東北数学教育学会年報
1990 3. 31 第21号

数の乗法的構造を生かしての加減計算

山形大学　森川幾太郎

1 はじめに

近年のマイクロエレクトロニクス技術の進歩によって、小学生でも各種の計算機器を簡単に手にすることができ、それらを使って数計算ができるようになった。以前のように計算機器を手にするのが困難な時代では、多くの場面で、人間が自らの手を使って計算しなければならなかった。その結果、数学教育では計算能力、それは大きな桁の数の計算をも正確で迅速にできるということを意味していたが、の育成が大きな課題であった。しかし、今日のように、人間より正確にしかも迅速に計算ができる機器が存在する時代になったとき、数計算に対して要求される能力は変化せざるをえない。ところで、このことは計算力が必要でない、ということを意味しない。計算力は依然として大切である。ただ、そこで要求される内容が変化したのである。

私は、今後の数教育において、以下の事柄が大切であると考えている。

1) 数概念の獲得と関連して計算を指導する。これには、学習状況によって次のようないろいろなレベルがある。

* 整数、小数の十進表記の諸性質をもとに四則計算を行う。

* 整数の四則計算は数の十進記数法の諸性質が基本になっていることをしる。

* 整数の四則計算の方法を整数の十進表記に関わる性質と関連づけて説明できる。

2) 数計算を行う意味がわかる。これは、計算機器にさせている計算式の適否が判断できるというレベルで考えるだけではなく、行っている計算の方法自体の仕組みがわかる、そして、計算結果が意味することが理解できる、というレベルにおいても考える問題である。これらの事柄は、計算を必要とする場面での量の関係がわかる、ということと並んで、数計算そのものを自分の手でも行うことができる、が必須の条件になる。

3) 計算機器で行った計算の評価ができる。このために、概算に関する能力を現在以上に高めることが大切である。

1992年から施行される学習指導要領では、２年生で「数の相対的表現」の導入と概算の基礎的な考え方の指導とが新しく提起された。この小論では、この「数の相対的表現」、私はこれを数の十進表現の乗法的構造と呼ぶのがよいと考えているが、をどのように活用するかについて数の加減算に焦点を合わせて提案したい。

ところで、この提案の一部は実際に小学校２年生を対象として授業された。この実践結果から、この提案は２年次で展開が可能であるという感触をつかんだ。しかし、問題も多く、この学習を全員のものにするには、３年次ないし４年次において指導した方が効果があるかもしれない、と考えている。

2　先行研究から

1970年代に横地清と町田彰一郎(1)によって「ばら数による計算」が開発された。この計算法はこの当時数学教育実践研究会の久留米サークルで実践された(2)。「ばら数」の考えに基ずく計算には次のような特徴がある。

*1　数の十進表現での各位の数は、位を単位にしたとき１位の数である。しかし、一方では、これらの数は位で表現された大きさもっている。このことを表現するため上に示したように、各位の数をそれぞれの桁を示す記号を用いて表す(3)。

(千)	(百)	(十)	(一)
3	4	5	6

*2　加減算では、各位毎に独立して計算をする。このとき、どの桁から計算をしてよい、ととらえる。また、計算では途中過程を示す欄を設けて、この欄はメモと考える。

*3　乗除計算でも、一位数間の数の乗除の関係に還元して計算できるように、乗除での位と位の関係を大事にした。

例＞
(百)		(十)		(一)
3	×	6	=	18

例＞	百	十	一		百	十	一
	3	4	7		3	4	7
	＋5	8	9		＋5	8	9
	8					1	6
	1	2			1	2	
		1	6		8		
	9	3	6		9	3	6

私も、この提案に刺激されたり、英語での「43teens」という表現や子ども達が十進数に対して柔軟な見方で対応できるように、と次のような学習を２年生、および３年生で行うことを提案した(4)。

1) 子ども達は、１年生以来の学習から、例えば「５６２」とは、百のかたまりが

5で、十のかたまりが6、1の単位が2である、ということも学んだ。この十進数の仕組みは大きな数における加減計算の原理になるので、私は十進数の加法的構造と呼ぶことにしている。

ところで562個あるものについて、十の束だけを作ってそれを数えると56束ある。このことから、562は$56^{(十)}2^{(一)}$とも表すことができる。この数のとらえ方は、大きな数の乗法計算、とくに縦式表記のとき有効である。そこで、私はこれを十進数の乗法的構造と呼ぶことにする(5)。

例＞６３×４９の場合

$$\overset{(一)}{63}\times\overset{(一)}{9}=\overset{(一)}{567}$$

$$\overset{(十)}{6}\times\overset{(十)}{4}=\left\{\overset{(十)}{24}\right\}^{(十)}=\overset{(百)}{24}$$

などを使って、部分積の末尾の数の書き出し位置を決める。

		6	3	
×		4	9	
	5	6	7	←一の桁から数字を書く
	1	2		←十の桁から数字を書く
2	4			←百の桁から数字を書く
4	0	8	7	

注】 63×4=252 と計算すれば上の部分積は一段分減らすことができる。

2) 十進数の加法的構造と乗法的構造の関係を機械的に変換するために、「位取り板」を利用する。

例＞３４６７の場合

千	百	十	一
3	4	6	7

3　4　← 百を単位にして

3　4　6　← 十を単位にして

3) 十進数の乗法的仕組みの応用題として、十とび、百とびの数え方を扱ったり、十間隔、百間隔で数の数直線表現を扱う。

3　提案したいこと

今回私が行う提案は、上で述べた十進数の「乗法的構造」を使って加減算を行うことである。この計算については、子ども達が「ばら数」の考えで整数の加減算ができた後で指導することを考えている。

乗法的構造を生かした加減算の例をそれぞれ１つずつ示そう。いずれも、上２桁下１桁に分解した場合と、上１桁下２桁に分解した場合とで計算を行った。

例>	3 7 8	3 7 8	8 0 4	8 0 4
	＋4 6 7	＋ 4 6 7	− 6 7 8	− 6 7 8
	8 3	7	1 3	2
	1 5	1 4 5		2 6
	8 4 5	8 4 5	1 2 6	1 2 6

この提案の特徴は、つぎの点にある。

1） 3 位数以上の加減算は、2 位数間の計算に還元して行う。あるいは、上の 2 桁とそれ以外の下の桁に分解して計算を行う(6)。

2） 2 位数間の加減算は暗算ができる程度まで習熟させ、その後にこの学習を行う。

3）計算の途中に書く部分和や部分差は町田の提案に従って、「メモ」と考える。

4） この計算から、加減算を中心にしてであるが、概算の考えを簡単に指導できる。

4 実際に教育して

上で提案した内容の一部を、1989年度東京都小金井市立第 2 小学校において森川みや子が実践した。その指導の概要はつぎの通り

＜授業の概要＞

① 1000までの数の学習を 6 月に行った。

ここでは、数え棒とかおはじきを使って10,100の束をつくらせ、十進数の加法的構造と乗法的構造を扱った。また、数の加減算は「ばら数」の考えを使ってではあるが、はじめは伝統的な尾加法と尾減法で行った。その後で、減法においてのみ、頭減法でも計算できることを指導した。これは、多くの子どもから「とても簡単にひき算ができる方法」と歓迎された。

② 10月に、十進数の乗法的性質をもとにするひき算を扱った

3 位数間の加減算の復習をするとき、数の乗法的十進構造に触れて、繰下がりのある引き算では上に例示したように、上の 2 位と下の 1 位に分割して計算を行うと早く答えが見つかる、ということを簡単に説明した。これは、一部の児童が使えればよい、という方針で行った。

③ 1990年1月末から2月にかけて10000までの数の学習を行う

ここでは、実際に100や1000のかたまりを作り、十進数の加法的ならびに乗法的構造を扱う。これらの構造を生かして、100とびや1000とびの数直線表示や一万までの数の加減算を行った。計算は初めの段階では「ばら数」の立場から行った。

その後、2位数間の加減算の暗算について扱った。しかし、この暗算を実際に使いこなせた児童はクラスの半数にとどまった。このことから、3位数の加減算を上2桁と下1桁に分割して計算することについては、この方法を用いると早く答えがみつかる、という程度の10月時と同様の扱いにとどめた。

<調査から>

授業終了後、つぎの2つの調査を実施した。

<A>1989/11/25実施のもの

① 質問紙法によるものから（被験者 29名）

問1に示した繰上がりや繰下がりのない加減算に関して、いろいろな計算順で計算させた。子ども達が行った計算順に関しては、つぎのような特徴がある。

1) 子ども達の全員が「ばら数」の考えで計算を行った。また、たし算では4名、ひき算では7名が上2桁と下1桁に分割した計算も行っていた。内訳は末尾に示した(7)。

問1 いろいろな やりかたで こたえを みつけましょう

$$\begin{array}{r} 213 \\ +\ 651 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 674 \\ -\ 351 \\ \hline \end{array}$$

2) たし算とひき算で児童が行った計算法の数

問2の計算題で、何種類の計算手順を見い出したのかを表1、2にまとめた。ひき算については考える時間が少なかったためか、計算の種類が少ない児童が目につく。また、表1および表2に見るように、加減算でともに3種類以上の計算手順を示したのはほぼ70%にあたる21名で、反対にともに2種類以下しか提示できなかった児童は10%の3名であった。なお、計算手順の種類を数えるとき、例えば、十の位にある数を先に計算した後、つぎに百の位で計算を行ったものと、つぎに一の位で計算したものとは別な方法として扱った。

児童があげた「ばら数」の考えにもとずく計算で、どの桁の数から計算をはじめたか、その桁とそれぞれの指摘者数を示したものが表3である。表に見るようにどの桁からもほぼ同数の指摘数がある。

表１）算数の成績が上位ないしは中位者（23名）が指摘した計算の種類

ひき算の手順数 ＼ たし算での計算手順の数	6	5	4	3	2	計
6	10名					10
4			1			1
3	1		2	5		8
2				2		2
1	1				1	2
0						
計	12		3	7	1	23

表２）算数の成績が下位者（６名）が指摘した計算の種類

ひき算の手順数 ＼ たし算での計算手順の数	6	5	4	3	2	計
6	2					2
4						
3						
2					1	1
1						
0	1	1			1	3
計	3	1			2	6

表３）「ばら数」に考えで計算を開始した桁とその児童数（29名）

たし算 1の位ｶﾗ	たし算 百の位ｶﾗ	たし算 十の位ｶﾗ	成績	ひき算 1の位ｶﾗ	ひき算 百の位ｶﾗ	ひき算 十の位ｶﾗ
23名	23	21	上中位	22	21	19
6	6	5	下位	2	3	2
29	29	26	計	24	24	21

以上見たように、「ばら数」の考えで計算法を指導すると、児童達はいろいろな桁から自由に計算を行うことができることに注目したい。

② 聞き取り調査から　（被験者５名）

上の質問紙法による調査と同日、下に示した計算問題をいろいろな手順で計算させた。なお、被験者５名の内、成績上位者は１名、中位者は３名、下位者は１名であった。

1）問２に対しては、初めはどの被験者からも各桁毎に計算する「ばら数」による方法でしか答えが返ってこなかった。そこで、

「こんな方法もあるのでは？」

と、数を上の桁と下の１つの桁に分割し、初め上２桁の計算を、次に下の１桁の数の計算する方法で計算してみせた。

問２　いろいろな　ほうほうで　計算の　こたえを　みつけましょう

362	305	612
＋174	－174	－276

すると、中位群と上位群の４名の児童は２番目以降の問題をこの方法を用いて計算を行った。

ここに見るように、児童の多くが上の２桁と下の１桁に区切って計算するという考えを使うことができる。しかし、２桁の数の暗算を学習していないので、彼らが行った計算の実質は、１位数間に還元して行うものであった。ただし、空位の０を含む問題では、２位数間の暗算から直ちに答えを求める児童が多かった。これは、空位を含む計算では、教師の側でしばしばそのような計算を行っていた、ということと並んで、下で述べる、繰下がりのあるひき算では繰下がっていく数を見越して計算が行われた、ということにも理由があると考えられる。

2）ばら数の計算では、つぎのような傾向がある。

＊減法計算では、いろいろな場面で、上の桁から下の桁へ計算を進める方法を用いて計算を行った。しかし、加法場面では、上の桁から下の桁へという計算の仕方もある、ということは紹介したが、この計算を日常的に使うことまではしなかった。この指導の影響もあって、児童が第一に採った計算法では、加法計算の場合、全員が１の位から上の位へたし上げていき、ひき算では、逆に、上の位から下の位へと計算を進める児童が５名中３名であった[8]。

ところで、ひき算を上の桁から計算した児童達は、いずれも、上２桁と下１桁に分解して計算する方が，１桁ずつ計算するよりも手早い、と反応した。

＊繰上がりある加法、繰下がりのある減法のいずれについても、４名の児童は繰上がりの数１や繰下がる１を見越して、答えにあたる数字を書き込んでいた。

＜Ｂ＞　1990/2/27実施

③　質問紙法による調査から（被験者28名）

１万までの数の学習が終わったあと、３週間後に質問紙法で計算手順に関する調査を行った。いくつかの結果をみてみよう。

問3　　362
　　＋574

の計算を　いろいろな
やりかたで　やってい
ます。

＜一ろう＞	＜花子＞	＜じろう＞	＜さゆり＞
362	362	362	362
＋574	＋574	＋574	＋574
8	6	93	8
13	13	6	136
6	8		
936	936	936	936

(1) それぞれの　人がやった　計算のじゅんを　かいてください

(2) 4人の計算の　やりかたで　わからない　やりかたが　ありますか

問3の(2)の計算でやり方がわからないものでは、＜さゆり＞の方法の8名、そして、＜じろう＞＜花子＞＜一ろう＞へそれぞれ1名と計11名から指摘があった。しかし、これらの子ども達も(1)の問に対しては、その「わからない」とするものについても、回答をよせていた。そして、その計算手順の指摘では、＜じろう＞の場合を除いては、間違いがなかった。

このことから考えると、＜さゆり＞の上1桁下2桁に分割する考え自体は指導していなかったが、この考えが「わからない」としているのではなく、百の位へ数が繰上がった、という計算の複雑さが「やり方がわからない」という回答につながったのでは？、と推定できる。

表4　＜じろう＞の計算順についての児童の回答状況（28名）

	学習成績が上中位者（23名）	下位者（5名）
百の位と十の位とから計算	16名	3
十の位と百の位とから計算	0	0
十の位から計算している	4	1
一の位から計算	3	1

また、表4に見るように、＜じろう＞の計算手順について「十の位から計算をしている」ととらえる児童がいる。この回答は、この場面ではふさわしいものではないが、問4とこの回答を重ねてみるとおもしろい結果が浮かび上がる。次節ではこれをも含めて、今回の実践から得た結果について述べたい。

5　十進数の乗法的構造を加減計算に生かすには…

以上、指導後の調査での児童の反応を見てきた。上の結果に見るように、十進数の乗法的構造を生かして加減計算の指導は、2年生でも扱える可能性が高い。しかし、反面沢山の問題もあることがわかった。以下、それについてまとめたい。

(1) 乗法的構造を生かした加減算を本格的には指導できなかったが、この計算を使えた児童は40%。

問4　いろいろな　ほうほうで
　計算　しましょう

```
   471        836
 + 386      - 381
 ------     ------
```

1990,2,27調査実施

表5　問4で、上2桁と下1桁に分割して計算した児童数　(28名中)

	上中位	下位
加法でも減法でも行う	8名	
加法のみで行う	1	
減法のみで行う	2	1

調査②の報告でも、また問3(2)の結果の報告でも見たように、児童は3桁の加減算を上2桁と下1桁に分割して行う方法自体にに困難さを感じていない。しかし、実際にこの立場で計算が行える児童は、この計算方法を十分には指導しなかったが、それでも、10月に試みた調査①の段階でのべ11名(/29)、2月に試みた調査でも表5に見るように、のべ12名(/28)と40%ほどいることには、注意したい。

(2) 繰上がり、繰下がりを見抜く力が乗法的構造を使って加減計算ができる源

乗法的構造を使って計算している児童の様子をみると、つぎの能力をもった児童達であることがわかる。

*1 この児童達は、繰上がりのある計算や繰下がりのある計算では、繰上がってくる数「1」や繰下がる数「1」をすでに見越して計算を行っている。こうした、同時に2桁の数を見て計算ができることが、この上2桁と下1桁に分割して計算する方法を使える1つの原因であると思われる。

*2 問4の計算題で、百の位や一の位から計算を始めるときは、「ばら数」的な各位毎に計算をしているが、十の位から計算をする、に相当する場面では、「ばら数」的な各桁毎の計算は行うことなく、上2桁の計算を一気にしてしまっている。

問4の(1)で、＜じろう＞の計算を十の桁から計算をした、と指摘している児童がいることを述べた。実は、この児童達が全員、問5の計算では、上2桁と下1桁の計算を行っている。

(3) 暗算の困難さをどう克服するか

十進数の乗法的構造を使っての加減算を指導するための前提として、1990年1月末に2位数間の加減算の暗算の指導を行った。児童達のほとんど全員近くが、「1位数＋1位数」の繰上がりのあるものも、「十いくつ－1位数」の繰下がりのあるものも瞬時に暗算で答えられる状態でありながら、2位数間で繰上がりのある計算とか繰下がりのある計算を暗算で行える児童は半数程度にとどまった。

これは、加減算の筆算で尾加法、尾減法を第一の計算として採用している児童がまだまだ多いとか、繰上がってくる「1」や繰下がっていく「1」への見通しがつきにくい児童がまだまだいることによるためであろう。このため、2位数間の加減算で「ばら数」の考えによる計算練習を習熟できる程度まで行う必要があると考えている。

「視暗算」を児童ができるようになると、数計算については、多様な方法を児童に身につけさせることができるようになる。この結果、今度は逆に、数計算をてこに整数の十進構造のもつ諸性質を明らかにすることができるようになる。

注 (1) 町田彰一郎「整数計算に関する一提案（1）」「数学教育学会研究紀要」、vol.13, no3/4, 1972, pp.64-75）

横地清　「筆算の形式と概算について」（数学教育学会研究紀要」, VOL.18, no, 1/2, 1977, pp.24-35）

(2) 数学育実践研究会書記局研究部、久留米サークル「私たちの算数教育の研究（第6集）－新しい数と計算への試み－」、同研究会、1978

(3) $\overset{(百)}{3}$ といった形式で位取りを表すことは、黒表紙教科書の尋常1年生の教師用解説に既にでている。しかし、現場がこの記号なり、この考えで指導していたわけではない。

例えば、稲次精一の「算術教材の建設と吟味と指導（下巻）」、郁文書院1931年刊、では、４年生の大きな数の読み取りに、アラビア数字で表現された数字の上に桁を示すとよい、と位取り板の考えに近いものが紹介されている。しかし、これを使って、加減算にまで発展させようとはしていない。

(4)　山岸雄策、村上博保、森川幾太郎「さんすうベストコーチー３、４年の数と計算ー」、近代新書、1975（例えば、数の乗法的仕組みについては、PP. 142-147)

森川幾太郎「整数指導の展開と問題点」，さんすうすうがく授業の創造NO. ２、近代新書、1977

森川幾太郎「小数の十進構造と計算法」、「算数数学の授業no. 17」、一光社, 1987, pp. 14-15

(5)　遠山啓は、私の十進数の加法的構造のことを「乗法構造」といっている。（遠山啓、銀林浩「水道方式による計算体系」、明治図書、1960, p17)

なお、十進数の乗法的構造について次のような問いで指導後の定着の様子を調べた。この事後調査にみるように、問(1)でも20%の児童に問題が残るほか、とりわけ問(2)の形式になると正しい児童が１割未満という点では大きな問題を残してしまった。

問(2)についていえば、ある位を単位にして数を表現することを学習すれば、１を単位にした場合へも簡単に転移できると考えて全く指導しなかった。この問(2)の結果からいえば、「位取り板」なども併用して、可逆的な視点も自由に使えるところまでの指導を必要とした。

問　□に あてはまる数を かきましょう

(1) 3816この りんごを　100ずつ はこに しまいました。りんごを しまった はこの 数は □です

(2) カーネーションを 10本ずつ たばに しました。いま、136この たばが　できました。たばにした 花の数は □です。

1990/2/27調査実施

結果は次の通り。

(1)では、正解22名　誤答　6名 →（誤答例 816… 3名　3716…2

(2)では　正解 2名　誤答 26名　　　　　　　　3800…1)

(6) 私は筆算による加減算は、３位数間まででよい、と考えている。日本語の数字の読みが万進法でもあるので、この点に留意すれば、４位数まで、ということも考えられるが。

(7) たし算で／　算数の成績上、中位23名中４名　成績下位4名中　０名
ひき算で／　　　　　　　　　　　　６名　　　　　　　　　１名
が上２桁と下１桁に分割して計算を行った。

(8)
$$\begin{array}{r} 213 \\ +651 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 674 \\ -351 \\ \hline \end{array}$$

で、一番はじめに行った計算を分類してみると、下の表のようになる。

	加法		減法	
	頭加法	尾加法	頭減法	尾減法
上位(6)	2名	4	0	6
中位(17)	6	11	11	6
下位(6)	3	3	3	0

<ABSTRUCT>

A PROPOSAL TO ADDITIVE CALCULATION USING THE MULTIPLICATIVE STRUCTURE OF DECIMAL STRUCTURE OF WHOLE NUMBERS　　Ikutaro Morikawa

The Japanese have not adequate expressoin to multiplicative structure of whole numbers as english have such "14teens". So, we have only taught additive calculation by using additive structure of whole numbers.

According to a popularization of calculators, We must change porposes of instruction for calculation and methods for its. Especialy, we must attach importance to rough estimate. But few pupils can understand to rough estimate. So, we need to develop useful methods which many pupils can recognize it.

In this article, I propose a method to solve this problem using the multiplicative structure of whole number and report some consequences of a prac tice which was done by my wife Miyako Morikawa for 2-grade pupils according to my proposal. We find that my proposal is able to practice, if pupils can use the calculation by "bara su" and do mental calculation.