東北数学教育学会年報
1994 3. 31 第25号

拡大・縮小と比

山形大学　森川幾太郎

概要　3項比の考えを含めて比を指導した。その実践の概要報告と3項比および等しい比に対する子ども達の考えを中心に報告する。

検索語　3項比　等しい比　拡大と縮小

1．授業案を作るにあたって考えたこと

1）比をどのように考えるか

比はいうまでもなく割合の1表現であるが、私はこの役割は等しい比の考え[1]が導入され、

$$a : b : c : \cdots = 1 : b/a : c/a : \cdots = a/b : 1 : c/b : \cdots = \cdots$$

という変形を行い、この等式の右辺の各項はaとかbを基にしたとき比率を示しているなどを考察した後に導入すればよいと考える。したがって、比の考えはその初めは測定して得られた数値をある順に配列したものである、として指導したい。

注）比a:bにおいて数値a、bは前項と後項のそれぞれに該当する量に共通な基準量cを定めこれをもとに計測して得られる値である、という解釈を見受けるが[2]、ある TV局の可視域の面積：TV局の出力の大きさ：TV局の人員：TV局運営経費のように、その各項に使われる量が異なる場合にはこの説明は成り立たない。

小学校では伝統的に2項比に限定して指導されている。確かに、2項比では比の値を使って、はじめから割合の1表現としての役割を指導できる。しかし反面、取り上げる問題の大半は5年生で学習した割合の考えで解決でき、比で考えるよさを浮き立たせない。私たちをとりまく様々な現象や状況は2量で構成されるものは少なく、多くのものは上記TV局の事例のように多項目にわたる量が同時に関係している。こう考えると、ある状況を構成する諸量を同時に表現するという多変量の観点から比を扱いたい。

2）等しい比をどのように導入するか

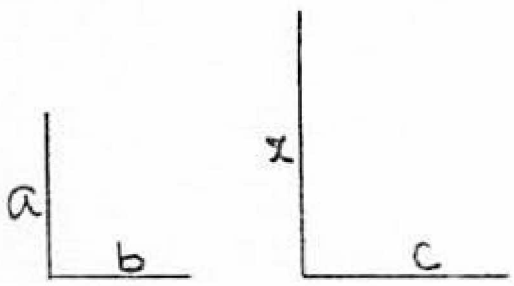
多変量の表現として比を導入したとき、等しい比に関する考えは図形の拡大・縮小の考えを背景にもって導入するのがよいと考える。ところで、このとき2つの考え方がある。一つは、ある順番に配列された比の各量がその順で拡大・縮小されたとする

a：b：c：…＝ta：tb：tc：…

である。これを「タイプ1の等しい比」ー内包型の等しい比といういい方もあろうーということにする。もうひとつは、拡大・縮小の際に対応する2量同士を比較しての

a：ta＝b：tb＝c：tc＝…

である。こちらは「タイプ2の等しい比」ー対応型の等しい比といういい方もあろうーということにする。



例：木の高さxをその影の長さcから見つけるために、高さaが分かっているものに対する影の長さbを使って求めるとき

タイプ1型）高さに対する影の長さの割合は不変である、と考えて次のように立式する。

b：a＝c：x

タイプ2型）高さと影の長さのそれぞれが拡大比もしくは縮小比を変えない、と考えて次の式をつくる

b：c＝a：x

3）教育として問題になること

上で述べたことを改めて整理すれば、比の指導では次の事柄が問題になる、と考える。

・2項比にとどめるのか、それとも多変量の代表としての3項比まで扱うのか

はじめから割合としての意味を強調するのか、それとも、ある事柄を多次元的にとらえるためのもの、ととらえて比の考えを導入するのか

・比が等しいことの意味ずけをどのようにおこなうか

比が等しいには、拡大・縮小型に限っても上で見たように2つの意味がある。その相互の関係をどのような論理で指導するか。それは「両者を同程度に認識させる」ことを目ざしてなのかそれとも「一方を重視して、他方は軽く」か。後者の場合、使われ方に差があるためか、それとも、その段階では子どもの理解の程度を考慮してか。そして、このどちらが子どもにとって自然に受け入れ

られるのかを考えてであるか。

2項比に限定したとき、既習事項との関係をどうするかも問題である。現在は、2項比の表現がさきにあり、比の値の学習を通して、この両者が手を結ぶ形になっている。しかし、割合を示す分数の考えができているとき、分数から比へ、という流れは考えられないだろうか。ここでは等しい比の考えが同値分数をつくるから展開できるからである。

・比の表現を簡単にする、ということで、分数や小数表現された比を整数比に直すことの教育はあるが、この逆は現在教育されていない。比例配分に関する問題解法を比そのもので行うことを考えると

$a : b = a/(a+b) : b/(a+b) = c\ (a/(a+b))\ :\ c\ (b/(a+b))$ （cはa+bの倍数）

を扱う必要があるのではないか。これは、多次元量表記としての比から、割合表現への比への橋渡し役をするであろう。この指導の大切さを感じさせられたのは、次に述べる佐藤実践における比例配分に関する問題に対する子どもの反応を見てからである。

2．佐藤実践の概要

1993年6月22日から7月3日まで計10時間を要して、山形市立第5小学校の佐藤恵子氏が6年生に対して次のような実践を試みた。

＜第1テーマ＞　比による表現と等しい比

（第1時）　クッキーつくりに必要な材料の2人前、3人前を求める

小麦粉、バター、砂糖の混ぜ合わて作るクッキー1人前に必要な重さを順に

ag と　bg と　cg

の形式で書き並べた。これと同じ味のクッキーを2人前、3人前、…焼くにはそれぞれどれほど準備すればよいか、を求めさせる。

この後で、それぞれを算数の記号であらわそう、ということばかけから

$a : b : c$

の比の表現を導入する

（第2時）　等しい比の表現

味を同じにして各材料を2人前、3人前、…、そろえる、という話題から、等式

$a : b : c\ =\ a\times d : b\times d : c\times d$　（d＝2、3、…）

を導入する。そして、味を変えないで作るとき、次の各部分の量を求めようという練習題を行う

a : b : c = d : - : -

(第3時) 等しい比(2)

前時と同じ話題で、a : b : c = a/d : b/d : c/d を扱う

<第2テーマ> 比を簡単に表す

(第1時) 整数比を簡単な整数比表現に

(第2時) 小数表現の入った比を整数比表現に直す

(第3時) 分数表現の入った比を整数比表現に直す

<第3テーマ> 2量の比としての比の値

(第1時) 実際の授業での扱いは次のものとは異なったが、ここでは、私の考えを示すことにする。

a : b : c = 1 : b/a : c/a = a/b : 1 : c/b

を扱い、クッキーづくりでの小麦粉、砂糖、バターを事例に比の各項はある項の値を単位にしてそのいくつ分にあたるかも求めることができることを知らせる。

2項比では、3項比と同様に

a : b = 1 : b/a = a/b : 1

と変形できることを扱い、a/bを比の値ということに触れる。

<第4テーマ> 図形の場面などほかの事例にも比が使えることを知る

(第1時) いくつかの3角形をコピー機で拡大したが、その中で拡大比が同じになっているものを探そう

子ども達からは、対応する1組の辺の割合や拡大率、さらにそれについての比を調べればよい、という考えが出され、それぞれの方法で取り組んだ。大半の児童が、パーセントや倍(小数表現)、比の考えの中から2種類以上の考え方を使って調べた。

比で考えた子どもの多くは、拡大率のイメージもあって、タイプ2の等しい比で考えた。1名のみが対応する3組の辺の長さを使って3項比を作って解いた。

(第2時) 木の高さと影の長さの関係をもとに木の高さを求める

授業では、拡大の仕方を考察することなく、タイプ1型の「b : a = c : x」しか指導されなかった。この考えに対しては、授業後に回収した子どものノートにかかれた授業の感想を見ても難しさを訴えた児童はいない。これは、前時に、対応する3辺を用いて拡大の様子が表現できる、という子どもの発表があったためと思われる。こうした状況を考えると、子どもに考えやすいタイプ2型の「b : c = a : x」による解法にも触れ、前者との考えの違いに触れるべきであった。

（第３時）　比例配分に関する問題

72cmのりぼんを姉と妹で５：４に分けたとき、それぞれが何cmになるか、という問題を解かせた。ほとんどの子どもが、型通りの

「５+４＝９、72/９＝８、８*５＝40」とか「72*５/９＝40、72*４/９＝32」の方法で解いたが、ひとり次のような立式を行った児童がいた。

５：４：９＝ｘ：ｙ：72

この解法は多くの児童の目をひきつけるところのものになり、80%を越える子ども達がたちどころに使えるようになった。これらの児童は、比の最終授業で扱った問題作りでは、このような比例配分の問題を作った。一方、この解法が使えていない児童は、木の高さと影のような拡大・縮小タイプの問題を作った。

３．佐藤実践でできたこと、問題になること

この佐藤実践終了後、子ども達のノートをお借りし子ども達の授業中に見いだした事柄や授業内容への感想と1994年２月４日に行った事後調査とから、この授業の特徴を見ることにする。

1) ３項比を導入時から取り上げたが、このことが原因のひとつになって、３角形の拡大、縮小だけでなく、比例配分の問題の場においてすら、かれらは３項比を用いて問題を解いた。この解法は、何人かが感想で述べているが、比例配分に関する問題を解くのに、きわめて便利である、と受けとめられた。

2) 比例配分の問題を３項比を用いて解くことに対する定着度は極めて高く、２学期に行った復習場面でも、全員に近い子どもがこの解法をすぐに使った。

ただし、年をあけて行った調査問題（問題は末尾にのせた）では、比例配分の考えを用いて解いて欲しいと願った解法に対し、正答者は、問題Ｂの問題２で２名、問題３で４名（いずれも32名中）に過ぎなかった。これは、２つの問題文がともに、「全体をある比で配分する」と表現されていないためと思われる。この種の問題も比例配分の考えを使って解ける、という指導がなされれば、正答者の数は多くなると思われる。それは、問題を解く式として、

$$\begin{array}{l} 40 : x : y_5 \\ \underline{-0.55} \quad 0.45\text{倍} \end{array} \qquad x=40\times 0.55 \qquad y=40\times 0.45$$

という表記をする児童が５名いたことことからもうかがえる。

3) 今回の比の指導は、第２節で述べたように、料理の素材を多次元的に表現し、等しい比は"拡大・縮小"の考えで導入した。このような"拡大・縮小"型の等しい比の考えを導入するなら、図形の拡大・縮小を先に扱って、その後に料理の材料に関する拡大・縮小に入る方がよかったのではないか、という思いもある。

それは、次のようなことでこだわりを持ち続けた子どもがいたからである。

佐藤実践では、等しい比を、クッキーの味を同じにして材料を揃える、で意味ずけた。これは1名を除いてすぐにすっと納得されたが、1名は理解できないままの子どもがいた。この子どもは、それぞれの材料の量を比例拡大しても味付けが変わらないという保障がえられない、と考えたのである。この児童が最終的にこの意味ずけに納得したのは、比の値を求めてからであった。

また、拡大・縮小の考えをはっきり図形を使って示した方が、等しい比のタイプ1とタイプ2の考え方の違いを明確に指導できた、と考えられるからである。

4．等しい比に対する児童の考え方一佐藤実践その後

等しい比を図形の拡大・縮小をもとに展開するとき、2種類の考えがあるがこのそれぞれについて、児童はどのように使い、またどのように考えているのであろうか。拡大、縮小の授業での子ども達の様子と事後調査の2つの面から見ることとする。

(1) 拡大・縮小の授業から

夏休み後、拡大縮小の授業が行われた。この授業中、出された課題に対して子ども達それぞれがどのような考えから課題を解決したのかを10名の子どものノートから見る。おおよそ、次のようなことがいえる。

与えられた3角形を拡大しその拡大された辺の長さを求める問題では、彼らが使う解決法は与えられた問題条件によって異なる。

a) 拡大率（たとえば1.5倍に拡大）が与えられているときは、

多くの子ども（8名）が

（与えられた3角形の辺の長さ）＊拡大率

を用いる。比を使う子どももいる（2名）が、それは

1：（拡大率）＝（与えられた3角形の辺の長さ）：x

とタイプ2型の考えを使う。

b) 地図の縮尺が比の形式で与えられ、地図上の2点間の長さから実際の長さを求める問題では、比の等式を用いて解く児童と地図上の長さに拡大率をかけて解く児童とはちょうど半数づつである。ここでの比を用いる解法ではすべてがタイプ2型である。

c) 1組の対応辺についてそのそれぞれの長さが与えられ、残りの対応辺については、うち1辺の長さが与えられそれに対応する辺の長さを求める問題では

5名が3項比を使う（つまり、タイプ1型の等しい比）。

与えられた3角形の隣り合う2辺の長さa、bを使って、a：b＝ta：x のタイプ1型が2名

a:ta＝b:xのタイプ2型が3名

これらの児童達は1学期に扱ったコピー機による3角形の拡大の様子を調べる課題では、次のような考えで解決していた。

3辺の長さについて3項比で表示した　1名

3角形の隣り合う2辺の比を調べる(a:b=ta:x)、というタイプ1型は1名

タイプ2型（a:ta=b:x)が　4名

比の形式は使わないが、対応する辺の長さの拡大率を調べる、という5年生の方式のみに終わった児童が4名

このように、拡大・縮小の考えをはじめて学習した段階では、拡大率の考えを直接使えるタイプ2型の等式が好んで使われた。しかし、辺の関係から3項比を作って解くことに慣れた2学期ではタイプ1型を使う子どもが増加している。ただ、前にも触れたように、拡大縮小において使われる比の等式は、条件の与えられ方によって使い分けがされ、個々人が特有の考えで解決しているとはいえない。

(2) 調査問題から（1994.2.4実施）

等しい比についてタイプ1型とタイプ2型をどのように使い分けるかを知ることを目的に末尾に掲載した調査問題をかれらに提示し、回答を求めた。

結果は、問題Bの問題1では1名を除いてほかの全員は使い分けができ、問題4では典型問題ではないにもかかわらず末尾の資料に見るようにほぼ70%の児童がタイプ1とタイプ2の使い分けを行っている。これは、女児のみに限れば、使いわけが正確にできたのはほぼ90%である。しかしながら、この2つタイプの違いを言語レベルで表現できたのは女児1名のみであった。これらを考えると、等しい比の考えを量場面をもとに導入する場合、この女児が指摘したようないい方、

タイプ1型では「小麦粉、砂とう、バターの順番に比べている」が、タイプ2型では、「小麦粉同士、砂とう同士というように同じ仲間で比べている」

を使えうか、あるいは

タイプ2形では「隣り合う数同士で比べる」がタイプ1型では「等式の左と右をその数が並んだ順に比べている」

という表現を用いることによって、タイプ1型とタイプ2型の考えの違いを意識して、それぞれが使えるまでの指導が可能と思われる。

謝辞　この小論は文中にも示したように、佐藤恵子先生には授業を実際にしていただいたほか、資料収集のために子ども達のノートをお貸し下さったほか、調査も実施しただくなど多大な御協力をいただいた。またこのような機会を作ってくださった松田晴男校長以下山形５小の職員の皆様にも合わせてお礼申し上げたい。

参考文献

1）日本数学教育学会編「算数指導のポイント８、数量関係」. 東洋館. 1980. pp. 150-155。この本の解説では、等しい比は比に用いられる数字の共通となる単位の変換をもとに導こう、としている。

2）前掲書にも見られるが、例えば、戸田清ほか編「数量関係の指導」. 金子書房. 1964. pにもこの種の記載がある。ただ、この本では、異種の量で構成される比についてこの後で触れてはいる。

参考　(1994. 2. 4実施の調査問題とその回答状況)

下の問題とそれに対する答えの出し方を読んで、いろいろな問題に答えてください

（問題）

料理の本に、１人分のクッキーをつくるための材料が

小麦粉　100g　砂とう　30g　バター　20g

と書いてありました。小麦粉500g用意したとき、この料理の本にでていたと同じ味のクッキーをつくるために、砂とうとバターをそれぞれ何gづつ用意すればよいでしょうか

この問題を「まさたか」、「よしえ」、「けんた」の３人がそれぞれの方法でときました。

まさたか

小麦粉が100gから500gへ５倍になったので、砂とうもバターも５倍用意します。

だから、砂とうは　30×５＝150(g)　バターは　20×５＝100(g)

よしえ

私は比でときました。

（砂とう）　$\underbrace{100 : 500}_{5倍} = \underbrace{30 : x}_{5倍}$　（バター）　$\underbrace{100 : 500}_{5倍} = \underbrace{20 : y}_{5倍}$

だから　x＝30×5＝150(g)　y＝20×5＝100(g)

けんた

ぼくも比を使いました。小麦粉、砂とう、バターの順番にそれぞれの重さを並べて、比をつくります。

$\underbrace{100 : 30 : 20 = 500}_{5倍} : x : y$　だから　x＝30×5＝150(g)…砂とう

y＝20×5＝100(g)…バター

問題Ａ　「まさたか」「よしえ」「けんた」の問題をとくときに使っている考え方に似たところがありますか？　また違うところがありますか？　あなたの感じたことを書い

てください

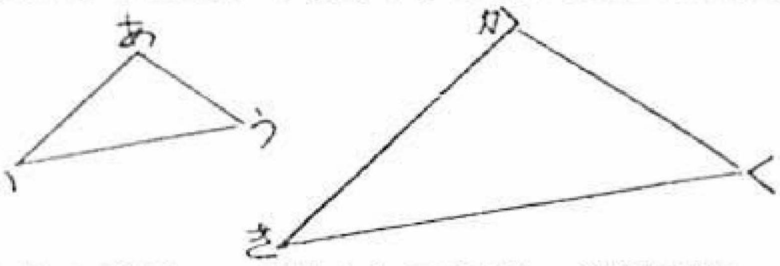
「まさたか」と「よしえ」の考えをくらべて

「よしえ」と「けんた」の考えをくらべて

「まさたか」と「けんた」の考えをくらべて

問題B　次の４つの問題を上の問題をといた３人の考えを使ってそれぞれといてください。その人の考え方では解けないときは「とくことができない」と答えを書く場所にはっきり書いてください

（１）３角形"あいう"を拡大して３角形"かきく"をかきました。辺かきと辺かくの長さをそれぞれ求めなさい

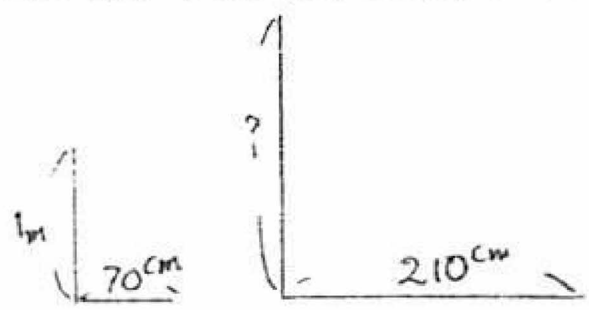


（まさたかの考え）　（よしえの考え）　（けんたの考え）（以下略）

（２）よしお君は筆と絵の具を買いました、筆は250円で、絵の具はその2.5倍でした。合わせて何円だったでしょう。

（３）さちえさんの組は全部で40人で、その55%が男子です。男子と女子はそれぞれ何人づつでしょう

（４）地面に垂直に高さ１ｍの棒と高さのわからない木が立っています。それぞれの影の長さを調べたら、棒の影の長さは70cmで、木の影の長さは210cmでした。木の高さはいくらでしょう。



問題に対する回答状況

＜問題Ａ＞に対する回答は、「まさたか」は直接の計算（あるいは計算式を作っている）で答えを見つけるが、「よしえ」は比を使い、「けんた」も比を使うが一つの式で表している、という解法の形式上の違いに、ほぼ全員がとらわれ、等しい比をつくる左辺と右辺の量としての意味に触れて述べたのは本文中にも示したように１名のみである。

＜問題Ｂ＞
調査問題３に対する回答者数（人数）

		「けんた」の考えによる解法				
		正解	40 : x : y .55 .45倍	他解	無答	計
よしえの考えによる解	正解	2				2
	40:x .55倍 40:y .45倍	1	4		3	8
	他の回答	1		2	1	4
	無答		1	1	16	18
	計	4	5	3	20	32

＜問題Ｂ＞
調査問題４に対する回答者数(人)

		けんたによる解		
		正解	誤答	計
よしえによる考え	正解	21	3	24
	誤答	5	3	8
	計	26	6	32

正解とは、それぞれに要求されたタイプにあった比例式が作れたことを示している。誤答は、求められたタイプに適合しない比例式を作ったことが主な原因で、「立式できない」という回答も含む。

Ratio with Concepts about Enlargement and Reduction

Ikutaro Morikawa / Faculty of Education Yamagata University

In Japan, almost teachers instruct ratios constructed by two terms a ,b as a:b. But If we wish to teach rolls or properties of ratio, we do not restrict to ratios constructed by two terms but must treat ratios constructed by three or more terms, since pupils learnt the concept of proportion in prevoius grade and they can use the method of proportion to solve the problems about proportion or ratio.

Mrs. Keiko Sato taught the idea of ratio with three terms in June 1993 to her pupils. Contents of it were constructed as following;

1) Represent the weights of some materials to make a biscuit using a ratio.

2) Introduce the concept of equivalence of ratio by using a recipe of biscuit. In this time, the concepts about the equivalence of ratio was introduced by "Type 1". I define "Type 1" and "Type 2" as following;

"Type 1 of equivalence" is defined as "a:b:c:…=ta:tb:tc:…"

"Type 2 of equivalence" is defined as "a:ta=b:tb=c:tc=…"

3) She introduce new usages of ratio as enlagement or reduction of triangles at a case to use an instrument to copy and propretional distribution. At first almost pupils used the idea of "Type2" to solve these problems. But a pupil solved these problems by using three terms ratio. This idea was received more 80% pupils at a glance. Then, almost of them could use the idae of "Type 1" to solve related to these problems.

In Feburary 1994, I researched the consciousness about their concepts of equivalence of ratio. I get following results.

1) They can not explain the diffences of "Type 1" and "Type 2" by using words.

2) About 70% of them can use both ideas consciously to solve some typical problems of ratio, when I require them to solve them by paying attentions to difference of them.