

## 中学校数学のパソコン利用の授業(4)

— 傾き関数から微分へのアプローチ —

佐伯 卓也(岩手大学)

協力者: 千田智子・藤野恵里  
(平成3年度岩手大学教育学部4年次学生)

傾き関数のパソコンソフト開発はこれが2回目である。1回目は1985年アメリカの Lappan and Winter(1982) の "slope function" に触発されて試みた。当時はパソコンもPC88シリーズで授業もマイクロクラスであった。今回は附属中学のCAI教室で正規の授業の中の試みであった。生徒は例外的に3年を使った。結果はP-PグラフではⅢ型であり、距離法からは成功的であったが、トータルとしては、教材の性格もありそれほど成功的ではない。

[キーワード] コンピュータの教育利用、中学校数学、教師教育、接線傾き関数、コンピュータ利用の非CAI的授業

### 1 はしがき

1990年度からパソコン化授業の実践的研究は、従来と異なり40人の普通のクラスサイズで、しかも、通常の学校の時間帯で50分授業の形態で行うことになった。今年度1991年度もそれを踏襲することになった。

本研究の主題の傾き関数はアメリカのLappan and Winter(1982) の "slope function" の先行研究に由来する。筆者は一度これをもとにして「ふくらまし教材」と位置付けパソコンソフトを開発し授業実践をした。しかし当時はパソコンはPC88で8ビットマシンであり、しかもパソコンは1セットであり、少数の生徒のマイクロティーチング形式の授業であった。今回はこれらの先行研究の経験を取り入れ、授業内でのパソコンのグラフィックにより、2次に比例する量と3次に比例する量としての関数であるが、もとの関数と導関数の関係の理解まで拡大を試みた。

一方、この研究も含めて今年度のパソコンソフト開発で図形の移動にかかわるものはすべてアナログ的に行う、という方針を決めた。このことについて触れる。ここで“アナログ的”というのは、画面上に三角形等の図形を描いたり、描いた図形を動かしたり、拡大・縮小をするのに“→、←”等の矢印キーを用いたり、4、6、2、8等のテンキーを用いて行うことをいう。これに対し三角形を描くのにその頂点の座標を数値で入力して行ったり、図形を動かすのに動かす量を数値で入力する方式をデジタル的と言っている。

1990年度の研究が普通クラスサイズでの授業に力点があったのに対して、1991年度は前年に問題になった図形を動かす方式に力点を移しアナログ的な移動法を試みることになったわけである。

ところで一般に図形をアナログ的に動かす方法には、INP関数の利用、INKEY\$

の利用、INPUT\$の利用、PEEK関数の利用、単純なテンキー利用がある。これらにはそれぞれの特徴があるが、本研究ではINKEY\$を利用した。

## 2 授業設計と教材開発

### 2.1 授業設計

まず、学習指導案を示す。授業対象は、岩手大学教育学部附属中学校3年C組（男子20名、女子20名、計40名：当日授業時は男子19名、女子18名、計37名）、授業日は1991（平成3）年12月9日（月）5校時であった。

1、単元名 いろいろな関数

2、授業者 千田 智子 共同研究者 藤野 恵理

3、本時のねらい パソコンを用いて関数とその導関数の関係を理解することができる。

4、展 開

段階	学習内容	学 習 活 動	指導上の留意点	時間	教具など
導 入	既習事項の確認 関連用語の導入 課題提示	1. 2次関数の復習 2. 接線の概念の導入 3. 本時の学習課題	・2次関数の性質を確認させる ・パソコンを用いて理解させる (一斉送信)	7分	学習プリント 板書 パソコン
		関数の接線の傾きの関係を調べよう	・教師側からの提示		
展 開	課題追求         一般化 適用・練習	4. (1) $y=x^2$ の傾きをパソコンで求め表に表す。 ・関係式を導きパソコンで確認する。  (2) $y=x^3$ の概形把握 ・ $y=x^3$ の接線の傾きをパソコンで求め表に表す。 ・関係式を導き、パソコンで確認。 (3) $y=3x^2$ の導関数を(1)(2)の結果から予想する。 ・パソコンで関係式を確認。 5. 導関数の一般化をはかる 6. 適用問題	・パソコンで実際に傾きの値を探させ、表を作成させる。 (一斉送信解除) ・表から式を導かせる。 ・パソコンで導関数を視覚的に確認させる。 ・3次関数のグラフの概形を理解させる。 ・パソコンで実際に傾きの値を探させ、表を作成させる。 ・表とグラフの概形から式を導びかせる。 ・導関数を導き出した根拠を話し合わせる。 ・導関数を一般化させる。 ・パソコンで確認させる。 (一斉送信)	25分 5分 10分	学習プリント 板書 パソコン
終結	まとめ	7. まとめ		3分	

板書計画は略す。また、学習シートの要点は次の通りである。

[1] 2次関数の復習と接線の概念の導入。

- [2] 課題。教師から提示した。
  - [3] 授業の流れの中では展開の部分にあたり、パソコンを操作させることで知り得た事柄を記入させる。
  - [4] 導関数を一般化させるための内容。
  - [5] 適用問題。
- となっている。

## 2.2 教材開発

授業実施の教室は、岩手大学教育学部附属中学校C A I教室である。ここにはパソコンとしてP C - 9 8 0 1 E X親機1台、子機20台があり、ランシステムはP Cゼミで接続されている。また付属機器としてはV T Rとビデオカメラが接続されていて、必要なときは子機の画面に一斉送信で提示できるようになっている。このようなシチュエーションなので、非C A I的授業は当然のことながらメディアミックスの型になる。しかし、本時の授業ではパソコン画面だけの提示と生徒のキー操作のみになった。

プログラムの構造は[A]～[J]のそれぞれ独立した文節プログラムからなる。これらの関係は

$$[A] \Leftrightarrow [B] \rightarrow [C] \rightarrow [D] \rightarrow [E] \rightarrow [F] \rightarrow [G] \rightarrow [H] \rightarrow [I] \rightarrow [J]$$

のようになっている、流れが直線的である。かつ、 $\Leftrightarrow$ のみリターンキー、外の $\rightarrow$ はS T O Pキーを押すことにより次の文節プログラムに進むように単純化してある（従って、S T O Pキーは押しても本来の働きはしない）。これは、このクラスはまだ一度もC A I教室で授業を受けた経験がなかったという事情からきている。

[A] (1-230) はタイトルデモである。

[B] (1000-1980) (図1) は「 $y=x^2$ のグラフを示し、 $x=1$ におけるグラフ上の点をAとし、Aを通る任意の直線がまたこの放物線との交点をPとして、PがAに一致したとき接線である（もちろん数学的にはPがAに一致する直前の直線）」として説明する。図の下の方に、 $\rightarrow$ か $\leftarrow$ を押しなさい、とあるがこれについて次に触れる。この部分のプログラムを示す。

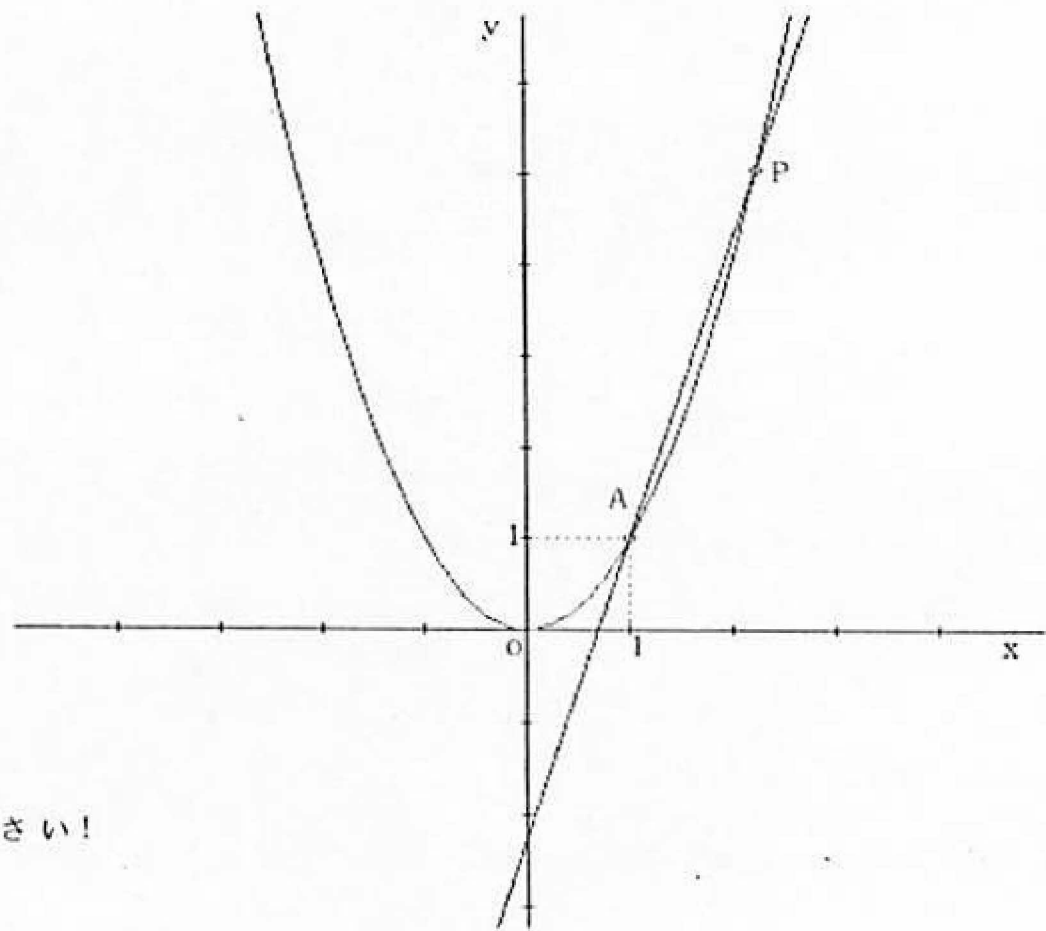
```

1050 ... .. DX=.05
      ... ..
1070 ARW1$="→":ARW2$="←"
      ... ..
1270 PRINT ARW1$:"か":ARW2$:"を押しなさい!"
1280 WHILE INKEY$<>"":WEND
1290 KSW=0:A$=INKEY$:IF A$="" THEN 1290
1300 IF A$=CHR$(&H1C) THEN KSW=1:X2=X2+DX
1310 IF A$=CHR$(&H1D) THEN KSW=1:X2=X2-DX
      ... ..

```



「接線とは」



->か<-を押しなさい!

図1 画面B

ここで、ソフト開発で留意した“アナログ”的に図形を動かす方法について一言触れる。一般にアナログ的に図形を移動させたり拡大・縮小させる方法には、①INPUT関数を用いる方法、②INKEY\$を用いる方法、③INPUT\$を用いる方法、④PEEK関数を用いる方法、⑤テンキーを単純に用いる方法がある。だが、本研究では②を用いることにした。

[C] (3000-4010) はAとPが一致した時の画面である。

[D] (4020-4930) [E] (4935-5900) 関数と接線  $y=x^2$  の場合。

[F] (4910-6780) 関数と接線  $y=x^3$  の場合。

[G] (6790-7780) 関数と接線  $y=3x^2$  の場合。以下[G]から[I]まではグラフに方眼が重ねられている。

[H] (7790-8780) 関数と接線  $y=-x^2$  の場合。

[I] (8790-9780) 関数と接線  $y=0.5x^2$  の場合。

[J] (9790-10030) 終わりの画面。

以上いずれも、関数のグラフが示され、点が“←”キーと“→”キーを押すことによりそのグラフ上を短い接線を伴ってBEEP音とともに矢印それぞれの方向に動く。同時にその接線の傾きの大きさが同じx座標の上の点として示される。この点の軌跡が前の関数の導関数のグラフとなって画面上に示される仕組みである。

### 3 授業の実際

授業をPC TMカテゴリー（4訂版）に従って示す。

[I] ハードウェア

1) パソコンPC-9801EX 子機20台親機1台、合計21台。



ランシステムはPCゼミで接続。VTR、実物投影機が組み込まれている。

- 2) 教室は岩手大学教育学部附属中学校CAI教室。授業日は平成3年12月9日(月)5校時である。
- 3) 生徒は、同学校3年C組、男子20名、女子20名、合計40名であるが、当日は欠席があり、男子19名、女子20名、合計39名である。パソコン1台当たりの生徒の人数は2名である。

#### [II] ソフトウェア

- 1) ソフトの開発はツールによらない自己開発である。使用言語はBASICで開発者は筆者の指導の下で協力学生による。開発は1991年11月で他者への提供は可能である。
- 2) 主として用いたパソコンの機能は、計算とグラフィックである。

#### [III] 授業の記述

- 1) 教師教育の授業でプレサービスである。授業時の助手は1名、しかしこのほか筆者をはじめ、附属教官、佐伯研の学生他の研究室所属の学生多数授業参観をしている。
- 2) 授業は数学をコンピュータで教えるという内容である。生徒のキー操作は途中で入る。
- 3) 教材は指導要領の範囲外でふくらまし教材である。指導要領内の用語を用いると「変化率」となる。
- 4) 授業形態は非CAI的授業でパソコンを利用しても学習シートを利用して行う伝統的な枠組みの授業である。

#### [IV] 授業の評価

- 1) テスト用具 I W A T (認知構造変容測定用具)、P C S D - S (態度測定用具)による。
- 2) 授業開始直前と直後、所要時間5分。
- 3) テストと授業の関連 次節で詳述する。
- 4) 授業分析 VTR収録(テープは佐伯研にある)をしそれをもとにプロトコール作成(プロトコールは千田(1992)、藤野(1992)に掲載)。

### 4 結果と考察

本稿でも授業の成功度の判定に利用できるI W A TのP-Pグラフ分析、距離法、キーワード分析に限って記し、重みつき内容構造は略し、P C S D - Sの結果も特に新しい知見がないので省略することにする。

I W A Tキーワードの採取から述べる。本時の内容はふくらまし教材の内容であるが、中学3年の指導内容「いろいろな関数」として扱った。キーワード採取は教師の判断による日本式採取法によった。その実際は次の通りである。

- ① 2乗に比例する関数、② 傾き、③ 3乗に比例する関数、④ 曲線
- ⑤ 接線、⑥ 1次関数、⑦ 接点、⑧ 直線

の8語である。このうち、③、⑤、⑦は高校の教科書から選び出している。これらの語は本時の授業遂行のため欠くことのできない語であったからである。しかし、このようなことは望ましくはない。筆者のところでは、何度もふくらまし教材を扱っているが、前例は

ない。このような事情から今回は特例として選びだしたわけである。

キーワードをもとに内容構造、I W A T作成し、テストを実施した。内容構造と認知構造から距離行列を作成し分析をした。まず、表1に事前・事後の応答数等を示す。表中右肩上の数字は内容構造の隣接箇所番号、下線は認知構造の隣接箇所番号、意味度は内容構造の意味度を表す。

表1 事前・事後 I W A Tの応答数

事後 \ 事前	2乗に 比附る 関 数	傾 き	3乗に 比附る 関 数	曲 線	接 線	1 次 関 数	接 点	直 線	意 味 度
①2乗に比附る関数		6	3	<u>34</u> <sup>1</sup>	1	2	3	2	1
②傾き	<u>20</u>		4	1	2 <sup>2</sup>	<u>28</u> <sup>3</sup>	2 <sup>4</sup>	<u>12</u>	3
③3乗に比附る関数	7	11		<u>13</u> <sup>5</sup>	2	2	2	2	1
④曲線	<u>29</u> <sup>1</sup>	3	<u>26</u> <sup>5</sup>		7 <sup>6</sup>	3	<u>11</u>	5	3
⑤接線	14	13 <sup>2</sup>	<u>15</u>	<u>15</u> <sup>6</sup>		6 <sup>7</sup>	<u>18</u> <sup>8</sup>	<u>9</u> <sup>9</sup>	5
⑥1次関数	5	<u>21</u> <sup>3</sup>	4	3	6 <sup>7</sup>		<u>9</u>	<u>29</u> <sup>10</sup>	3
⑦接点	11	10 <sup>4</sup>	8	13	<u>22</u> <sup>8</sup>	10		<u>11</u>	2
⑧直線	4	<u>17</u>	7	5	<u>19</u> <sup>9</sup>	<u>32</u> <sup>10</sup>	<u>23</u>		2

表2 意味度と距離行列の距離

D \ d	内容構造	事前認知	事後認知
内容構造		.53	.35*
事前認知構造	.14**		.43
事後認知構造	.14**	.18*	

\* やや近い \*\* 近い

これを元にして意味度の距離（d）と距離行列の距離（D）を計算し表2に、またP-Pグラフを図2に示す。距離法分析の結果は、dは事前は中間であったが事後の方で「やや近い」に変容した。しかし、Dの方は、どちらも「近い」で変容がなかった。これらの細かい分析は後のキーワード分析で詳しく触れる。

P-Pグラフの型は一応Ⅲ型と判定できる。番号1、3および7の隣接箇所が事後に応答数が減少したか、同じであったことから由来する。Ⅲ型という型は授業の成功度からいうと中ぐらいである。先の距離法でも特に事後が近づいたようには見えないので、この授業は生徒の認知構造の変容という観点からそれほどの効果をもたらしたとは言えない。しかしこれはキーワードの採用や内容構造の決定にも影響されるので、次にキーワード分析グラフ（KWAグラフ）を図3で示し、調べることにする。

一般に、内容構造の隣接箇所に採用することは、授業の目標として生徒にそここのところはよく連想するように学習して欲しいという考えで採用するし、授業の中でもその目標達成のために強調されるべきものである。従って、事後に高くなるのは当然の帰結である。そこが事後にかえって低くなることは問題になり得る。逆に、非隣接箇所でも事後に高くな

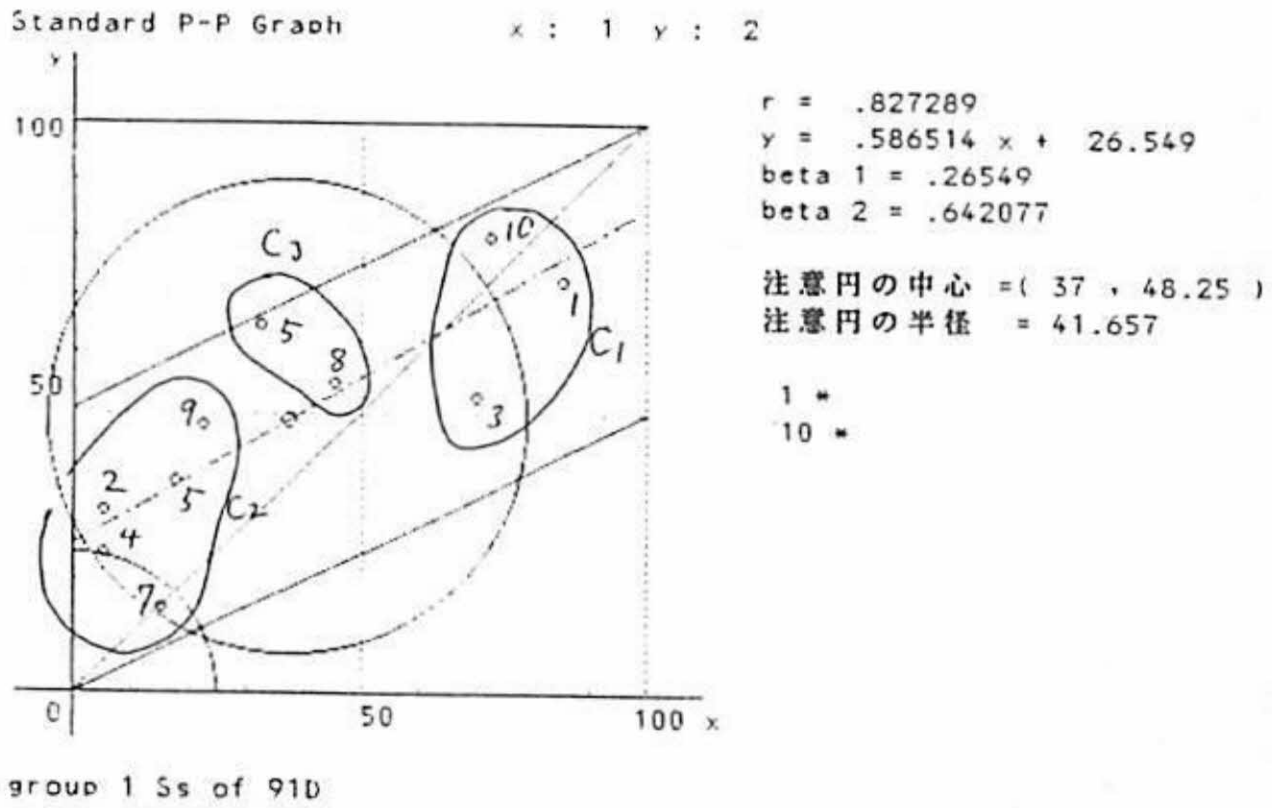


図2 P-Pグラフ

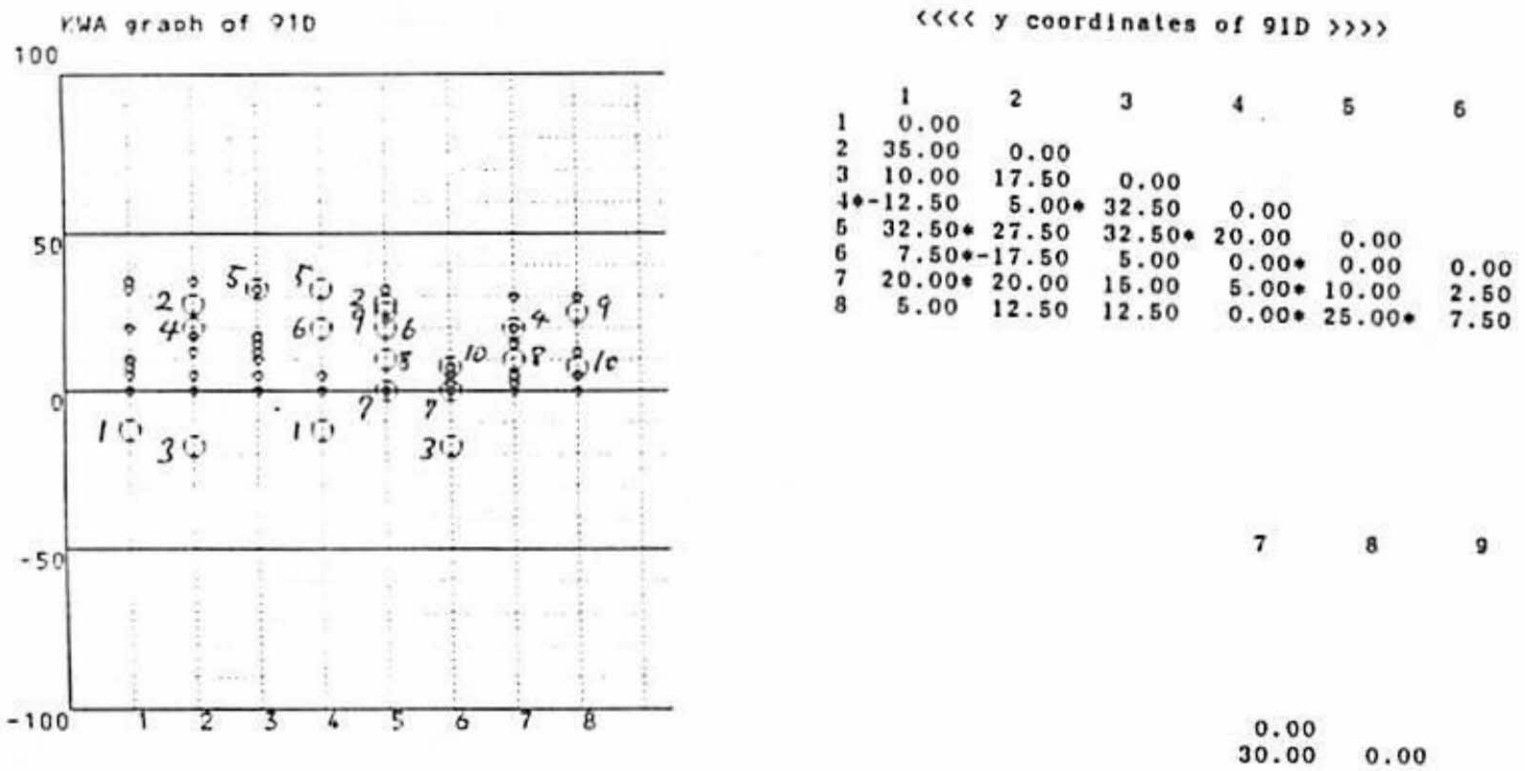


図3 キーワード分析グラフ

るのも問題となる。この観点から、本時の授業では隣接箇所の1番（2乗に比例する関数—曲線）、3番（傾き—1次関数）が減少したことで、7番（接線—1次関数）は変化しなかったことで説明が出来る。



まず、前提として本研究の授業は3年生対象であった、ということを経験しないといけない。3年生であれば1次関数については既習であること、2乗に比例する関数は本時の授業の行われた12月の時点で既習になっていた。そのため事前IWA Tで高い応答数がでたセルの理由が説明される。隣接箇所1番、3番、10番等がそうである。8番は「接線」が生徒にとって初めて出て来た語であっても、接線と接点では「接」という文字が共通に入っていることから連想されたのであろう。

この前提の下で説明に入る。まず、1番は事前が応答数34で最高値を示し、事後でも29で10番に次いで2位の値である。従って事後に下がったように見えても実態は生徒の関心が薄れたと言うよりむしろ事前が飛び抜けて高かったからと解釈できる。3番の理由は、事前は1次関数からグラフを連想し、そして直線の傾きとなったと考えられる。ところが授業の結果、曲線でも接線を介して傾きに結び付くことが定着したので生徒の関心が動いたと見られる。その一つの証拠は、「2乗に比例する関数-傾き」の応答数が事前では6なのに、事後では20に急増し、認知構造図では隣接箇所になったということである。また7番が動かなかった理由は、教師は接線→直線→1次関数と連想したのに対し、応答者6名以外の生徒は接線→2乗に比例する関数と連想したので、その先1次関数までには行かなかったと考えられる。これは、傾きと2乗に比例する関数の応答数の変容からの推測である。このように内容構造の隣接箇所では負の値が出たことはP-PグラフがⅢ型になった理由であることはすでに触れた通りである。

次に、逆に内容構造の隣接箇所にしなかったが、事後に応答数が比較的大きく増加した箇所について考察する。一番伸びたのは「(A) 2乗に比例する関数-傾き」次が「(B) 2乗に比例する関数-接線」「(C) 3乗に比例する関数-接線」次いで「(D) 接点-直線」となっている。これらの伸びた理由はパソコンの画面と、授業の中で用いられた紙板書の影響と考えられる。

その他の所見は、内容構造の隣接箇所の伸びの最大が5番の「3乗に比例する関数-曲線」であるが、これが非隣接箇所の(A)より低く、(B)(C)と同じであったことは問題になる。これは内容構造の決定に問題があり、授業の展開にも問題があり、内容構造の趣旨が生かされなかったことを示唆している。またKWAグラフは全体として伸びが小さい。特に、キーワード「1次関数」に関する隣接箇所が目立って低い。これは、Ssが3年生である時、この語をキーワードとして採用したこと自体に疑問を投げかけるような低さである。

また、特に注目された、高校教科書から採ったキーワード「3乗に比例する関数」「接線」「接点」はKWAグラフからは全く問題はなく生徒には他の語と同様に定着したように見える。

## 5 結語

本研究の全体的な考察を、授業者の発言をも取り入れて行う。授業者は上の(A)～(C)が内容構造の隣接箇所に増して伸びたことについて次のように記している。授業のねらいが「関数と接線の傾きの関係式を調べよう」であり、その手段として2次関数、3次関数を用い、最終的には例外もあるがどんな関数にも導関数が存在することを伝えたかったにもかかわらず、それを示しえたのは授業の最後の部分だけであったので、(A)～(C)

が伸びるのは当然である。(D)が伸びたのはパソコン画面の動きによるだろう、としている。さらに、指導案にある“関数とその導関数の関係を理解する”ことを目標とするなら、もっと一般に $n$ 次関数を用いてもよかったのではないか、発言している。

ところで、1985年の傾き関数の時は、生徒は附属中1年であったが授業の中では、2次と3次の関数と言っても、単に $Ax^2$ や $Ax^3$ であったが、生徒は $Ax^2$ の傾き関数 $2Ax$ を、 $x$ 右肩の2は前に出て、 $x^2/x$ として $x$ を導き、休み時間になって、 $Ax^n$ なら

$$Ax^n \rightarrow nAx^{n-1}$$

として自力で導関数の公式を導いた事例であった。

さらに、筆者の経験では、仙台市内某私立女子中学で3年の生徒対象に多項式で極限の考えを入れずにやはり導関数(微分)の公式を、納得の上、導き理解させたことがある。盛岡赴任前の話なのでもちろんパソコンはない。それは“変化率”に関連させて次のように扱った。

$$\begin{aligned} & 3x^3 + 2x^2 - 5 \rightarrow \\ & \{3(x + \Delta x)^3 + 2(x + \Delta x)^2 - 5\} - \{3x^3 + 2x^2 - 5\} \\ & = \{3[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3] \\ & \quad + 2[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2] - 5\} - \{3x^3 + 2x^2 - 5\} \\ & = 9x^2\Delta x + 9x(\Delta x)^2 + 3(\Delta x)^3 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 \end{aligned}$$

となる。これを $\Delta x$ で割ることを指示する。するとこの式は

$$9x^2 + 9x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 4x + 2\Delta x$$

となる。ここで $\Delta x$ は実は「うんと小さく」て、 $0.000000\cdots 01$ という値で、ほとんど0と見てよいことを説明する。すると

$$3x^3 + 2x^2 - 5 \rightarrow 9x^2 + 4x$$

となる、というのであった。これは、実行したことがないが、現在では、 $\Delta x$ が「うんと小さい」ことはパソコン画面を用いて自然に「小さくてドットで区別できない」ことで説明できることを注意しておきたい。

微分とか極限という考えは数学史では古くから積分と関連してあったが、顕在化するのにはニュートン・ライプニッツの時代である。このようなヒトの文化と深いかかわりを持つ重要な概念である微分を、ヒトの発達の中の段階で教えられるか、そしていかに早く有効に、どのような形で教えられるか(教材の翻案)、という問題は、ひとり数学教育だけの問題でなく、もっと広くヒトの文化の伝承という教科教育の問題であり、この問題の有効な解決方法を追求することは、われわれ先行世代が後続世代に果たすべき義務であることを強調しておく。

### 参 考 文 献

- 千田智子(1992)中学生のための教材開発と授業実践 —— 微分へのアプローチ、岩手大学教育学部、平成3年度卒論  
 藤野恵里(1992)パソコン利用による教材開発と授業実践 —— 傾き関数から導関数へのアプローチ、岩手大学教育学部、平成3年度卒論  
 Lappan, G. and Winter, M. J. (1982) A unit on slope function —— using a computer in mathematics class, *Math. Teacher*, 75, 118-122



- 佐伯卓也 (1981b) 言語連想テスト (I式) の処理 —— WAテストP-Pグラフ分析、日本教科教育学会誌、6、195-199
- 佐伯卓也 (1983a) 学習者の数学的能力と認知構造の関係、日本教科教育学会誌、8、81-86
- 佐伯卓也 (1983b) 学習者の認知構造変容測定による教師の授業評価法と学習者個人別評価法の開発 —— I式WAテストによるCATI法、科学研究費 (一般研究C) 報告
- 佐伯卓也 (1985) パーソナルコンピュータに対する態度を測定するSD尺度、PCSD-Sの開発、日本教科教育学会誌、10、73-78
- 佐伯卓也 (1992a) CATI法 (P-Pグラフ分析)、東北数学教育学会年報、23
- 佐伯卓也 (1992b) 数学の授業実践におけるコンピュータと教師と生徒のかかわりについて —— マルチメディア、メディアミックスそしてハイパーメディア、東北数学教育学会年報、23
- 佐伯卓也 (1992c) 中学1年生のための立体図形の切断面のパソコン教材の開発と授業の実践、東北数学教育学会年報、23
- 佐伯卓也・神林雅紀・平田裕司 (1986) パソコン教材としてのふくらまし教材の開発とその授業の実践的研究 (1) —— 傾き関数・中学生の微分へのアプローチ、東北・北陸数学教育基礎的研究報告、14、73-78
- 佐伯卓也・今野吉章 (1991) 中学校数学におけるコンピュータの利用 —— 効果のあがる教材と教授法、教育情報研究、7 (No.2)、79-82

(謝辞) 本研究を進めるに当たり、学生のため授業実践の場を提供し、ご協力を得た岩手大学教育学部附属中学校と同校生徒諸君に、また終始懇切なご指導を賜った同校数学科の各教官に感謝の意を表する。

Computerized Teaching in Junior High School Mathematics (The 4th Report)  
 —— An Approach to Differential from Slope Function ——

Takuya SAEKI (Iwate University)

(Abstracted)

The slope function is a microcomputerized material which has been developed by Lappan and Winter (1982), and we have also tried to develop the material with the same idea in 1985. This trial is the second time. Softwares of a microcomputer are improved in this time. The result of a teaching was successful partially in this time.