東北数学教育学会年報
1991 3.31 第22号

ベルヌーイ試行列における無作為性，独立性がくずれていることへの判定

居駒和雄（富士大学）

1. 問題と実験結果

教養演習という受講生が21名の科目を担当し色々とりあげてみたなかに，古来有名なビュッフォンの針の問題とどこか似た次の問題があった：

「間隔が5cmの互いに直交する平行線が描かれた平らな模造紙上に，10円硬貨を無作為に投げる作業（試行といわれる）を，独立に何回もくりかえす（このような一連の作業は独立試行といわれる）とき，硬貨が丁度四つの正方形にまたがって落ちつく事象（以下これをEで表す）の相対回数の動きを調べ，これがEの確率P(E)に確率収束する（いわゆる大数の法則をみたす）ことを確認する．」

何故これを思い出したかというと，あのとき相対回数が病的と思われるような変な動きをしていたからである．なお，作業の結果特定の事象が起るか，起らないかにのみ留意するとき，その独立試行はベルヌーイ試行列（或は単にベルヌーイ試行）といわれる．

作業者が21名であるので，あらかじめ作業にあたっては，毎回硬貨を無作為に投げることだけ注意した。各自500回をめどにくりかえすなかで，2000回ごとに1班から5班に亙って積みあげて行くことにして，次の結果がえられた。

表1

回数 n	2000	4000	6000	8000	10000
Eの回数X	301	732	1022	1425	1733
相対回数 $\frac{X}{n}$	0.1505	0.1830	0.1703	0.1781	0.1733

グラフを描いて相対回数の動きをみると，大体の感じとしてEの確率 $P(E)=\pi\left(\frac{2.3}{2}\right)^2/25 \fallingdotseq 0.16619$（ここで，10円硬貨の直径は 2.3 cm とした）のまわりを，上下に変動しながら，多少動きがにぶいようにはみえたが P(E)（以下これを単に p とかく）に近づいて行くきざしがみられた。作業をも少し続けて，大数の法則をよりはっきり確認させたいと思い，次週までに各自500回ぐらい追加して来ることとした。次週にそれを積みあげて次表がえられた。

表2

回数 n	12000	14000	16000	18000	20000
Eの回数X	2032	2308	2650	2896	3098
相対回数 $\frac{X}{n}$	0.1693	0.1649	0.1656	0.1609	0.1549

2. 実験結果のチェビシェフの評価式による考察

表2によると相対回数はおおむね漸減傾向をたどり，驚いたことに 18000～20000回の段階では，先の1万回の段階よりも p から遠ざかってしまっている。このような結果になったのはやはりどこかおかしいといわざるをえない。これを調べるために，大ざっぱではあるが，先ずチェビシェフの評価式を用いて考察してみた。その前に，各段階でEの相対回数の

正の確率pからの偏差 $\frac{X}{n}-p$ を求めてみた（表3参照）。

表3

n	2000	4000	6000	8000	10000
$\frac{X}{n}-p$	-0.0157	0.0168	0.0041	0.0119	0.0071

n	12000	14000	16000	18000	20000
$\frac{X}{n}-p$	0.0031	-0.0013	-0.0006	-0.0053	-0.0113

これに対して，$\left|\frac{X}{n}-p\right|$ については，チェビシェフの評価式から，任意の $k>0$ に対し

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right| \geqq k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \leqq \frac{1}{k^2}$$

がなりたつ。ここで $\frac{1}{k^2}=0.10,\ 0.05,\ 0.01$ としたときの $\left|\frac{X}{n}-p\right|$ の下の限界 $k\sqrt{p(1-p)/n}$ をそれぞれ $\varepsilon(0.10)$, $\varepsilon(0.05)$, $\varepsilon(0.01)$ とかくことにすると，これらは次のように求まる（表4参照）。

表4

n	12000	14000	16000	18000	20000
$\varepsilon(0.10)$	0.0107	0.0099	0.0093	0.0088	0.0083
$\varepsilon(0.05)$	0.0152	0.0141	0.0132	0.0124	0.0118
$\varepsilon(0.01)$	0.0340	0.0312	0.0294	0.0277	0.0263

n	2000	4000	6000	8000	10000
$\varepsilon(0.10)$	0.0263	0.0186	0.0152	0.0132	0.0118
$\varepsilon(0.05)$	0.0369	0.0263	0.0215	0.0186	0.0167
$\varepsilon(0.01)$	0.0832	0.0589	0.0481	0.0416	0.0372

表3の結果を表4と対照してみれば，1万回までのような結果や16000～18000回におけるような結果は10％以下の確率でしか起らないこと，18000～20000回におけるような結果は約5％の確率でしか起らないことが分る。なお，8000回以降相対回数はおおむね漸減傾向を続けていることをも合せ考えると，各作業の無作為性と作業間の独立性とに疑問が生ずる。

3. ラプラスの極限定理による診断

この疑問を解明するために，ラプラスの極限定理を用いてみる。すると先にチェビシェフの評価式によって求めた $\left|\frac{X}{n}-p\right|$ の下限界よりも厳しい（小さい）下限界がえられる。すなわち，X は2項分布 $B(n,p)$ にしたがう（これを $X\sim B(n,p)$ とかく）が，n は十分大きい場合であるから，近似的に $X\sim N(np, np(1-p))$ がなりたつ（これはラプラスの定理による）。したがって近似的に

$$\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}=\frac{X/n-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}\sim N(0,1)$$

となる。これより，近似的に

$$P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\geqq e(\alpha)\cdot\sqrt{p(1-p)/n}\right)=\alpha$$

（ここで，$\alpha=0.10$ のとき $e(0.10)=1.64485$；$\alpha=0.05$ のとき $e(0.05)=1.95996$；$\alpha=0.01$ のとき $e(0.01)=2.57583$ が正規分布表からえられる。）がなりたつ。これより n の各段階で，$\left|\frac{X}{n}-p\right|$ の下限界 $1.64485\sqrt{p(1-p)/n}=\varepsilon(0.10)$，$1.95996\sqrt{p(1-p)/n}=\varepsilon(0.05)$ および $2.57583\sqrt{p(1-p)/n}=\varepsilon(0.01)$ は次の表5に示すように求まる。

表5

n	2000	4000	6000	8000	10000
$\varepsilon(0.10)$	0.0137	0.0097	0.0079	0.0068	0.0061
$\varepsilon(0.05)$	0.0163	0.0115	0.0094	0.0082	0.0073
$\varepsilon(0.01)$	0.0214	0.0152	0.0124	0.0107	0.0096

n	12000	14000	16000	18000	20000
$\varepsilon(0.10)$	0.0056	0.0052	0.0048	0.0046	0.0043
$\varepsilon(0.05)$	0.0067	0.0062	0.0058	0.0054	0.0052
$\varepsilon(0.01)$	0.0088	0.0081	0.0076	0.0071	0.0068

表1，2によれば，相対回数は8000回まで異常に漸増したため，それ以降一方的に漸減して行ったけれども，10000回から16000回までは表面的には問題は出なかった。しかし上の表5によれば，10000～16000回を除いた殆どのところでえられたような結果は，1%～5%の確率でしか起らないものだという厳しい診断が下される。

4. 判断と反省

以上から，この硬貨投げのほぼ全般に亙って，各作業が無作為で，作業間が独立であることを認めるのは難しい。むしろ作業の無作為性や作業間の独立性はくずれていて，そのために相対回数の動きに異常な癖や偏りが生じたというのが無理のない見方であろう。つまり統計的にいうと，ほぼ全般に亙って，作業の無作為性や作業間の独立性は，危険率1%～5%でくずれていると判断される。このようになった直接的，具体的な原因としては，各自毎回全く同じような投

げ方に終始したのではないかということと，実際の作業者数が漸減して行ったのではないかということが想像される。ともかくこれで，無作為性とか独立性とかは易しいようでそれほど易しくはないことが教えられたのである。

Criterions for the randomness and independence to be broken in the sequence of Bernoulli trials

Kazuo IKOMA

Faculty of Economics, Fuji University

Abstract

The purpose of this note is to give criterions with a certain significant level for the randomness and independence to be broken in the sequence of Bernoulli trials. The same argument can be proceeded to any sequence of Bernoulli trials, and so we here deal with the following concrete example.

Consider the trial throwing down 10 yen coin at random on the plane where two systems of orthogonal parallels mutually with intervals of 5 cm are described, and denote by $\mathbb{E}$ such an event that the coin stands still over just four squares. Repeating such a trial independently over and over, we introduce the random variable X_i by $X_i = 1$ or 0 if the result of the ith trial is $\mathbb{E}$ or not $\mathbb{E}$. Then, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ is a sequence of Bernoulli trials.

Now, it is well known that there holds for any $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - p\right| \geqq \varepsilon\right) = 0$$

(the so-called law of large numbers), where p means the expectation of X_i ($i = 1, 2, \cdots, n$). On the other hand, Tchebychev inequality gives for any $k > 0$ the following estimation

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqq k\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \leqq \frac{1}{k^2},$$

where X means the sum $X_1+X_2+\cdots+X_n$. Denote by $\varepsilon(0.10)$, $\varepsilon(0.05)$ $\varepsilon(0.01)$ respectively lower bounds $k\sqrt{p(1-p)/n}$ of $|X/n - p|$ for $1/k^2 = 0.10$, 0.05 and 0.01, then these are given in the table 4 mentioned in this note. On the contrary, by using Laplace's limit theorem, $\varepsilon(0.10)$, $\varepsilon(0.05)$ and $\varepsilon(0.01)$ are obtained more strictly as in the table 5 mentioned in this note, where

$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geqq \varepsilon(\alpha)\right) = \alpha$ for $\alpha = 0.10$, 0.05 and 0.01.

Then, we can infer with a certain significant level whether the randomness and independence among trials to nth from the last time are broken or not, by observing the behabior of the relative frequency (the experimental probability) X/n . That is to say, it will be difficult to admit the randomness of each trial and the inter-independence among trials to nth from the last time, if X/n satisfies $|X/n - p| \geqq \varepsilon(0.10)$. And it can be inferred that the above randomness and independence are broken with the significant level 0.05 or 0.01 respectively, if X/n satisfies $|X/n - p| \geqq \varepsilon(0.05)$ or $|X/n - p| \geqq \varepsilon(0.01)$.