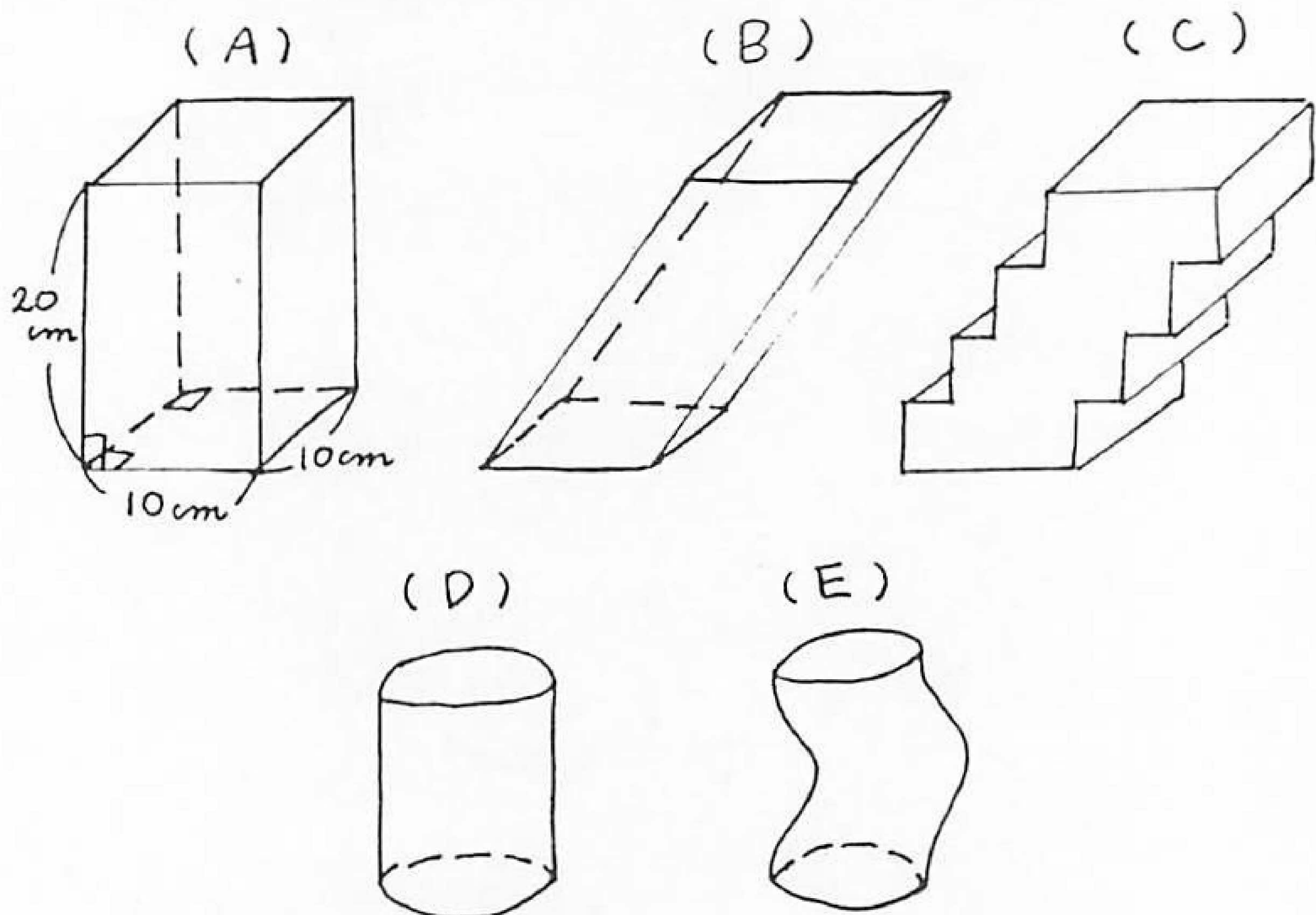


図1 模型



積と高さは等しく、従って中に入る水の量（器の容積）が等しい。（B）はなるべく傾きの度合いが大きくなるように作成した。

（C）の発泡スチロール製の立体では、下から2段と3段の間の境の接着面には底面と同じ形のプラスチックが貼ってある。これは授業の中で、断面積の説明で利用する目的を持つ。

（D）（E）は波動バネでもともと物理実験の器具である。円柱の体積のところで、円柱の母線を柔らかな曲線にしても体積が不変であることを教える教具として、種々検討した結果採用した教具である。そのため、最初は針金を巻いて自作しようとしたが、形の固定がうまく行かないので理科教室の方から借用して利用することにした。（D）はバネを直立させた図であり、（E）はそれを曲げた図であり、高さは等しいままである。これを用いて体積は不変であることを示す補助教材にした。

## （2）パソコンソフト

### 1）初期設定とメニュー【10～250】

メニューの提示は生徒にとっての余分な情報を省き、授業の流れをスムーズにするため、1、2、3と番号だけの提示。

### 2）画面1（模型Cに同じ）【260～860】

模型Cのように、立体を4つの四角柱に分け、それぞれの部分の体積を求め、その和を求めたい体積とするものである。

### 3）画面2【870～1290】

画面1のずれている四角柱を元になる四角柱に戻して体積を計算させればよいことを発見させる画面である。

### 4）画面3【1300～1600】

元になる四角柱と幾つかに分割した斜めの四角柱を並べて提示するところは画面2と同じだが、今度は分割する数は生徒の発言から採用するようにしてある。しかも、必要があれば何回でも繰り返すことが出来る。

### 5）画面4【2000～2260】

円柱とそれを滑らかにずらした図形の表示で模型D、Eに対応している。

### 6）画面5【2270～2430】

画面4の円柱をずらした立体の上部に色をつけ、次の区分求積の学習への導入画面とした。

### 7）画面6【3000～3990】

円柱の区分求積の画面。画面は模型Eを真横から見た図を利用して、左側は立体に内接する円柱群、右側は立体に外接する円柱群を示し、分割は等分であり、キーから自由に等分数を入力するようになっている（図2）。

### 8）画面7【4000～4500】

画面6に基づき実際の数値を代入して計算結果を表示する画面。入力する数値は任意に

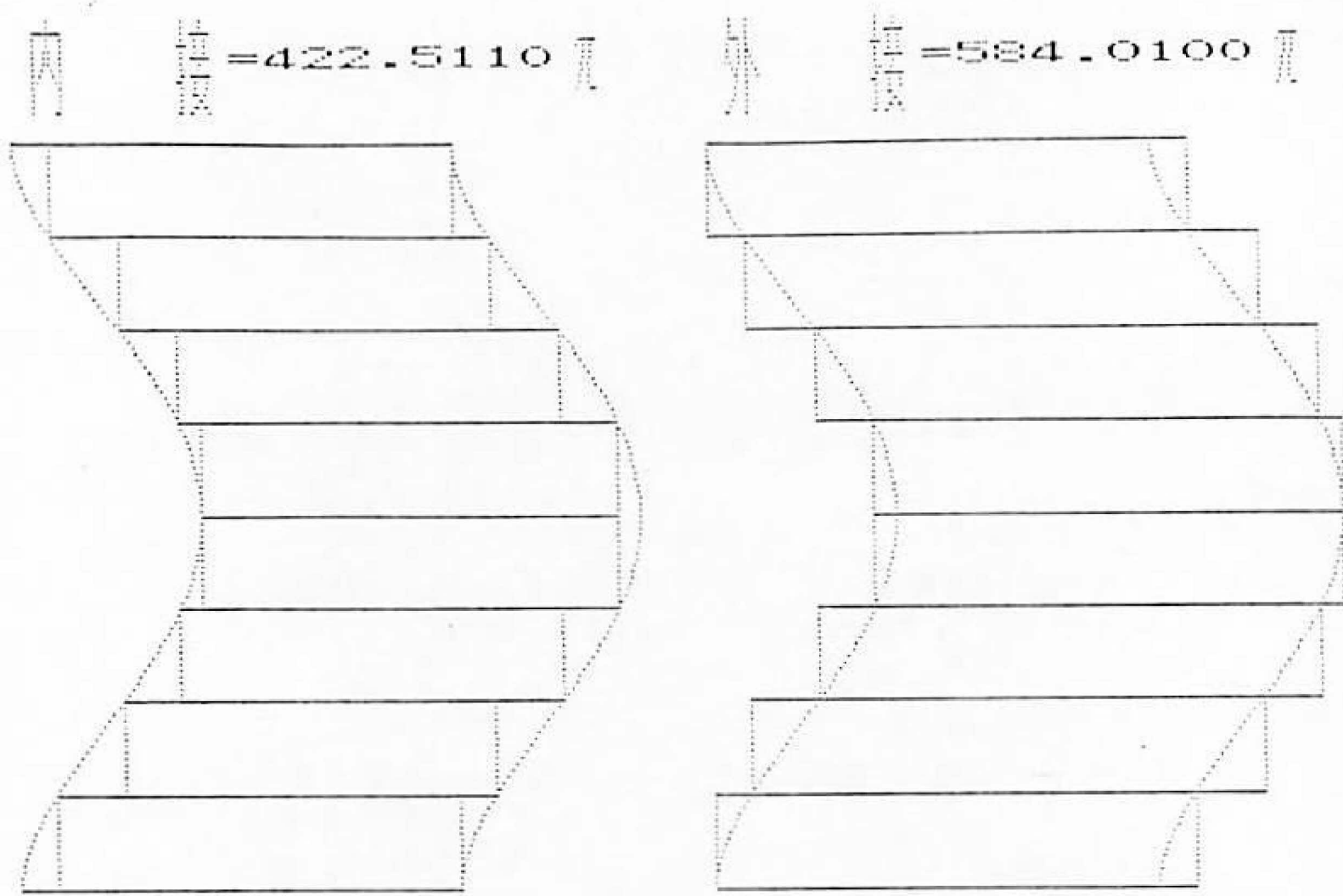


図2 画面6

とれる。実際の計算では内接円柱群の体積の総和と外接円柱群の体積の総和が、有効数字6桁で一致するのは、4500等分であった(図3)。

n	$\sum_{i=1}^n V_i$	$\sum_{i=1}^n V_i$
? 10	432.055	556.170
? 50	432.055	556.170
? 100	499.323	500.662
? 1000	499.993	500.007
? 5000	500.000	500.000
? 3000	499.999	500.001

図3 画面7

I W A Tを用いたテストは事前T・事後Tの2回行い、各の認知構造を作り、内容構造からの距離dとDを計算した（結果は省略）。また、これら2回のテストのP-Pグラフを打ち出した。結果はⅡ型で変容係数は $\beta_1=0.49$ ,  $\beta_2=0.96$ であった。これらの結果を総合すると、授業は成功的であったと言える。

このI W A Tの内容構造では隣接箇所になっていた「底面積－高さ」と「内接－外接」は、認

知構造では隣接しない。もともとこれらを内容構造で隣接にした理由は、吉川（1981）の概念の結合の理論からは、それぞれ、「従属結合」（Aを想起する時、それに伴ってBが想起される）と、「否定結合」（A、B共に視点を変えて拡大結合として概念Cに関係付き、かつ、 $A \cap B = \phi$ ）と見られるので、それなりの理由はあったことを指摘しておく。

次に、パソコンに対する態度を測定したPCSD-Sの結果であるが、SDプロフィールの部分で見ると、グラフパターンは先行研究と変わりはない。しかし、事前Tから事後Tにかけて、より好意度が減少したように見える。ここが先行研究と異なるので、授業者の感想を聞くと、このパソコングラフィックは必ずしもすっきりしていないところがあるので、評価が下がったのでないか、従ってソフト開発の時は、やはり評価が上がるようなものが望まれる、と発言していた。

授業の実際については、VTRに収録し、さらにテープ起こしをし、プロトコール（略）を作成して授業分析をした。これらを踏まえ本時の授業の特徴いくつか述べておく。

まず、模型の利用は大変効果があったと考えられる。この点メディア・ミックスの授業としての本時の授業は成功のように見える。特に、立体AとBは実際に水を入れて示したし、立体A、B、Cの体積が等しいことも興味を持って受け入れたように見えた。ただ、授業の目標の一つである「区分求積」を意識して、「立体Cを立体Bの形に近付けるにはどうしたらよいか」と言う発問に対しては、「出っ張っている所を斜めに切って引っ込んでいる部分に持ってくる」という考えしか出なかった。ここで分割を細かくする、と言う「区分求積」の考えを生徒から引き出すのにはもう少し工夫がいるように見える。さらに、立体の体積は、底面積×高さ（Sh）と抽象化するところもほぼ予定通りの出来ばえであった。

次に、問題点としては、立体Eの体積を求める時、なぜ円柱で近似しなければならないか、体積を求める時、内接円柱と外接円柱でなぜ「はさみうち」をしなければならないか、の理由がよく分からないようであった。この点、円柱の求積に区分した円柱の体積を求め、

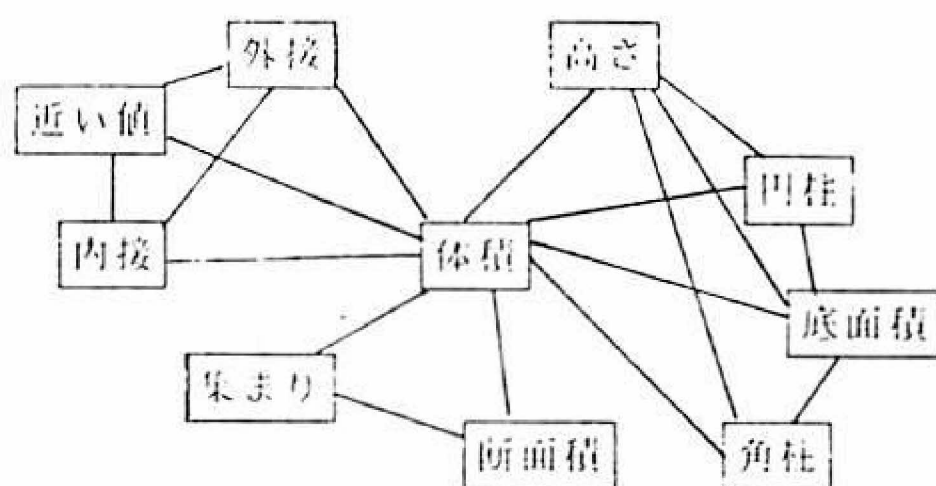


図2 内容構造図



それらの和としてもとの円柱の体積を求める、ことになった教材研究の甘さが指摘できる。さらに、プリントの問題実行中であるが立体の高さと、立体の斜面の長さを混同した間違いが出たことは予想外であった。この克服のためには立体の「高さ」の概念の明確化が望まれる。

授業全体を通して見ると、授業者の個性もあって、生徒が「飽きない」授業になったことは評価できる。

## 参 考 文 献

- 伊藤千津（1989）パソコンを利用した積分へのアプローチ —— 立体の体積、岩手大学教育学部昭和63年度卒論
- 金崎公美（1989）パーソナルコンピュータによる数学教材開発とその授業実践 —— 積分による立体の体積、岩手大学教育学部昭和63年度卒論
- 佐伯卓也（1986a）パソコンによる微分・積分・ベクトル、三省堂高校数学ぶっくれっと、No. 4、1～27
- 佐伯卓也（1986b）中学生におけるパソコンによる区分求積法の指導例、日本教育工学会第2回大会論文集、161～162
- 佐伯卓也（1987）パソコン教材としてのふくらまし教材の開発とその授業の実践的研究（2）—— 円の面積・区分求積法による展開、岩手大学教育学部附属教育学センター教育工学研究、9、3～8
- 佐伯卓也（1988）数学における非C A I 的授業の実践的研究 —— 円錐の体積、岩手大学教育学部附属教育学センター教育工学研究、10、1～8
- 佐伯卓也・阿部チェリ・黒沢真由美・佐々木明子（1987）パソコン教材としてのふくらまし教材の開発とその授業の実践的研究（3）—— 面積関数・中学生の積分へのアプローチ、東北数学教育学会年報、18、17～30
- 佐伯卓也・阿部ゆかり・柿崎純子・菊池美智子・細越千春（1988）数学における非C A I 的授業の実践的研究（2）—— 内・外接正多角形による $\pi$ への近似、東北数学教育学会年報、19、17～22
- 佐藤由香（1989）数学教材開発におけるパソコン利用とその実践的研究 —— 立体の体積、岩手大学教育学部昭和63年度卒論
- 吉川正基（1981）概念の結合について —— 発展理論の仮説による理解へのアプローチ、第15回日数教数学教育論文発表会論文集、A、5～8

本研究は、昭和63年度文部省科学研究費補助金（一般研究（B）課題番号 63450098）の一部を利用して戴いた。ここに研究費補助金に対し感謝の意を表す。また、本研究遂行に際しては、岩手大学教育学部附属中学校副校長渋谷次男、数学科の工藤 保、今野吉章、沢山和則の諸先生方に大変お世話になったことをここに記し、感謝の意を表す。

Principle of Cavalieri: Personal Computerized  
Teaching Materials

—— Development for Junior High School Students and  
thier Practical Utilization ——

Takuya SAEKI

(The Faculty of Education, Iwate University)

(Abstracted)

The principle of Cavalieri, thinking that this famous principle must be taught for young students, we have planned teaching to junior high school students by making use of personal computers. We have tried a lesson with personal computers and three kinds of teaching models, as a media-mixed mode lesson. The lesson has been successful.