東北数学教育学会年報
1990　3．31　第21号

教員養成（特に数学の教員）の一つの盲点
──プレサービス教師の初等幾何の知識の実態──

佐伯卓也（岩手大学）

最近の大学生（数学科）の初等幾何の学力が極端に落ちていることが良く話題になる。そこで、実態を調査してみた。結果は全くその通りで惨たんたる状態でショックを受けた。そのことを報告し改善策を提案する。

キーワード：初等幾何、大学生、教師教育、数学教育、新学習指導要領

0　はしがき

平成元年度の指導要領の数学、特に高校の数学を見ると、内容で大きく変化したものに、コンピュータの導入、平面幾何の復活等があげられよう。これらは一応選択教科のようだが、昭和46・7年以降の学部卒業の高校の数学担当教師にはインパクトを与えるに違いない。コンピュータについては一般に関心が高く、いろいろな場所で議論されているが、平面幾何についてはあまり議論はされていないように見える。

所で、わが国の幾何教育（図形教育）を見るに、昭和33年の指導要領だと思うが、高校で数学Ⅰ、Ⅱ、Ⅲとなった、その頃から伝統的な扱いの幾何教育があまり見られなくなり、中学に幾何教育が任される状態になって来たと記憶している。それが今でも続いていて、現行の指導要領が中学2年3年で平面幾何をやや伝統的な方法で扱うが、それだけで高校では特に扱われていると言う状態ではなかった。このためか、大学生に聞いて見ると、幾何の知識に乏しいことは分かっていたが、それが大学の若い教官にも波及し、入試採点時に「＜方べきの定理＞とは何ですか」と、知識のなさを全く恥じ入る様子も無く聞かれて驚いたこともあり、いまや伝統的な平面幾何は完全に過去のものとなったかと感じたくらいである。

ところで平成元年度の指導要領では、少し様子が違うように見える。

中学校数学では、Bの関数の代わりにB図形が来て、関数はCの数量関係に含まれている（2年はAとBだけ）。さらに高等学校数学では、

・A（2）平面幾何　ア平面図形の性質（ア）平面図形に関する基本的な定理（イ）条件によって定まる図形　イ平面上の変換（ア）合同変換（イ）相似変換

・内容の取り扱い（4）内容（2）のアについては、中学校での学習を基礎とし、それを拡充して、活用する能力を伸長する程度とする。イについては、変換の考えによって図形の性質を見直す程度にとどめるものとする、

とはなっている。特に高校の教師養成のことを考えるとき、今までとは異なり、幾何の伝

統的な扱いに触れざるを得ないように感じる。また、「変換」も登場することから、恐らく Klein の「変換群による幾何の定義」の思想も触れざるを得なくなると考えられる。

ところで、今回の新免法の公布に関連して、大学、特に教員養成大学学部におけるプレサービス教育の問題は緊急かつ重要な課題となって来た。制度的にも免許認定資格の再申請で、各大学学部で取り組んでいる最中である。数学について見ても、新免法に関連して数学科の必修も決定している。その中で専門教科の増加と並び「コンピュータ」が話題になっている。しかし、残念ながらあまり幾何についてはあまり話題にならないように見える。筆者はこれからの教師教育の盲点の一つは「教師教育における初等幾何教育である」として捕らえ、広く注意を喚起する意味も込めて本稿を計画した。

1 大学生の幾何の知識の実態

筆者は、現在の数学教師を希望する大学生の未来教師（prospective teacher）としての数学の基礎的な学力はどうなっているか、を知るために、全くの独断と偏見で、そのうえ、あまり深い検討もせず、筆者のかねてよりの考えに基づき、一応次の２群のテストを作った。「数学基礎テスト（１）」と「数学基礎テスト（２）［初等幾何］」である。これらはともに、大学学部３年次学生を対象にして作成した問題で、（１）は一般的な数学の学力（学生が今大学で講義されている数学の内容を古典数学と結び付ける学力があるのかどうかを見ることにも一部では配慮した<筆者はこれが数学の教師としての一つの大事な資質と考えている>）、（２）は初等幾何の学力を見るためのものである。

数学基礎テスト（１）

（１）ユークリッド平面は位相空間の例である、これを説明せよ。
（２）「一様連続」とただの「連続」との違いを例をあげ説明せよ。
（３）平面のデザルグの定理の、幾何学基礎論的な意義について述べよ。
（４）双曲的非ユークリッド幾何における $\cosh x \cosh y = \cosh z$ は、ユークリッド幾何の何にあたる式か説明せよ。
（５）円周率 π について知ることを記せ。

数学基礎テスト（２）［初等幾何］

（１）「方べきの定理」を述べ、証明せよ。
（２）「メネラウスの定理」を述べ、証明せよ。
（３）次の語を簡単に説明せよ。
　ｉ）三角形の傍心
　ii）アポロニウスの円
（４）「平行線の公理」について知ることを記せ。
（５）クライン（Klein, Felix 1849-1925;ドイツ）流儀の変換群による「ユークリッド幾何学」の定義を簡単に説明せよ。

被験者を東北大学理学部数学科３年次（Ｔ群）、岩手大学教育学部小学課程（非数学科）３年次（ＩＮ群）、中学課程・小学課程数学科所属３年次学生（Ｉ群）としてデータを採った。Ｔ群とＩ群は実験群として位置付け、授業の第１時間目の初めにテストをしたのに対し、ＩＮ群は対照群として、授業の内容としては初等平面幾何を含めて教科書（稲垣・佐伯、1979）を用いて講義を行い、授業の最後に期末試験としてテストをした。

次に結果を示す。基礎テストは（１）（２）ともに１０点満点（１題２点）である。

表１　基礎テスト（２）［初等幾何］

	Ｔ群	Ｉ群	ＩＮ群
人数	４３	２４	１３２
平均	０．７２	０．５０	３．５８
標準偏差	１．２５	０．７６	２．１０

表２　基礎テスト（１）

	Ｔ群	Ｉ群
人数	４１	２３
平均	１．９３	０．８３
標準偏差	１．５５	１．０９

基礎テスト（１）（２）とも、Ｔ群とＩ群の差を見るためにｔ検定で有意差を調べたが、有意差を見いだすには至らなかった（基礎テスト（１）でも、$t=1.84$（$df=62$））。ＩＮ群は条件が異なるので特に比較の検定はしなかった。基礎テストの平均も予想通りと言ってはおかしいが得点は高いとは言えない。一方初等幾何得点の平均を見ると予想以上に低く全く驚くだけである。ＩＮ群は授業をした後だから外の数学の授業後の成績と同じ程の点数だが、大学の数学科３年次学生、しかも将来数学の教師になろうとしている学生の幾何の知識は現在この程度であると強く認識すると同時に、未来教師としての一般数学の筆者の考える「基礎」（筆者の独断と偏見：数学者養成のための「基礎」もあるから）知識もこの程度である事実を認識すべきであろう。

２　数学科教育法の一つの実践例

筆者は岩手大学教育学部で昭和４３（1968）年頃より、「数学科教育法」通年４単位を担当することになり、多くの諸先輩の先生方にお教えを受けたり、多くの本を読んだり、来る年来る年が試行錯誤の繰り返しで現在に至っている。一応、教員採用試験も意識して、数学科教育法の取り扱う内容は伝統的な目標論、内容論、方法論、評価論そして教材研究の枠組みを保っているが、この間講義の内容の転機になった事項は三つあった。一つは昭和５３（1978）年頃から教育工学に深く拘わることになった結果の、数学科教育法の中へ

の「マイクロティーチング」（ＭＴ）の導入したこと（これは東北大学理学部数学科の集中講義でも実施したし山形大学教育学部でも１度実施したことがある）、二つ目は昭和５８（1983）年に Kerr and Lester（1982）の論文に出会ったことである。三つ目は、すぐには数学科教育法には取り入れなかったが、昭和５７（1982）年頃から始めたパソコンの数学教材作成の指導（数学教育特別講義の中で）がある。このパソコンは平成元（1989）年から、数学科教育法（前期）の中に取り入れたし、東北大学の集中講義の中でも実施した（佐伯、1989）。これは、新免法の施行に拘わって試行的に取り入れたものである。

今回の提案には、上述の三つの中では２番目の kerr and Lester の発言が関係しそうであるので、述べて見たい。アメリカと日本では文化の背景が全く異なるのでそのままの形では当て嵌まらないことを承知の上で、参考のために取り上げた。しかし、次の４つの不適切な理由は、なぜか日本の大学での現状にも当て嵌まるように見える。彼らは「セコンダリ教師の準備が、何故不適切であるか」として、４つの理由を上げている。①未来教師の目には多くの数学コース（方法とコース）が不適切である、②教師の準備のための数学の内容と方法の要素は社会の変化しつつある段階に合ってはいないし、また、セコンダリスクールカリキュラムの変化に調子が合っていない（cf. NACOME）、③セコンダリ教師にとって特に大切なある種の固定的な数学の内容の展開にあまり注意が払われていない、④すべての数学（トピック）には広げて良い big idea については、未来教師に対して強調が不十分である、と発言している。ここで big idea とは同値関係、無限大、構造などの数学の重要な広い概念の例として説明している。さらに彼らは、未来教師の数学の教育の考え方として、２次の行列としての考え方を例をあげて提案している。第１次元は、抽象代数、解析、幾何、線形代数、数学的モデルと応用数学、確率・統計の分野を取り上げ、第２次元は「キー数学トピック」「応用」「カリキュラム」「歴史」「リクリェーション」「ビッグアイデア」の観点を示している。例を少しあげる。

・抽象代数
（トピックス）６０°の角の三等分、５の非可解性、実数への有理数の拡張
（応用）原子構造と対称そして群、生活の中の線形性
（カリキュラム）高校代数の証明の役割、代数と算数の関係、代数と幾何の組み合わせ
（歴史）記号の発展、特別な問題を解くための代数専門の発展
（ビッグアイデア）同値、構造、証明、関係、分解、無限大、抽象化
・幾何
（トピックス）ユークリッド幾何の注意深い展開、定理の系列、非ユークリッド幾何、変換
（カリキュラム）高校幾何の目標、直感幾何の役目、変換
（歴史）公理の展開、ユークリッド幾何と非ユークリッド幾何の哲学的含意
（ビッグアイデア）モデルと真実、無限大

このほか、解析、線形代数・・・・と続くが、筆者はこれから、特にトピックを重視して数学科教育法の内容論を構成している。そのとき、留意することは、岩手大学なら岩手

大学の専門の数学の講義で触れられないトピックを重点的に取り入れて講義することにしている（この中で射影幾何の扱いが問題になっている）。その内容は
1）抽象代数（1．1）任意の角の3等分（1．2）5次方程式の非可解性（代数的に解けないことの証明）
2）解析（これは連続・極限、微分、積分と面積などだが、非数学科の学生のみの内容）
3）幾何（3．1）ユークリッド幾何の公理から始まる展開［合同を公理にしたり、平行の公理の独立性の証明は非ユークリッド幾何の成立で示されるなど、を含む］
（3．2）非ユークリッド幾何（この一部として球面三角法を入れている）（3．3）Klein の変換群による幾何の定義（3．4）トポロジー（これは非数学科の内容）
等となっていて、年により多少は異なるが、この内容は毎年後期の2単位で実施しているが内容の多い割合に時間不足で苦しい。また今年（1989）は前期のＭＴの代わりにコンピュータを指導したことで変則的な扱いになった（東北大学の集中講義も同様）。

3　今後の幾何教育への提案

前節のような実践の経験を踏まえて、本論である教師教育の盲点とした「幾何教育」について、独断と偏見を顧みず提案を試みる。もとよりこの提案は不完全であり間違いもあろうかと思うので是非ポパー的論駁を期待する。
（1）現在の数学科生に見られる「幾何」の知識のなさを克服するための研究プロジェクトティームを作り、科学研究費補助金の助成をうけて集中的な研究を推進する。
（2）理学部も含む、少なくとも数学の教師の免許を出す大学学部の専門数学のカリキュラムの中に初等幾何ないしは古典幾何の単位を義務付ける。
等はどうであろうか。新免法では数学科教育法が3単位から2単位に減るので、なおさら数学科教育法の中で、専門数学の講義を補う形をとることが出来なくなる。従って、専門数学のカリキュラムの中に未来教師の資質として必要な数学の講義がいるのではなかろうか。このためにも専門教科の中身について再検討されるべきと考えている。

ここでは主として幾何について述べて来たが、その他の内容についても同様で、教師教育では Klein が、かつて専門の数学の学部で行った「高い観点からみた初等数学」的な講義の必要性を痛感する。数学の教師としては位相空間の定義は出来るが、ユークリッド平面が位相空間の例になっていることが全然説明できないようでは、何のための位相空間の知識か分からないのではなかろうか。

少なくとも筆者が東北大学で数学の論文の指導を受けていた頃は、何か新しい定理とか理論には、必ず古典的数学での例とか応用例をつけなければ論文としての価値がない、と再さんにわたり指導を受けた。専門的な論文にはならないが、例えばの話で、「位相空間」が出てきたと仮定すれば、必ず位相空間の初等的な古典的な例を探し、それをユークリッド空間に求めるのが常であったと記憶している。この過程を踏まなければ、その数学の理論は単なるクイズになり、論理の遊びになるので、いくらでも論文を書くことが出来るこ

とになり価値がないのでそれは論文ではない、と戒められていた。このことは今でも生きているように思う。以上は専門の数学の論文の問題であるので直接教師教育には関係がないかも知れない。しかし、未来教師が専門数学の講義を受ける場面を考えるときは、専門の論文を書く以上に、いま習っている専門の数学が学校数学（school mathematics）にどのように関係し、どの学校数学の内容が対応しているかを知る必要があると考えている。従って未来教師の専門の数学を担当するときは、時には、未来教師の必須な資質を考慮して、単なる数学の学者養成とは異なる、現場のニーズにも答える意味での学校数学を意識した専門数学の授業をする必要があろう。

参　考　文　献

稲垣信夫・佐伯卓也（1979）基礎課程「幾何学」、森北出版、東京

Kerr, D.R and Lester, F K. (1982) A new look at the professional training of secondary school mathematics teachers, Educ. Studies in Math., 1 3, 431～441

佐伯卓也（1989）教育学部における新免許法に対応する教育の試み ―― 数学科新設教科「コンピュータ」の授業をにらんで、東北地区教育工学センター研究会プロェクト発表資料

A Remarkable Blind Spot of Teacher Education of Mathematics in Japan
―― The Critical State of Knowledge in Preservice Students about Elemntary Geometry ――

Takuya SAEKI
(The Faculty of Education, Iwate University)

(Abstracted)

Recently, having tested in mathematics class of some universities, we have been acquainted that preservice teachers scarcely have systematic knowledge about the elementary geometry. This is quite surprising fact. In the present paper, we have reported this fact and suggested some strategies and tactics for renovations.