

## 中学校数学のパソコン利用の授業(3)

### — 区分求積法による球の体積 —

佐伯 卓也 (岩手大学)

協力者：阿部容子・茨澤仁美  
(平成3年度岩手大学教育学部4年次学生)

区分求積法による平面図形の面積・立体図形の体積へのアプローチは、今回で9回目である。最初は1985年の面積関数(積分)と円の面積( $\pi$ の値の確認)であった。立体の体積への取り組みは1983年の「三角すいの体積の公式」が最初である。パソコン以外の教具として電卓をも活用したのが特色である。結果はやや成功的な授業と判定できる。

[キーワード] コンピュータの教育利用、電卓の利用、中学校数学、教師教育、区分求積法、コンピュータ利用の非CAI的授業

#### 1 はしがき

1983年に初めて区分求積法のコンピュータソフトを開発し、それを利用した授業の展開を試みて以来今回で9回目になる。中でもコンピュータ利用の立体の扱った授業は今回が5回目である。さらに球の体積については2度目である。一般に球の体積を区分求積法で求めるときは、球を高さの低い(薄い)多くの円柱に区分し、一つ一つの円柱では既知である円柱の体積の公式、(底面積)×(高さ)を用いて計算し、その結果の値を加え合わせるという方法をとる。ところで、ここでいつも問題になるのは、一つ一つの円柱において底面は円であるが、その半径の値を求める所である。生徒に納得させるように数学的にこれを提示し説明するとき、つまり早稲田大学の寺田氏の唱える「納得の数学」として生徒に提示するには、「三平方の定理」がいる。ところが、この三平方の定理は平方根が入るので中学校数学では3年になって扱うことになっている。ところで筆者の研究室での研究対象の生徒はいつも中学1年か2年の生徒なので、説明のとき三平方の定理は使用できなくなる。この障害はなにも球の体積の計算だけではなく、一般の区分求積法で常に起こる障害である。したがって、区分求積法を用いるときは、この困難をいかに克服するかが、いつも問題となる。今回の扱い方に触れ考察する。

結果は歴代の区分求積法の授業としては似たレベルだが、今回は普通クラスサイズの授業である。これに対し、前回1988年の球の体積の授業はマイクロティーチングであったことも理由となり、今回の授業の評価でP-Pグラフの型と内容構造と認知構造の距離の評価の観点から見てよくなかった。これについても考察する。

#### 2 授業設計と教材開発

## 2.1 授業設計

まず、学習指導案を示す。

対象：岩手大学教育学部附属中学校1年A組

授業日：平成3年12月9日（月）4校時

1. 単元名 空間図形

2. 授業者 茨沢仁美 共同研究者 阿部容子

3. 本時のねらい 区分求積法による球の体積の求め方を理解する。

4. 展開

段階	学習内容	学習活動	指導上の留意点	時間	教具等
導入	課題提示	1. 既習の立体の想起。 ・球の体積の公式を知る。 2. 課題把握 公式以外で球の体積を求めよう	・知っている立体をあげさせ、立体の体積の求め方についてもたづねる。	8分	・学習シート ・紙板書
展開	課題追求	3. 区分求積法による球の体積の求め方を知る。 ・円柱の公式を知る。 4. 区分求積法により、球の体積を求める。  (1)半径10cmのとき ・4分割、6分割を各自で講ずる。 ・より細かい分割についてはパソコンで計算する。 ・グラフに表す。 ・公式の値と照合する。 (2)半径10cm以外のとき (半径30cm、分割20以下) ・各自で半径、分割数を記入する。 ・より細かい分割数(パソコンで) ・グラフに表す。 ・(1)と同様に公式と照合する。	・パソコン立体画面により、円柱を重ねて作る立体が、分割を細かくしていくと、球に近い形になることを気かせる。 ・パソコン画面で、真横から見た図を示し、円柱の側面と球の表面との交点がそれぞれの円柱の高さの midpoint となり、その時の円柱の半径を用いることを分からせる。  ・パソコン画面提示と各自電卓計算の併用。 ・細分割していくと一定の値に近づくことに気づかせる。  ・分割数は2~20までのうち3つ選ばせるようにする。  ・区分求積法は、球の体積を求める1つ方法であることを知らせる。	35分	・パソコン 一斉送信  ・模型  ・電卓・パソコン
	参考	5. 角錐による分割での体積の求め方を知る。	・プリントを配布して説明する。		・プリント ・模型
終結	まとめ	6. 本時の学習を振り返る。		7分	

次に、学習プリントであるが、なるべく生徒に記入させる部分を多くしてある。とくに、電卓を使って、円柱の半径から円柱の体積を求め、その合計を計算し、球の体積を近似する部分があるので、その記入欄、さらに区分求積法の等分割数を横軸、体積を縦軸にしたグラフを書かせ、分割数が増加すると、近似値が一定の値に近づく現象を視覚的に訴える欄も設けた。区分求積法にはこれとは別の方法もあること、すなわち、球の中心を頂点とした多くの角錐（この例では多くの四角錐）に分割して、角錐の体積の和で近似する方法で、結果的には、「球の表面積（＝四角錐の底面積の和）×球の半径（＝四角錐の高さ）÷3＝球の体積」の関係を用いることができる、という説明のための学習シートも準備した。これを下に示しておく。

## 球の体積と表面積の関係

～角すいを使って～

球の体積を求める方法として、先に円柱を用いてみたが、角すいでは求めることができないのだろうか。



左図のように、角すいを集めて球に近い形を作ってみるとどうだろう。

この1つ1つの角すいの高さは、球の半径に等しいとする。

$$\text{角すいの体積} = \text{底面積} \times \text{高さ} \left( \text{ここでは半径} \right) \times \frac{1}{3}$$

で、求めることができる。

$$\text{この立体の体積} = \text{それぞれの角すい底面積の総和} \times \text{高さ} \left( \text{半径} \right) \times \frac{1}{3}$$

となる。

左図より、さらに細かい分割で、つまり、もっとたくさんの角すいでこのように作ってみると、さらに球に近くなることは予想がつくであろう。と、すると、それぞれの角すいの底面積の総和は球の表面積を表すことになるのではないか。

$$\text{球の表面積} = 4 \times 3.14 \times \text{半径} \times \text{半径}$$

で求められる。すると、

$$\begin{aligned} \text{球の体積} &= 4 \times 3.14 \times \text{半径} \times \text{半径} \times \text{高さ} \left( \text{半径} \right) \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3} \times 3.14 \times \text{半径} \times \text{半径} \times \text{半径} \end{aligned}$$

と、なる。

このほか板書計画も作成しているが略す。詳しくは、阿部（1992）、茨澤（1992）を参考にするとよい。

## 2.2 教材開発

教材はパソコンと模型である。まず、パソコンソフトについて触れる。このパソコン教材のシチュエーションは提示が主であった（一部生徒のキー操作場面はある）。

### (1) タイトル [1~450]

(2) 4個の同じ高さの円柱を重ねて球を近似させる [455~1010] 画面①~③

(3) 球と円柱を真横から見た図 [1020~1650] 画面④~⑧ (学習シート3に対応)

球の断面の円周と円柱の交点は、一般の区分求積法で行うような外接図形とか内接図形の近似ではなく、今回は簡単にするため高さの midpoint とした。また問題になる各円柱の底面の半径は「コンピュータが計算すると・・・」と言って画面上に示し(⑦)、三平方の定理や根号に関する所は伏せて、画面の右側に「円柱の半径」として表示し、それを元に生徒が手持ちの電卓で個々の円柱「体積」とその合計である球の体積(近似値)を計算させ学習シートに記入させる。それと照合するために画面に正解を示す仕組みにしてある(画面⑧)。ところでパソコンと電卓では数値が誤差のために少し異なるので、パソコン画面では、パソコンで計算できるのであるが、それをういないで別に電卓で計算した値を表示

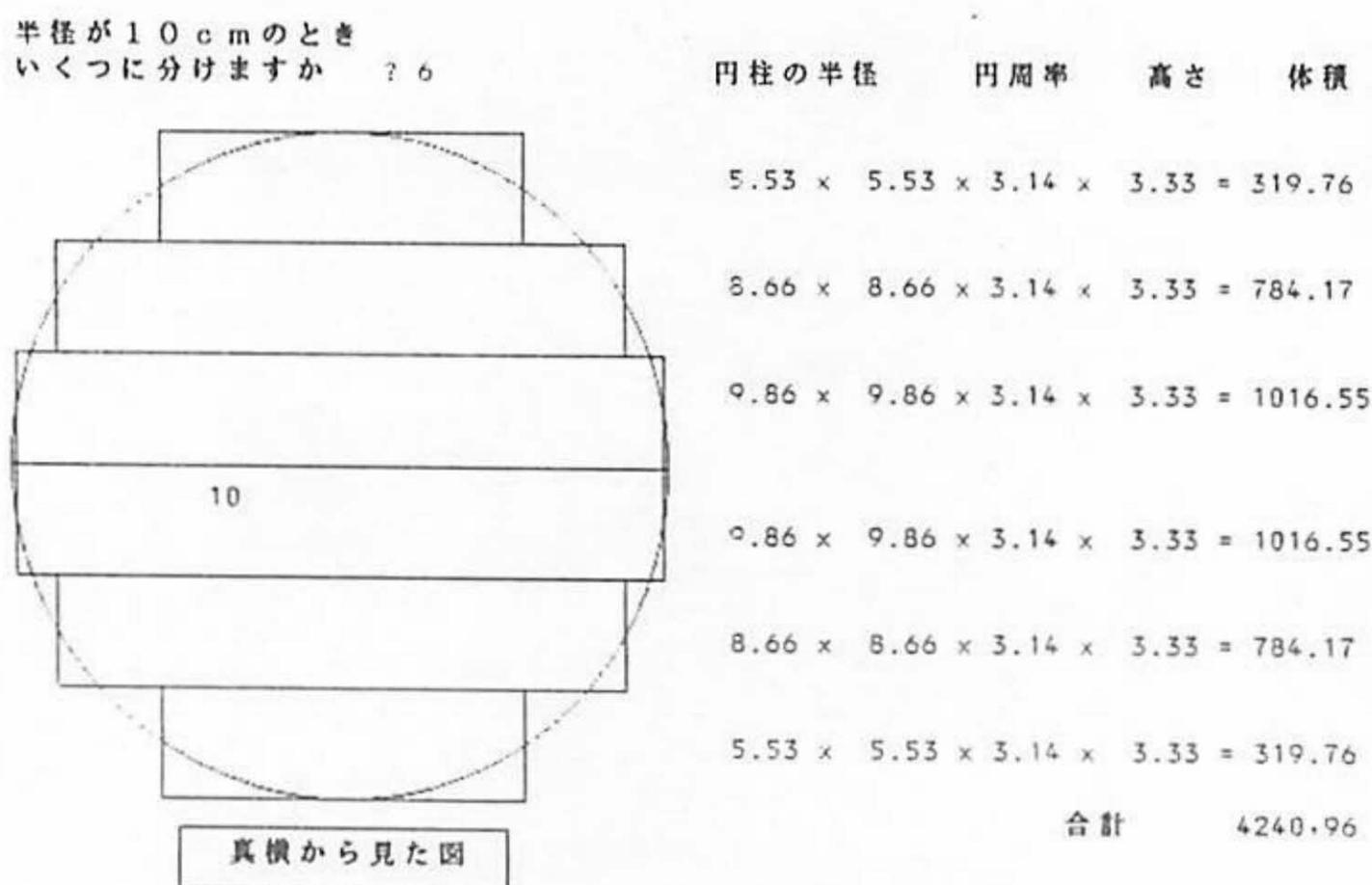


図1 画面⑧

するなどの配慮をしている。

(4) 各分割に対する体積の計算値 [1660~1880] (画面⑨: 学習シート2に対応)

(5) (3)の繰り返し [1890~3240] (画面⑩~⑬) 半径: 1~30cm、分割: 2~19の間で  
テンキーで選択させると、画面が対応する。

(6) 半径20cmのときの体積の総和 [3250~4300] (画面⑭: 学習シート4に対応) 分割  
は 5, 10, ..., 1000 である。

(7) 参考資料 [4310~6280] (上述の補足資料「角すいを使って」に対応する画面)

次は模型であるが、これはケント紙を用いて作成している。とくに上述のパソコン教材  
の(7)に対応した模型も作った。

なお、画面の進行はテンキーからの数の入力、Y/Nの入力以外は、INKEY\$に対

応する任意のキーによる入力、しかし実際の授業では、混乱をさけるため、生徒には任意のキーとしないでリターンキー使用に統一している。また、プログラミングの上では、生徒にキー操作をさせる部分が少ないということと、このクラスの生徒はかなりパソコン利用の授業に慣れてるということで、STOPキーを効かなくすることはしなかった。実際の授業でも生徒がSTOPキーを押してパソコンの画面進行を止めるというようなトラブルはなかったが、やはり教育用のソフトとしてはSTOPキーの処置は必要と考えている。

### 3 授業の実際

コンピュータ利用の授業の記述のためのカテゴリー、PCTMカテゴリー（4訂版）（1992年3月改訂）に従って記述する。

#### [I] ハードウェア

- 1) パソコン PC-9801EX 親機1台、子機20台、ランシステムはPCゼミ。VTR、実物投影機と接続されている。その他パソコンと接続されていない機器として生徒各自に電卓を準備させた。
- 2) 学校：岩手大学教育学部附属中学校CAI教室、1991（平成3）年12月9日（月）4校時に実施。
- 3) 生徒：同校1年A組 男子20名、女子20名、合計40名（当日は男子1名欠席で男子19名、合計39名）、パソコン1台当たりの人数は2名。

#### [II] ソフトウェア

- 1) ソフトはオーサリング・ツールによらない自己開発、使用言語はベーシック、他者への提供は可能である。
- 2) 主として用いたパソコンの機能は計算とグラフィックスである。

#### [III] 授業の記述

- 1) 教師は学生の教師教育の授業、授業時の助手は1名。そのほか、VTR収録、見学者としての学生、附属教官と筆者も出席し、生徒のパソコンのトラブルに備えた。
- 2) 数学をパソコンを利用して教えるという授業。生徒のキー操作は一部にある。
- 3) 指導案・教材は別に示した通りで、授業の単元名は指導要領の範囲内だが、用いた方法は指導要領の範囲外である。ここにパソコン利用の意味がある。
- 4) 授業形態は非CAI的授業であり、伝統的な授業形態である。特に、生徒に電卓を利用してパソコンの計算のブラックボックスの部分を補ったことは特筆される。

#### [IV] 授業の評価

- 1) 用いたテスト用具は、認知構造測定用具IWA T、態度測定用具PCSD-Sを用いた。
- 2) テストは授業直前と直後の2回、所要時間は5分ぐらいである。
- 3) テストと授業の関係については別項目で触れる。
- 4) 授業はVTRで収録し、後にプロトコールを作成し、授業分析の素材にしている。プロトコールの記述は阿部（1992）茨澤（1992）にあるのでここでは省略する。
- 5) 教師の観察感想に触れている。

### 4 結果と考察

I W A Tの分析は新しい様式のC A T I法による。ここでは簡単に、授業の成功度に関係の深い、P-Pグラフ型の決定、内容構造と認知構造の距離行列の距離法分析とキーワード分析グラフの結果についてのみ記す。重みつきP-Pグラフ関係は省略する。また、P C S D-Sの分析結果については特に目新しい結果は出ないので、こちらの記述も省略する。

I W A Tのキーワードは、区分求積法という“ふくらまし教材”ということで①～⑥は授業内容に準じて抽出し、⑦～⑨は球の体積・表面積の公式から抽出した。その実際は

①円柱、②角すい、③球の体積、④球の表面積、⑤分割、⑥4/3、

⑦半径×半径×半径、⑧近似、⑨円周率

の9個である。表1でI W A Tの応答数を示す。表中応答人数の右上肩の番号は、内容構

表1 I W A T事前・事後テストの応答数

事前 事後	円	角	球	球	分	4	糺	近	円	意味 度
	柱	す い	の 体 積	の 表 面 積	割	/ 3	× 糺 × 糺	似	周 率	
①円柱		<u>22</u>	<u>11</u> <sup>1</sup>	<u>11</u>	2 <sup>2</sup>	0	2	0	<u>26</u> <sup>3</sup>	3
②角すい	24		<u>5</u> <sup>4</sup>	<u>5</u> <sup>5</sup>	<u>7</u> <sup>6</sup>	3	2	3	<u>6</u>	3
③球の体積	<u>35</u> <sup>1</sup>	<u>34</u> <sup>4</sup>		<u>23</u> <sup>7</sup>	2	5 <sup>8</sup>	3 <sup>9</sup>	1 <sup>10</sup>	<u>20</u> <sup>11</sup>	7
④球の表面積	28	22 <sup>5</sup>	26 <sup>7</sup>		2	3	<u>5</u>	0	<u>20</u> <sup>12</sup>	3
⑤分割	<u>37</u> <sup>2</sup>	30 <sup>6</sup>	<u>34</u>	28		<u>5</u>	1	2 <sup>13</sup>	1	3
⑥4/3	32	19	<u>37</u> <sup>8</sup>	23	28		2	2	0	1
⑦糺×糺×糺	<u>33</u>	20	<u>37</u> <sup>9</sup>	21	25	<u>35</u>		4	<u>6</u>	1
⑧近似	13	11	14 <sup>10</sup>	15	14 <sup>13</sup>	14	14		4	2
⑨円周率	<u>37</u> <sup>3</sup>	25	<u>37</u> <sup>11</sup>	14 <sup>12</sup>	26	<u>34</u>	<u>34</u>	18		3

造の隣接箇所番号を示し、下線は事前事後それぞれの認知構造の隣接箇所を示す。また、意味度は内容構造の各キーワードに集まる隣接箇所を表す結線の数を表す。この生データからも判るが番号12の隣接箇所は結線が事前よりも事後が減少している。ほかに、隣接箇所にしなかったが事後で結線が著しく増加した場所もある。これは、内容構造の作成にも問題があったが、それ以上にキーワードの抽出にも問題があったことを示唆している。これについてはもう一度キーワード分析グラフのところで触れる。

次に、内容構造と事前・事後の認知構造の距離行列の距離を計算した。その結果は表2

表2 内容構造と認知構造の距離dとDの値

D \ d	内容構造	事前認知	事後認知
内容構造		.53	.65
事前認知構造	.20		.77
事後認知構造	.27	.23	

に示す。結果は認知構造は事前・事後とも内容構造に「近い」とはならなかった。むしろ結果は内容構造から見た場合、事前より事後が遠くへ離れたことも指摘される。この意味では本授業は成功的ではなかった。しかし他の分析と併せて判断する必要がある。

次に、P-Pグラフを図2に示す。グラフ型はIV型と判定できる。変容係数 $\beta_1 = .70$ 、 $\beta_2 = .81$ で高いので、IV型と言ってもかなり成功的と言える。ここでも隣接箇所12番が特異な存在になっていることが視覚的に示されている。この隣接箇所がないとすれば、本授業のP-Pグラフの型はII型であったと推察できる。

このほか階差P-Pグラフ、重みつき内容構造に関する分析、EGグラフ分析をも実施しているが省略する。

次に、キーワード分析グラフを図3に示し、考察する。グラフの中で大きな丸○は隣接箇所、小さな丸○は非隣接箇所に相当する。もちろん、内容構造のそれである。隣接箇所

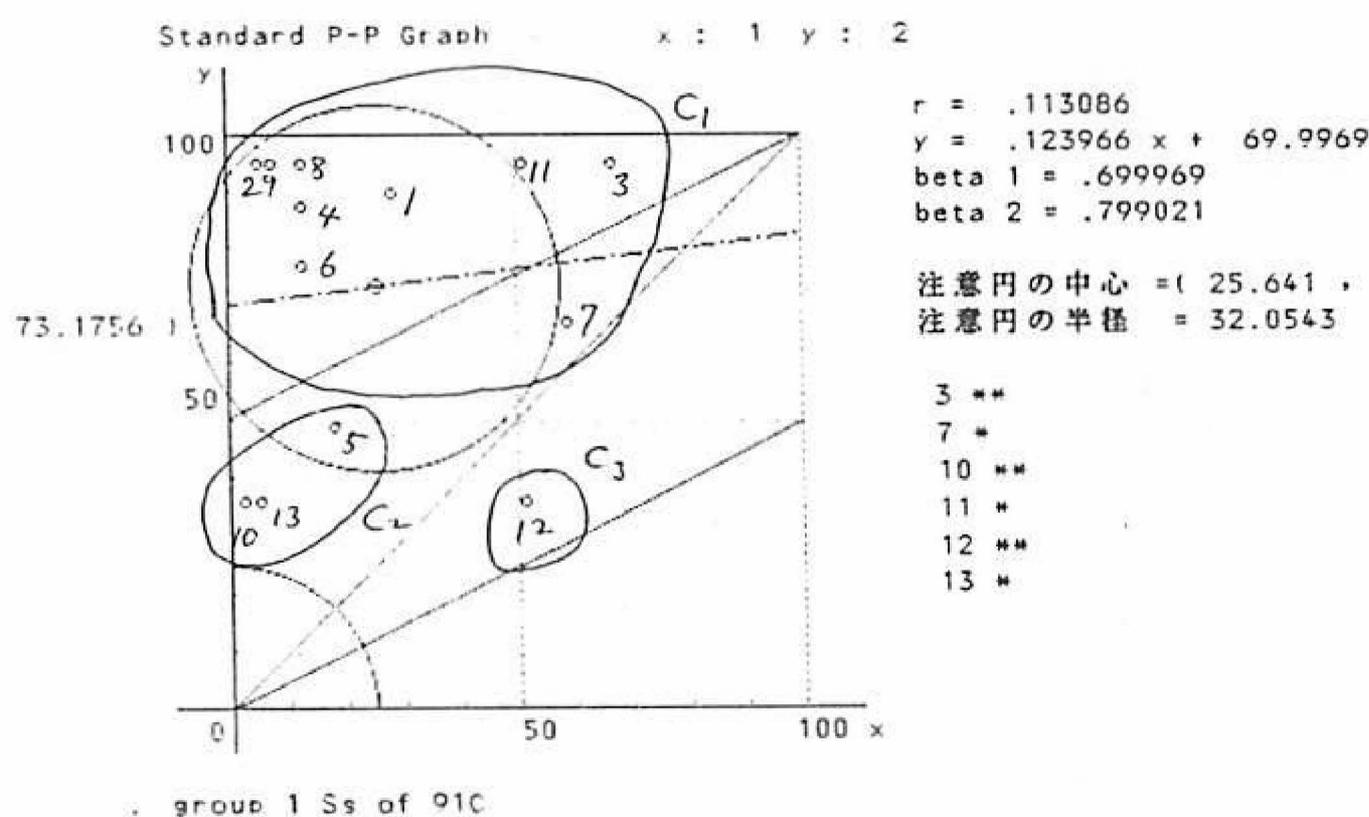


図2 P-Pグラフ

番号12番（円周率-球の表面積）は負の値であるし、7番（球の体積-球の表面積）も低い。どちらも「球の表面積」が関係している。ここでは、球の表面積を用いて体積を求める部分の授業が、プロトコールをみると僅かに5分だけで、徹底しなかったことから由来すると考えられる。

一方、隣接箇所ではなかったが高い得点になったのは、 $4/3$ -円周率、 $4/3$ -（半径）<sup>3</sup>、 $4/3$ -円柱、等かなり多い。 $4/3$ にかかわって円周率とか（半径）<sup>3</sup>は、球の体積の公式が陰にあるように見える。このようなことから、キーワードとして公式の一部をとる時、この場合の $4/3$ のようなキーワードをとる時、内容構造にその公式の他の要素を加える必要があることが示唆される。しかし、 $4/3$ と円柱が高くなったのは数学の論理に反する誤解が生徒に植え付けられた心配がある。ここに授業の中で徹底されていないことが示唆される。このグラフの所見としては、⑧近似から連想するキーワードが少ないことが指摘される。これは、近似がキーワードとすること自体が本授業の目的にかなっ

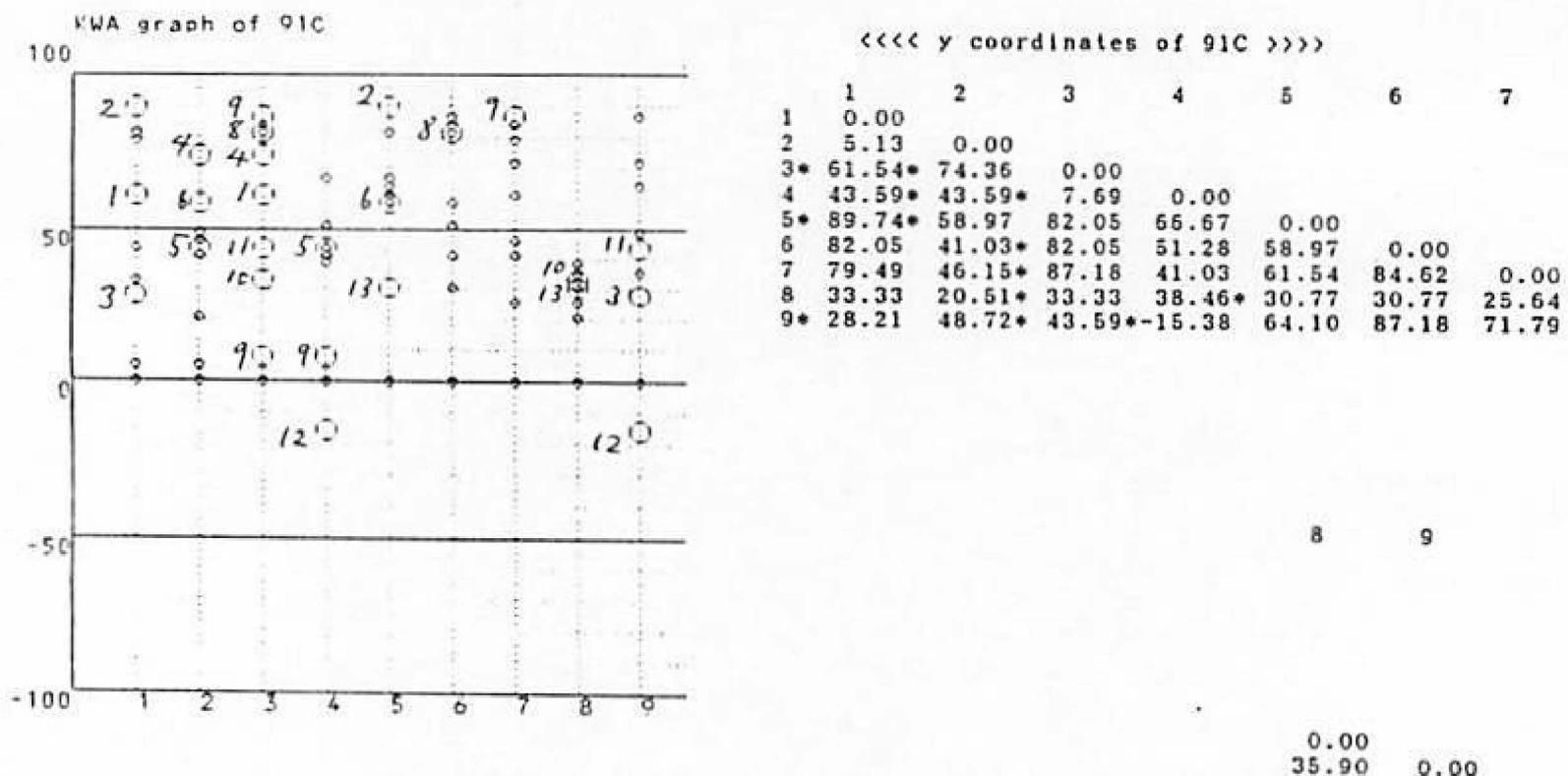


図3 キーワード分析グラフ

ていなかったのではないかを示唆している。これをキーワードにすることを積極的に考えるのだったら、それをもう少し授業の中で強調される必要があった、と考える。

このキーワード「近似」の特異性は孤立語からも判る。事前事後を通して「近似」、事後では「球の表面積」が孤立語になった。授業のプロトコルを見れば、教師は「近づいていく」とは言っているが「近似」とは一度も言わなかった。また、「球の表面積」は、せっかく準備したシートも時間切れになって十分には消化できないでしまった、こと等から由来していると考えられる。

さらにPCSD-Sも同時におこなっているが、とくに新しい知見が得られないので省略する。

## 5 結語

区分求積法を利用して球の体積や表面積への取り組みはパソコン利用としては1988年度以来である。88年度の扱いは、かなりこまやかで円柱による近似も偶数個と奇数個の円柱と分けたし、外接円柱と内接円柱に分けて両方の極限值が一致すると球の体積になる、という数学的な考えで行った。

これに対し今回は、外接・内接に分ける代わりに各円柱の高さの半分のところで、球と交わっているような円柱群に簡略化した。このような簡略化を試みたのは初めてである。そのとき、各円柱の底面の半径がいるが、それらはあらかじめ値として説明抜きで画面に表示した。つまり、三平方の定理の部分を飛ばしてある。その代わりに、その後に各円柱の体積の計算、それらの合計として球の近似値を求めるところは生徒持参の電卓で計算させて授業を進めた。もちろん、画面表示の半径の値は誤差の関係でパソコンでなく、あらか

じめ電卓で求めた値を用いていることは前に触れた通りである。このような電卓による計算という手作業を利用したことで、三平方の定理を飛ばして、天下りの的に半径の値を示したことに対する違和感というか、納得に対する抵抗はでなかった。もう一つ、パソコンのブラックボックス的扱いを、電卓という生徒の手作業で顕在化した点を強調したい。ある見方をすると、生徒の関心を各円柱の底面の半径を求めるということから、電卓という手作業的な方向に授業の流れを変えて、そちらに関心を振り向けたことになる。こうすれば、生徒は各円柱の半径はパソコンが求めたよ、と言っても詮索する気が起こらなかったと思われる。この方法も三平方の定理を飛ばす有力な方法と考えている。また、各円柱の底面の半径の説明に、高さの midpoint で球と交わるところとしたことも、結果的には生徒への説明の簡略化に繋がった。これは高校の定積分の説明で、各長方形の縦の長さをとる  $x$  の値をとるのにリーマン積分とはことなり、左端の  $x$  の関数の値をとるとした考え方と同じと考えて実施したものである。

本授業の評価であるが、P-P グラフ型はIV型であるが、変容係数が優れているので、大体として、やや成功的である。しかし、距離法からは成功的でなかった。しかしこれは、キーワードの採り方、採用した内容構造（従って指導案の授業目標）と実際の授業の流れのずれ（事後認知構造の孤立語の出現）から起因したことも見逃せない。指導案通りいかなかったことからP-P グラフがIV型になったと言えるだろう。

授業者は「近似」という語を一度も使わなかったと言ったし、「球の表面積」の部分は時間がないと言ったが、これが、P-P グラフ分析の結果に反映してくることが、本研究でも明らかになった。このことは、一連のP-P グラフ分析、さらにはIWA T利用のCAT I法が的確に授業を捕らえている、という証拠をさらに一つ付け加えることになる。

総合的なことを言うと、本研究はコンピュータ利用の授業では、従来はコンピュータだけ、コンピュータと模型の利用等があったが、今回は初めて、電卓を取り入れ、「コンピュータと電卓」の併用の授業としたことが、筆者のところでは新しい試みであると言える。

## 参 考 文 献

- 阿部容子（1992）パソコン教材開発と授業実践 ～ 円柱を利用した球の体積へのアプローチ、岩手大学教育学部平成3年度卒業論文
- 茨澤仁美（1992）パソコン教材開発と授業実践 —— 区分求積法による球の体積へのアプローチ、岩手大学教育学部平成3年度卒業論文
- 今野吉章（1991）数学における非CAI的授業の実践例 —— 中学校におけるコンピュータ利用の授業について、東北・北陸数学教育基礎的研究報告、19、71-76
- 佐伯卓也（1881a）「数学的構造の学習」の評価法、日数教会誌・数学教育、35-1、31-36
- 佐伯卓也（1981b）言語連想テスト（I式）の処理 —— WAテストP-P グラフ分析、日本教科教育学会誌、6、195-199
- 佐伯卓也（1983a）学習者の数学的能力と認知構造の関係、日本教科教育学会誌、8、81-86
- 佐伯卓也（1983b）学習者の認知構造変容測定による教師の授業評価法と学習者個人別評価法の開発 —— I式WAテストによるCAT I法、科学研究費（一般研究C）報告

- 佐伯卓也 (1984) 学習者の数学的能力と認知構造の関係 (2)、日本教科教育学会誌、9、1-6
- 佐伯卓也 (1985) パーソナルコンピュータに対する態度を測定するSD尺度、PCSD-Sの開発、日本教科教育学会誌、10、73-78
- 佐伯卓也 (1990) 数学教育における学習者の認知構造測定用具IWA Tの応用、第23回数学教育論文発表会論文集、139-144
- 佐伯卓也 (1991) 授業評価におけるP-Pグラフの型と重みつき内容構造、岩手大学教育学部研究年報、51 (No. 1)、99-104
- 佐伯卓也 (1992a) CAT I法 (P-Pグラフ分析)、東北数学教育学会年報、23
- 佐伯卓也 (1992b) 数学の授業実践におけるコンピュータと教師と生徒のかかわりについて —— マルチメディア、メディアミックスそしてハイパーメディア、東北数学教育学会年報、23
- 佐伯卓也 (1992c) 中学生1年生のための線・面の移動により生成される立体のパソコン教材の開発と授業の実践、岩手大学教育学部附属教育実践研究指導センター研究紀要2、
- 佐伯卓也・今野吉章 (1991) 中学校数学におけるコンピュータの利用 —— 効果のあがる教材と教授法、教育情報研究、7 (No. 2)、79-82

(謝辞) 本研究を進めるに当たり、学生のため授業実践の場を提供し、ご協力を得た岩手大学教育学部附属中学校と同校生徒諸君に、また終始懇切なご指導を賜った同校数学科の各教官に感謝の意を表す。

Computerized Teaching in Junior High School Mathematics (The 3rd Report)  
 —— The Volume of Sphere by the Mensuration by Parts ——

Takuya SAEKI (Iwate University)

(Abstracted)

The present report for areas of plane figures and volumes of solid bodies by the mensuration by parts is the 9th trial. The first trial was done by the area function and the area of a circle in 1985. The first tackle of a solid body was an approach for the formula of a volume of a triangular pyramid. In the present tackle, we had students to use calculators besides microcomputers. The teaching results in success a little.