

## 6年生における対称図形への提案(2)

山形大学 森川 幾太郎

**概要** 小学校高学年においては、部分部分に論証を取り入れた学習を展開することができる。この小論では6年生の対称に関する学習を、考察対象の図形を多様な観点から基本図形に分解し、その分解された図形に関する性質をもとに論理的考察を行う、という方針で展開する試案を述べる。

**検索語** 線対称 点対称 論証

## 1 はじめに

従来の対称学習では、対称図形の定義や作図法の影響から、子ども達は、図形全体を裏返すとか $180^\circ$ 回転するという図形全体の移動や、あるいは図形の頂点の移動の仕方には注意の目を向けても、図形を構成する辺の移動には目が向いてはいない

ところで、図形の論証、それも合同に関わる論証では、直線図形に関する性質が学習対象になる。ここでは直線図形を構成する辺や角に注意の向けることが多い。今回提案する対称図形の指導試案では、論証を取り入れた展開を考えたので、取り上げる図形は直線図形に限定し、辺の移動に注意を払って対称図形の性質を考察することにした。例えば、与えられた直線図形が点対称図形かどうかの判定は

向い合う辺が等長で平行かを調べる、

によって行う。一方、線対称図形かどうかは、長さの等しい2辺が

2等辺3角形や等脚台形、あるいは長方形の向い合う2辺になっているかの考察によって判定できる。これは見方を変えれば、点対称である直線図形は、対角線の交点を共有する平行4辺形によって構成され、線対称である直線図形は、2等辺3角形、等脚台形、長方形によって構成される、ということである。

今回私が行う提案の第1の目的は、

図形を構成する基本図形に分解する目をまず育て、これをもとに、後に述べる問に対し、論理を用いて答えることができるようにさせたい

にある。

6年生の対称図形についての教科書で扱いは、対称図形の作図と直観をもとに与

えられた対称図形の対称軸や対称の中心の発見が中心であり、既習の図形の性質を対称性の観点から再整理することはほとんど行われていない。対称性の観点から、基本的な図形の性質を統合的に認識できるようにしたい。これが第2の願いである。

さらに、今回の提案を行った動機の一つに、オランダの数学教育学者ファン・ヒーレ夫妻の提案した幾何学習段階説の第2水準における学習のありようを検討したい、がある。ほかに以下の児童の実態を考えての理由もある。

- 1) 多くの5年生が、一部教材においてと部分的ではあるが、仮定をもとに結論を論理的に説明できる。この力をこの単元の学習を通してさらに伸ばしたい。
- 2) 図形を必要に応じて多面的にしかも統合的に考察できる力を育てたい。このために、図形をあるときは、3角形に分割でき、あるときは辺の長さや角の大きさを考察できるようにしたいと考える。

昨年度の5年生への実験授業の結果、3角形または長方形を基本図形として考えることができ、多角形の決定条件では辺や角に関する条件に注意した。しかし、多角形の決定の学習において、それが3角形から構成される、という視点から辺や角に関する条件を導く考えは一部の児童にしか育たなかった。これは、決定条件を各直線図形の作図に結びつけてとらえているためと思われる。

## 2 実践への提案

以下で述べる内容は、1994年9月19日より29日まで計9時間、山形大学附属小学校にて国井修先生が行って下さった実験授業結果を見て、手直ししたものである。当初の指導の概要は参考文献1—今回の小論はこの改訂版と見え、今回の論文題目に(2)という数字を付した—をご覧ください。

<提案の背景となる考え>

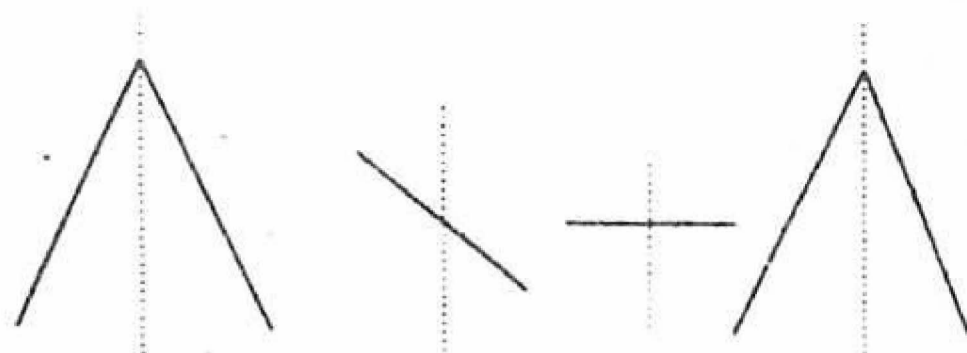
- 1) 対称図形はその構成要素となる基本図形を組み合わせることでつくる。このことをもとに、図形の性質を論証をもとに展開する。
- 2) 対称図形の作図は、対称図形の基本となるべき性質をはじめに見だし、その性質をもとに行う。
- 3) 小学校で扱った平面図形を対称の観点から再整理する。

### (第1部) 線対称

#### A) 原則となる事柄を見つける

次ページのような図を見せ、この中で、縦の線で折って、Aの場所にはさみを入

れることにできる形はどれであるかを見い出させる。そのように推定する理由も添えて。



この討議から、線対称図形を描くための次の原理となる事柄（図形）を見い出す。

（原理）軸で折って重なるように切り出された2つ線分は、

対称軸に対して互いに反対の側にあり、同じ長さであり、

それぞれが軸とつくる角の大きさが同じ。その特殊な場合が直角である。

次の性質も「論証」に際して用いるが、子どもには意識的に用いることは要求しない。いわば無意識的公理として扱う。

（原理2）軸を共有する2つ以上の図形を組み合わせて作った図形もその軸に関して線対称である。

（原理3）点AとBおよび点CとDのそれぞれが直線mに関して線対称の位置にあるとき、これらを結んだ直線ACとBD、あるいは直線ADとBCとはmに関して線対称。

問 折り重ねられた紙にはさみを2回もしくは3回入れて、3角形と4角形を切り出すとする。どのような形が切り出されるか。また、それらの形の性質を見いだそう。

### B) 線対称移動

線対称図形は対称軸で合同な2つの図形に2分され、対応する点が軸上にないとき、その2点を結ぶ線分は軸に直交し、長さが2分されることを基に、対称図形の一方の側が与えられたとき、それと裏返し合同の形を作図することで、線対称図形が作図できることを見いだす。作図は次の順で行う。

- 1) 頂点が対称軸上にある3角形や4角形を対称移動する
- 2) 対称軸と点を共有しない3角形や4角形の線対称移動

### C) 線対称な図形の性質

B-1)やB-2)で学習した作図から以下の事柄を知る。

- 1) 対称軸で合同な2つの図形に2分される。従って、
  - 1) 対応する辺の長さは等しい。
  - 1) 対応する角の大きさは等しい
- 2) 対応点同士を結ぶ線分は平行。これら線分の中点は軸上にある。
- 3) 対応点同士を結ぶ線分や対称軸上にとった点と対応する点を結ぶ線分によって、線対称図形が基本的な対称図形から構成される。従って、



対応辺は軸上で交わるか、交わらない場合は、それを延長すると軸上で交わるかあるいは平行。

#### D 練習問題

問題1 対称軸が頂点を通る図形の特徴は何か。また、辺の中点を通る図形の特徴は何か？

問題2 3角形、4角形の中で線対称になる図形を探す。

問題3 線対称である多角形を探す。

問題2、3では、何を根拠に該当する図形を探し出したか明確に意識させる。問題1の結論をもとに、次の事柄について非形式的な証明を行う。

問題4 線対称図形において、その対称軸は

- ・奇数多角形であるならば、その1頂点と向い合う辺の中点を通る。
- ・偶数多角形であれば、向い合う辺の中点を結んだものか、向い合う頂点を結ぶ

問題5 長方形では、向い合う辺の中点を結ぶ線分が対称軸になっても、対角線は対称軸にはならないことの説明

問題6 平行4辺形は線対称図形ではないことの説明

### 〔第2部〕 点対称

#### A) 平行4辺形と点対称図形

平行4辺形の性質の復習を行ったのち、平行4辺形は

どのような移動によって自分を自分に重ね合わせられるか

どのような線分によって切断すると合同な2つの部分に分割できるか

を調べる。様々な点対称図形を示し、それらについて平行4辺形と同じ事柄が成り立つことを調べる。

#### B) 点対称図形の分解

点対称図形では対応する頂点を結ぶ線分は1点を通り、その点で長さが2分されることを見いだす。これをもとに、

- 1) 点対称図形は対角線の交点と同じ点である平行4辺形から構成される
- 2) 点対称図形では、対応する辺（向い合う辺）は平行で、長さが等しい
- 3) 点対称図形では、対応する角（向い合う角）の大きさは等しい

を導き、証明も行う。また、これらの性質を用いて、点対称図形かどうかの判定も行う。

#### C) 点対称移動と点対称図形の作図



B)での学習をもとに、点対称図形の作図を行う。通常で中心で2分される直線を用いた方法以外に、向い合う辺が平行で等長である性質を用いる方法でも行う。

#### D) 点対称・線対称図形としての多角形

1) 正多角形の中で、点対称であるものはどのような形であろうか？

点対称図形では向いあう辺が平行でなければならない、という条件から、それは偶数多角形であることがわかる。偶数正多角形の対称軸に関する考察から、偶数正多角形は特殊な合同な長方形を組み合わせてできることにも触れたい。

2) 4角形の中で、点対称でありかつ線対称であるものはなんであろうか？

平行4辺形と等脚台形についてそれぞれの性質をまとめ、どの性質が線対称性に関係し、どれが点対称性に関係しているか整理しておく。たとえば、

向い合う辺の長さが等しいこと。

それが1組のときは？ それが2組ともにだったら？

向い合う辺が平行であることは？

向い合う角の大きさが等しいことは？ 隣り合う角の大きさが等しいことは？

対角線の長さが等しいことは？

4角形において点対称であり、かつ線対称であるものを見いだす活動を能率よく行うには、平行四辺形にどのような条件を加えるかを考えることで行える、に気づかせたい。そして、線対称な平行4辺形、を考えることから対称軸の位置によって

7) となり合う頂点は軸から等距離で、このとなり合う頂点を結ぶ線分は軸と直交あるいは

1) 向い合う頂点が軸から等距離で、この向い合う頂点を結ぶ線分が軸と直交であり、前者の場合が長方形、正方形、後者がひし形、正方形であると推論を進めさせたい。これをもとに、平行4辺形の分類を行う。

3) 向い合う辺が平行で、しかも長さが等しい「平行6辺形」の考察

この図形は仮定から点対称であるが、さらに線対称図形でもあるためにはどのような性質が加わらなければならないか、を対称軸の位置や対応辺、対応角に関する性質を考えながら探求させたい。

#### 参考文献

- 1) 森川幾太郎「小学校6年生への対称図形の提案」, 実践と研究No. 8, 数学教育実践研究会, pp. 2-12, 1994
- 2) 森川幾太郎「線対称移動と図形の性質」, 横地清編著「21世紀への学校数学の展望」 pp. 232-243, 誠文堂新光社, 1994

## <注記>

すでに述べたように、1994年9月山形大学附属小国井学級において実践した内容は、上記文献1)において提案した事柄にもとづいている。この実践での児童の活動や事後調査から気がついたいくつかの事柄を思いつくままあげてみる。

### [1] 線対称図形について

線対称な直線図形が2等辺3角形や等脚台形、長方形から構成できること自体は事後調査設問[2]に見るように全員が理解できている。しかし、線対称図形で対応点を結んでできる直線群が平行であることに意識はほとんどできていない。この理由として次の2つが考えられる。

1)線対称図形の作図を、作図の能率を図るために、交わる2円を用いて行った。

しかし、その技術修得に思わぬ時間を要し、対応点を結んだ直線群が軸に直交する、という性質を見いだす指導がやっとなで、これが平行であることは意識化させる指導ができなかった。

2)線対称図形に部分として隠された図形さがし自体は子ども達の興味を引いた。

それらの図形が2等辺3角形であり、等脚台形、長方形であることは直観で認めてしまい、その根拠を授業中に深く問いただすことを行わなかった。

なぜ等脚台形が含まれているかなど理由探しを行えばよかった、と思っている。

線対称図形が2等辺3角形や等脚台形などで構成されることを扱いながら、このことを本格的に利用する学習課題は、時間の関係から、「長方形はその対角線を軸とする対称図形ではない」を扱うことができたに過ぎない。この問に対しては、授業中ではほんの数名が折らないことを前提にした説明に気づいたのみである。しかし、授業終了後1ヶ月たって行った事後調査(設問[1]問題B)では4割の児童が我々が期待した回答をこの課題に対して寄せている。

ところで、この事後調査での問題Aと問題Bの回答をクロスさせると次のようなことが浮かび上がってくる。

命題の逆を説明に使う児童の多くは、この長方形の対角線に関する問のような論理そのもので回答を要求される問には答えられない。反面、この長方形の対角線に関する問題に正解を得た児童の大半は、逆命題を使わない。

### [2] 点対称図形について

点対称図形には平行4辺形が含まれることを見いだすことは事後調査設問[2]の結果に見るようにこの学習自体には子ども達は抵抗がない。しかし、



点対称図形は、一点を共有する平行4辺形によって構成できる  
向かい合う辺は平行で、長さが等しい

という一番指導したかったことでは残念ながら成果を得ることができなかった。これには次の理由が考えられる

- 1) 線対称図形では、基本の図形に分解するとそれは共通部分のない形に分解できるのに対し、点対称図形は基本図形に重なりがある。
- 2) 平行4辺形の性質を対称図形の観点から十分には指導できなかった。この両者の関係は残念ながら児童には孤立した状態のまま記憶された。

### [3] 統合的に性質をみること

正方形の性質は、それが線対称図形であり、点対称図形であることによっている。どの性質が、どの対称性に関係しているかを判定させたがこれに答えることができた児童はほんの一握りにすぎなかった。この問題を授業で扱う時間がなく、このような分析の視点を子どもに育てることができなかったことに大きな原因がある。さらに、設問[4]問題Aへの回答に見るように、一般と特殊の論理関係が十分に育っていないことにも関係があると思われる。

### [4] 論理一般」の理解ではたくさんの問題を抱えている

この授業では、長方形の対角線は対称軸にはならない、奇数多角形では点対称な図形を見いだすことができない、などの否定文を含む論理を扱った。この否定文自体についてどの程度の理解があるのか、95年2月27日国井学級の児童8名（男女各4名、成績上位に属する児童を中心に選んだ）に対して面接調査を行った。

#### (1) 背理法はやはり難しい

次の問は、山形大学の守屋誠司氏に教えていただいたものである。

「ドラエもんとのびた君のふたりが向い合っていて、二人は互いに相手の顔しか見えません。

赤いぼうしが2つと白いぼうしが1つあります。2人に目をつぶってもらって、その間に何色かのぼうしを2人にかぶせました。まず、のびた君に自分のかぶっているぼうしは何色ですか、と聞きました。そしたら「分かりません」と答えました。いったいドラエもんは何色のぼうしをかぶっていたのでしょうか」

この問に対し、理由も正しく「赤」と正解を答えたのは半数の4名にとどまった。このように、背理法自体への抵抗と、4角形の包摂関係の理解があいまいなことが重なったためであろう、次の問への正解者は3名にとどまった。

「平行4辺形が隠されていない図形は点対称ではない、ということは正しいと思



いますか」

ときどき正しくない、と答えた児童全員がその理由の中に、

「長方形や正方形は平行4辺形が隠されていなくても点対称図形だから」  
をあげていた。

(2) 一般と特殊の関係について

「奇数多角形には点対称図形がありませんが、3角形には点対称図形がありますか」

という問では、「3は奇数なのでこの文は正しい」と答えた児童は1名にとどまり、他の7名は3角形では点対称図形がないことを改めて説明した。

資料；事後調査から

6年生（山大付小94.9実践 調査10月31日 国井学級）

[1] 4角形の中から線対称図形を見いだすときに用いる方略と長方形には頂点を通る対称軸がないこととのクロス集計

問題A 由希子さんは4角形の中で線対称な図形を探しています。どんなところに目をつけて調べると能率よく調べられるか、教えてあげてください。

回答（総数36名）

- |                                    |     |
|------------------------------------|-----|
| a 4角形は線対称であるかどうかはまだ不明、という立場から      | 22名 |
| a-1 向い合う辺の長さや角の大きさが等しいかどうかを調べる     | 8   |
| a-2 向い合う辺が平行かどうかを調べる               | 2   |
| a-3 2等辺3角形など線対称の基本図形があるかどうか調べる     | 4   |
| a-4 一組の向い合う辺の中点を結ぶ直線が対称軸になるかどうか調べる | 6   |
| a-5 その他                            | 2   |
| b その4角形は線対称であることを前提にする             | 7名  |
| b-1 対称軸を見つけて（折る）                   | 7   |
| c 無回答                              | 7名  |

問題B 長方形には頂点を通る対称軸がありません。その理由を書きなさい

回答（総数36名）

- |                               |     |
|-------------------------------|-----|
| d 対角線に関して折らないことで説明            | 15名 |
| d-1 隣り合う2つの辺の長さが同じでない         | 6   |
| d-2 2等辺3角形などの線対称の基本図形が見いだせない  | 6   |
| d-3 対角線で2分されてできる2つの3角形は点対称である | 3   |
| e 対角線に関して折ることで説明              | 6名  |

f その他

3名

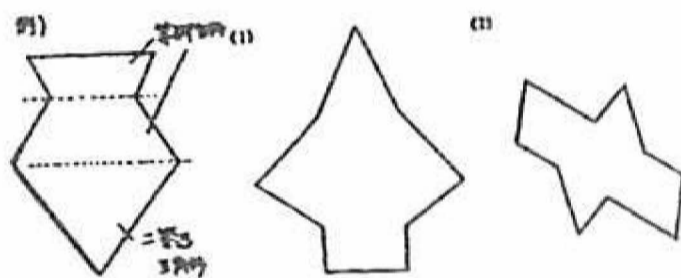
g 無回答

12名

上記の2つの問に対してクロス集計を行う

		問題 B				内訳						
		d	e	f	g	d-1	-2	-3	e	f	g	
問 題	a	12	2	2	6	a-1	3		1			4
						-2	1	1				
						-3	1	2	1			
						-4	1	1		1	1	2
						-5				1	1	
A	b	2	1		4			1	1	1		4
	c	1	3	1	2			1		3	1	2

[2] 次の図形の中に含まれる対称の基本となる図形を見つけなさい



(1)の図形では、対応点を直線で結び、2等辺3角形などを見いだすのが30名

(2)の図形で、2つ以上の平行4辺形を見いだすのが、8名。残りの児童は、1つの平行4辺形は見いだすが、この平行4辺形で3つの部分に分割してしまう。

(平行4辺形を見いだない児童はいない)

[3] 平行4辺形が点対称図形であることに対する意識調査

(山大付小6年国井学級 94.12.17)

問題A 太郎君が平行4辺形について調べています。平行4辺形にはたくさんの性質がありますが、太郎君はその全部を思い出せないでいます。まわりにいた友達がいっしょになって考えてくれました。

太郎君 「平行4辺形は向かい合う辺が平行だっていうことはわかっているんだ」

次郎君 「平行4辺形は確か点対称図形だったよね？」

花子さん「そうよ。それさえわかっているれば、平行4辺形の性質は簡単にみつかるわ」

太郎君 「それ、どういうこと？」

あなたはこの花子さんのことばを聞いてどんなことを思い出しましたか？

回答（回答者数 39名。複数回答）

a	点対称の性質の中に平行4辺形の性質が含まれる	14名
b	点対称図形の性質を列挙	14名
b-1	180°回転すると重なる図形である	6
b-2	向かい合う辺が平行	1
b-3	向かい合う辺の長さや角の大きさが等しい	8
c	その他	5名
d	無回答	11名

問題B 「平行4辺形は線対称な図形だと思っている人がいます。しかし、平行4辺形は線対称な図形ではありません。あなたがそのことをわかりやすく説明してあげてください。あなたなら、どんなふうに説明しますか？

回答

e	線対称ではない、ということから	32名	
e-1	折っても重ならない図形である	23	
	となりあう角の大きさが同じでないから		8
	線対称に関する基本図形が含まれていない		3
	その他		2
f	点対称図形である、という立場から	5名	
(f-1)	180°回転すると重なる	5)	
g	その他	5名	
h	無回答	4名	

問題Aと問題Bとのクロス集計を行ってみる

		問題B				内訳							
		e	f	g	h	e-1	-2	-3	-4	f	g	h	
同	a	13	1	1		8	2	5	1	1	1		
	b	10	3	2	1	b-1	4	4			1	1	
						-2	1						
						-3	4	3			2	1	1
A	c	2	2	1		2				2	1		
d	6	1	1	3		5	1		1	1	1	3	

謝辞 実験授業を實踐して下さった図井先生および、各種調査まとめに手助けをして下さった加藤ひとみ、鈴木章子、田仲祐一の諸君にお礼を申し上げたい。



A Proporsal to Teach Properties of Symmetric Figures for 6th Graders  
Ikutaro Morikawa Yamagata Univ.

Our expectation to pupils in learning about symmetric figures are done explanations logically to the following questions by 6th gaders;

- 1) Why a rectangle is not axial symmetry to its a diagonal?
- 2) Why a parallelogram is not axial symmetry?
- 3) If number of vertices of a polygon which is an axial symmetry is odd, what properties do we find to axes of it?

etc.

To answer these questions, we construct teachig contents as follows;

- 1) finding methods to draw symmetric figures by using fundamental facts about symmetric transformations.
- 2) finding fundamental figures to symntry and decomosing symmetric polygons by these fundamental figures.
- 3) finding propeties about symmetric polygons by using propreties about decomposed fundamental symmetric figures.