東北数学教育学会年報
1991 3. 31 第22号

「証明」についての基礎的研究
－「帰納」と「演繹」について（その3）－

北海道教育大学　釧路分校　杉山佳彦

キーワード；演繹、帰納、証明、数学教育

1　はじめに

筆者はこれまでに、『「帰納」と「演繹」についての考察』として以下のような諸点を述べてきた。

中学校の論証幾何においては、数学の中で行われる推論のうちで、「演繹」的推論が特権的な地位をしめるわけであるが、その際の理由としてあげられる『「演繹」的推論は確実であるが、「帰納」的推論は不確実である。』という観点にたいして、

1　知識社会学におけるストロングプログラムを適用した場合、この主張それ自体がある種の相対化をまぬがれえず、この知識もまた社会的成分（学級の雰囲気、教師の態度など）によって初めて「確実視」されるものである(1)。

2　「演繹」的推論のうちの意識された「形式」にもとづく推論と「帰納」的推論のうちの「証明」を帰納するものとを比較した場合、「確実性」という点からは区別がつかず、したがって、この観点から見た場合には「演繹」的推論には、「確実なもの」という点からは、特権的地位をしめるに至るいわれがない(2)。

3　「演繹」的推論のうちの意識された「形式」にもとづく推論は、命題の正しさ（「確実性」）を保証するよりもむしろ、解釈の多様性を排除するものとして機能する(2)。

このうちのとくに3から、このような「演繹」的推論のもつ機能は「議論」あるいは「コミュニケーション」といった場面でよりよく発揮されるであろう、ということが推測できる。これは1で述べた「社会的成分」の内容をある程度分析可能なものにするものと考えられる。

ところが、この意識された「形式」のもつ機能は、「排除」以外にもありうる。本小論では、この点に焦点を当てる。

2　一つの事例から

本事例は、筆者が勤務校の数学専攻生にたいしておこなった授業からのものである。対象；数学専攻生（３年生）２７名

まず、次のような問題を提示し、解くよう求めた。

> ①　整数 p が２でも３でも割り切れないとき、p^2-1 は24で割り切れることを示せ。
>
> ②　整数 p が２でも３でも５でも割り切れないときに、p^4-1 は240 で割り切れることを示せ。

次ぎに、証明[3] を提示した後、この二つはともに、

「整数 p が～で割り切れないときに、－は…で割り切れる。」

という形式であることを指摘したうえで、③としてどのような命題が成り立つかを考えさせた。

「～」の部分には２、３、５、７がくるであろうことで一致を見た。この点で一致を見るまでには議論はほとんどされなかった。その理由をたずねたところ、「素数であろうから」という点でも一致を見た。

「－」の部分については、多くは「p^6-1」と考えた。が、「p^8-1」としたものも３名ほどいた。前者の理由は、「２、４、…は偶数であろうから」というものであり、後者の理由は、「②の証明で

$$p^4-1=(p^2-1)(p^2+1)$$

を用いたから、

$$p^8-1=(p^4-1)(p^4+1)$$

であろうと考えた」、というものであった。この議論の後、前者を選択したものの何人かは後者に予想を変え、予想を変えなかったものもその理由に、

$$p^6-1=(p^3-1)(p^3+1)$$

が利用できることを加えた。

「…」の部分については、「２４００」がくるであろうとしたものが２名、また、「$2^5\times3\times5\times7$」であろうとしたものが６名ほどあったほかには、「分からない」とした。前者の理由は「２４、２４０，…となっているから」というものであり、後者の理由は「$24=2^3\times3$，$240=2^4\times3\times5$ であって、しかもなんらかのかたちで７が関係してくると思われる」という

ものであった。「２４００」をあげた学生に、④を考えるとしたらなにがくるか、とたずねたところ、「２４０００かな？」と答えた。その結果、「分からない」としたものはほとんどが後者に賛成した。しかし、「２４００」と答えた学生たちは考えを変えようとはしなかった。その理由をたずねたところ、「やってみなければ分からないから」と述べた。

その後各自の考えた③が正しいといえる否かの検討にはいったが、時間の不足のため結論にまでは至らず、授業者の側から「フェルマの小定理」(4)との関係付けが可能であること(5)を示唆して終了した。

<本事例についての考察>

「～」部について

ここは「2、3、5、…」によって与えられた数列の第４項を帰納するものであると見ることは可能であろう。しかし、学生たちの反応は、この数列の第４項を推定する場合とは明らかに異なっているように思われる。というのは、この場合に当然でてくると思われた「2、3、5、8、12、17、…（階差が自然数列）」はまったく考慮されていないからである。これは、ここでの問題が「整除性」についてのものであり、それゆえ「素数である」とみることが、より自然であると判断されたためと考えられる。

「－」部について

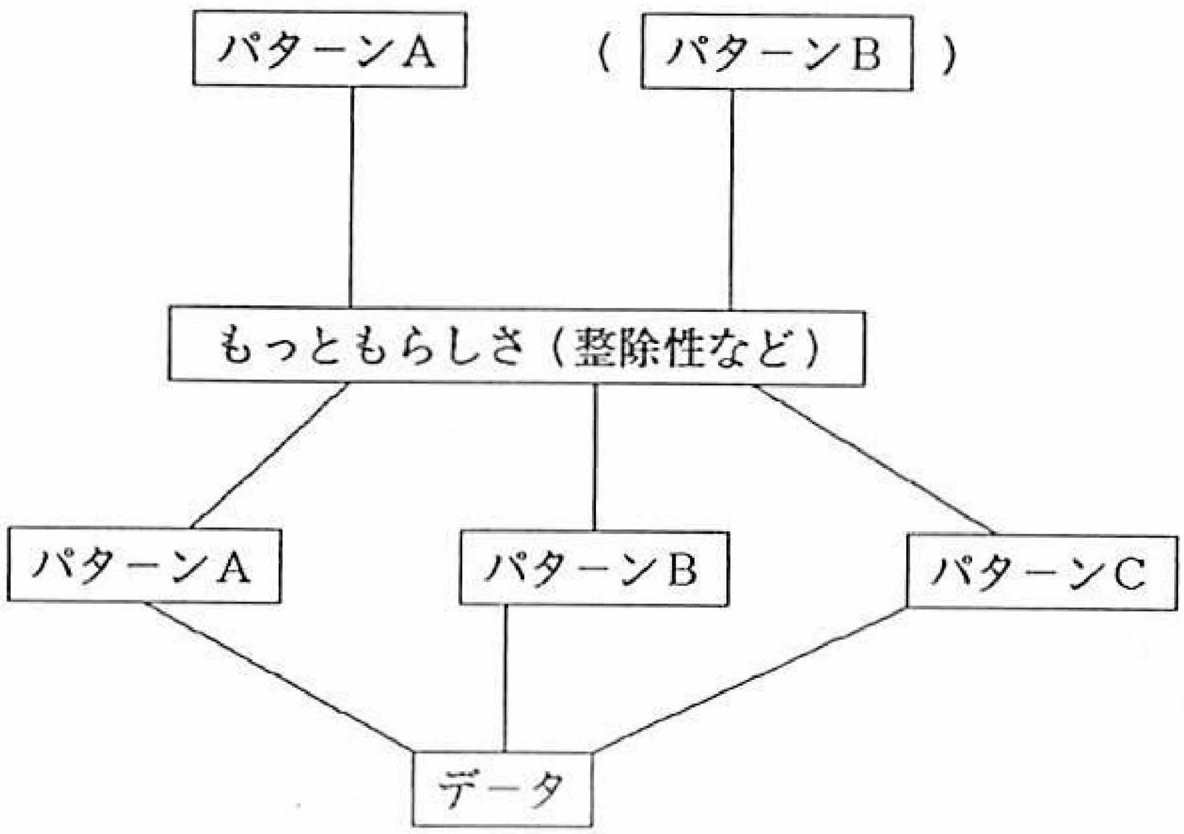
「p^6-1」としたものは当初、「2、4、6、8…」といった偶数列としてのみ見ていた。しかし、「p^8-1」としたものたちが述べた理由に触発されて新たな理由を見出だし追加した。とはいえ、「p^8-1」とした場合には②が利用できるが、「p^6-1」とした場合には利用できない、という点で困難を感じたようであった。「p^8-1」のほうに考えを変えたものがいることはそのことを示唆すると思われる。確認したことではないが、前のケースが利用できるかもしれない、という可能性が意見を変えさせることに繋がったのは、学生たちが数学的帰納法を意識したためかもしれない。

「…」部について

多くのものが判断を保留した。しかし学生たちの反応から見て、出てきた推測のうちの「２４００」は予期されたものであったらしかった。もしそうであったとすれば、にもかかわらず「分からない」と反応した理由が問題になろう。これはおそらく、「～」部と同様に、ここでの問題が「整除性」についてのものであるにもかかわらず、「24、240、2400、…」とい

うパターンが「整除性」に密接に関連したものであるとはいえそうにない、といった判断があったからと思われる。一方、「2^5 ×3×5×7」という予測は「整除性」との関連を意識したものと思われ、さらには、「～」部の影響、2^n というパターンの変化までをも考慮したものになっており、もう一つの推測である「２４００」に比較してもっともらしいものに思える。

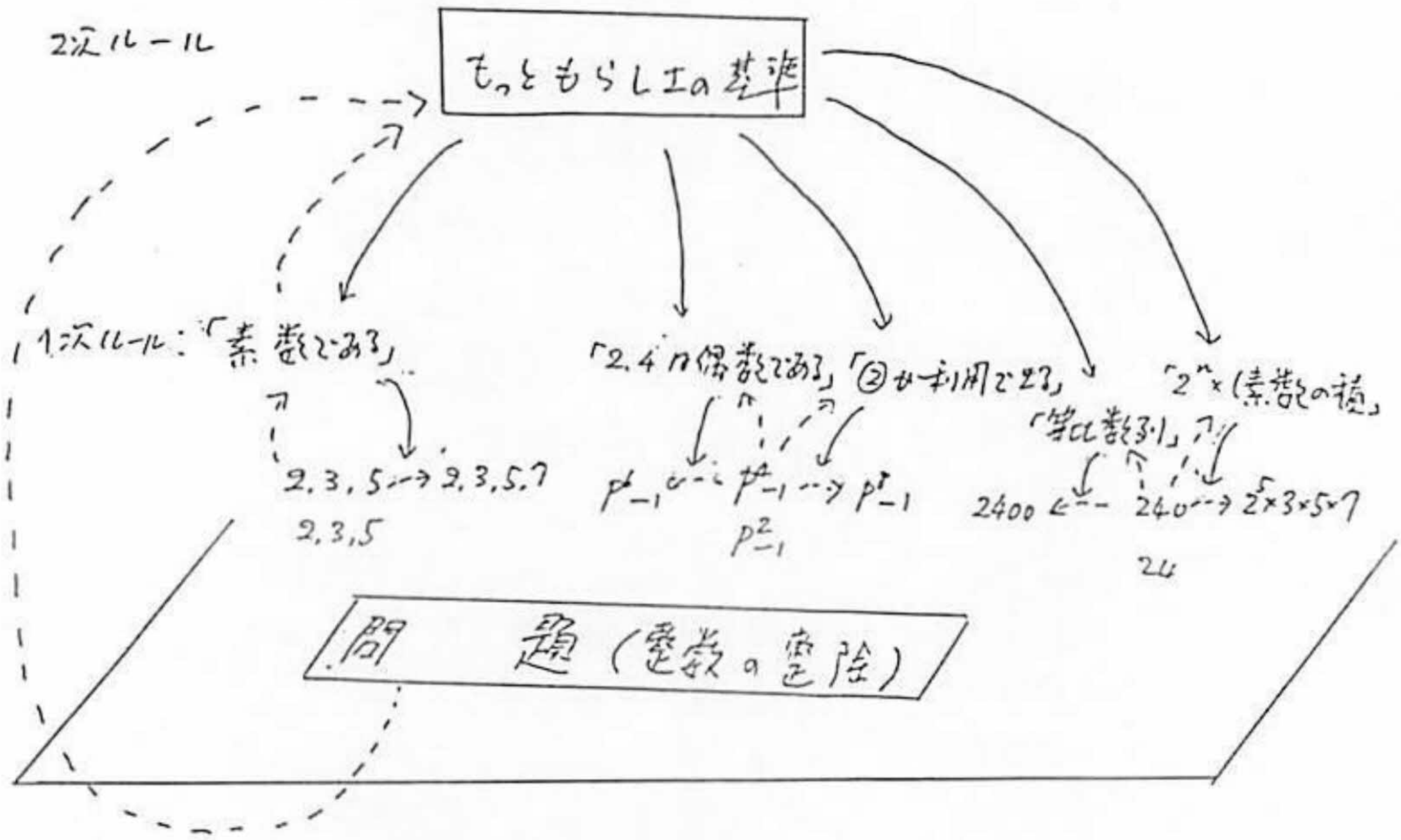
ここで取り上げた「帰納」的推論を図式化して示すと、次ぎのようになる。いずれの場合においても、与えられたデータからいくつかの「パターン」が識別され、このいくつかの「パターン」から最も「もっともらしいもの」を選びそれが仮説として選択されて行く、というプロセスを経る。この問題での「もっともらしさ」の基準は、おそらくこれが「整除性」についてのものであることに関連したものであろうと思われる。



なおここでの例でみたように、先行する「「～」部は、2、3、5、7であろう」という「帰納」的推論の結論が、不確実なものであるままに、「…」部の「パターン」を選択するための「もっともらしさ」の基準として入ってくることがある。すなわち、「もっともらしさ」の基準には過去の学習経験からえられた知識（定理、公式、数学的事実、あるいはより蓋然的な知識、例えば整除性に関する議論には素因数分解が関連するなど）のほかに、その場で帰納的に得られた知識も入りうる。さらには、この「もっともらしさ」の基準は、先に述べた「…」部に「２４００」を入れたまま変えようとしな

かった学生の場合にみられるように、選択された「パターン」を変えざるを得ないとするほど強制的なものではない。しかし、判断を保留していた学生たちに「2^5 ×３×５×７であろう」という判断を下させる程度の強制力は、もっているものと考えられる。この「強制力」の由来は、ここでの場合おそらくは、「整除性に関する議論には素因数分解が関連する」という基準と、「整除性に関する議論には等比数列が関連する」という基準を比較した場合、前者のほうがもっともらしい、という判断に由来するものであろう。

ここで留意したいことの一つは、「帰納」的にえられる一定のパターン（形式）はつねに複数存在しうる、という点である[(6)]。それゆえ、これらから「もっともらしさ」の基準に合致するものをなんらかの形で選択する必要に迫られることになる。この状態は次ぎのように図式化できよう。（ここでは、拙稿（７）において取り上げた「１次ルール」と「２次ルール」の図式を利用した。）



・矢印は全て「設定」関係、
「→」は判断・裁量機能
「-->」は推測機能

<この事例からえられる一般的示唆>

「…」部についての考察から次のことが指摘できる。ここであらわれた「…」部の候補は「２４００」、「2^5 ×３×５×７」であったが、これはそれぞれが、

「２４、２４０…は等比数列である」

「２の巾と前提にあらわれた素数の積であり、巾は等差数列である」

といった判断に由来する。そしてこの判断自体は「もっともらしさ」という一種のフィルターを通してあらわれたものである。しかし、この判断はその後、判断を保留したものたちにたいして、どちらがよりもっともらしいかを判定する対象として機能する。また、この場合の判定は、とくに「等比数列」という一般的なパターン（形式）と、「素数の積」・「等差数列」という一般的なパターン（形式）のどちらがよりもっともらしいか、という判定になるが、それはおそらくはこの問題が整数の整除性に関わるものである、というより根底的な判断に依存して定まるものであろう。

３　結語～今後の課題

本小論では意識された「形式」」のもつ機能として、「排除」というもののほかに、「帰納」的にえられたほかの解釈との間での「もっともらしさ」の比較の対象として機能することがありうることを述べた。本稿では明確にのべることはできないが、ここでの学生たちの議論が「１次ルール」、「２次ルール」という見方によってある程度整理できることから、Van Hiele の学習水準が関係してくるようにも思われる。この問題は今後の課題である。

また、ここでの推論は「もっともらしさ」に関わるものであることから、「証明」のもつ「保証的側面」に関係するものと考えているが、いったんえられた「一般的命題」では満足ができないという事態が起これば、ここから「生産的側面」との関連が出てこよう。この点も今後の検討課題である。

今回は時間の不足で実際には行わなかったが、この問題を前述した「フェルマの小定理」との関連で考えさせると、また異なった面があらわれるであろう。というのは、この場合には、もっともらしさの一つとして「数学的定理」があらわれるからである。これも今後の課題である。

なお、今回はまったく考察の対象に加えていないが、ある集団内である推

測をのべた人間の、その集団内での「地位」も「もっともらしさ」の基準として入りえよう。この問題についての検討も今後の課題である。

参考文献および注

（１）　拙稿；「演繹」と「帰納」についての一考察
数学教育学研究紀要　第13号、1987、西日本教育学会

（２）　拙稿；数学教育における「証明」についての基礎的研究
－「帰納」と「演繹」についての考察（２）－
第23回数学教育論文発表会論文集、1990、日本数学教育学会

（３）ここで示した証明は次ぎのようであった。

①の証明

$p^2-1=(p-1)(p+1)$であり、仮定から$p=2\times n+1$。

このとき、$p^2-1=4\times n^2+4\times n$

$=4\times n\times(n+1)$

ここで$n\times(n+1)$は偶数であるから、p^2-1は８で割り切れる。

また、仮定から$p=3\times k\pm1$であるから、$p-1$、$p+1$のいずれかが３　で割り切れる。

よって、p^2-1は２４で割り切れる。

②の証明

$p^4-1=(p^2-1)(p^2+1)$である。①より、p^2-1は２４で　割り切れる。また、pが奇数であることからp^2+1は偶数である。それゆ　え、p^4-1は24×2で割り切れる。

また、仮定から$p=5\times m\pm2$、$5m\pm1$とおくことができ、

$p=5\times m\pm2$のときはp^2+1が、$p=5m\pm1$のときはp^2-1が、５で割り切れる。

よって、p^4-1は２４０で割り切れる。

（４）nが素数であるとき、$p^{n-1}-1$はnで割り切れる、という命題。なお、これには他の形式のものもある。

（５）例えば次ぎのような関係付けが可能である。

pが２、３、n（nは素数）で割り切れないときに、$p^{n-1}-1$は$24\times n$で割り切れる。

この一般命題は①を特殊な場合として含むが、②を含むことはない。その

意味では、②はこの一般命題の例外的なケースとしてみなされる。また、その特殊性が「５」という数の特殊性によるか否かも問題になる。この命題では不十分である、という判断に立てば、「フェルマの小定理」との関係付けもあるいは断念されるかもしれない。

（６）この事例の他のものは、文献（２）にあげている。

（７）拙稿；数学教育における「証明」についての基礎的研究
　　－「証明」の位置付けについての考察（１）－
　　数学教育学研究紀要　第15号、1989、西日本数学教育学会

本小論は、1991年 2月 3日に開催された西日本数学教育学会第41回例会（於松江）において発表したものに加筆修正を加えたものである。

Fundamental Studies on "Proofs" in Mathematics Education
- on induction and deduction(3)-

yosihiko Sugiyama
Hokkaido University of Education, Kushiro College

abstract

In this paper,I discuss functions of awoken "form" in mathematical discussion.I analyze responses of students to the following problem.

Problem

① if $2 \nmid p$, $3 \nmid p$ then $24 \mid (p^2 -1)$

② if $2 \nmid p$, $3 \nmid p$,$5 \nmid p$ then $240 \mid (P^4 -1)$

where p is a natural number.

If we make up the proposition ③,which propositions are more suitable?

The result of this analisys is that the forms in the discussion is functioning as the subjects that sutents compare in order to compare some conjectures.