東北数学教育学会年報
1995 3.31 第26号

高木関数の構成法の一般化とその諸問題

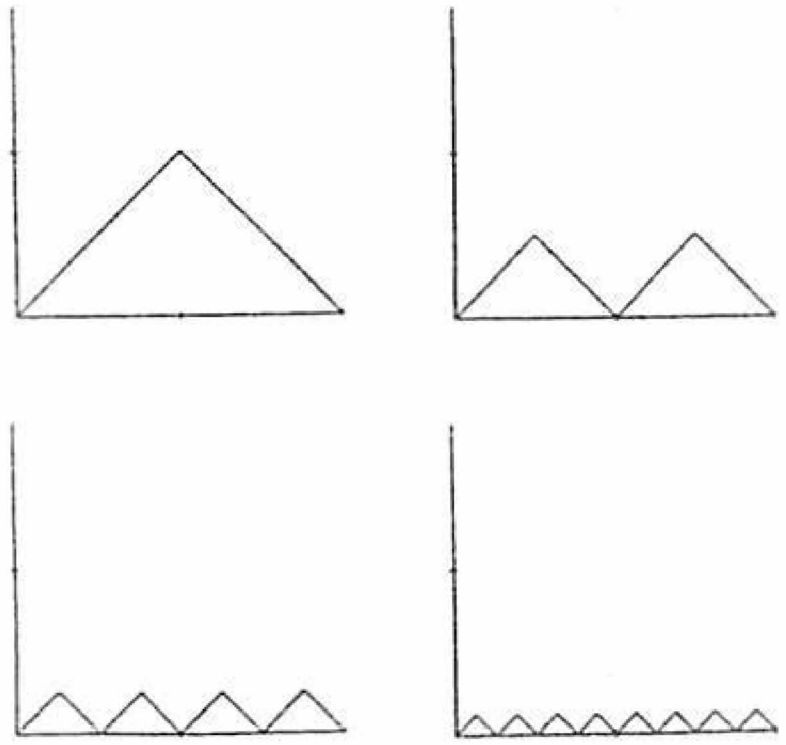
武内 徹　酒田市立第六中学校　守屋誠司　山形大学

1 研究の目的

これまでの関数教育は、連続関数が中心にとり上げられている。特に、微積分に発展させていく現在のカリキュラム上から、微分可能な関数を中心にした教育が行われている。しかし、フラクタルの研究が進められている今日では、高木関数のように連続関数であるけれども、いたるところ微分できない関数が再認識されてきている。

一方、高性能のコンピュータが、日常の生活に大きな役割を占めている今日の情報化社会において、コンピュータ・グラフィックスは、実写に迫った仮想現実（バーチャルリアリティ）の世界を表現している。さらに、マルチメディアの普及により、コンピュータの教育利用の変革が望まれている。

そこで、今回は、いたるところ微分不可能であるという性質と高木関数の構成方法の関連について、コンピュータ・グラフィックスの利用と共に考えてみた。



無限に積み上げていくと

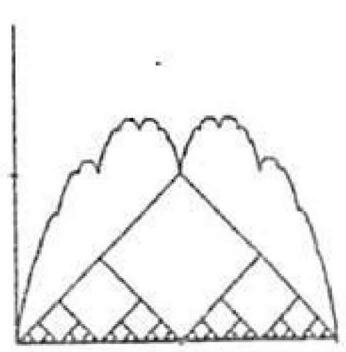
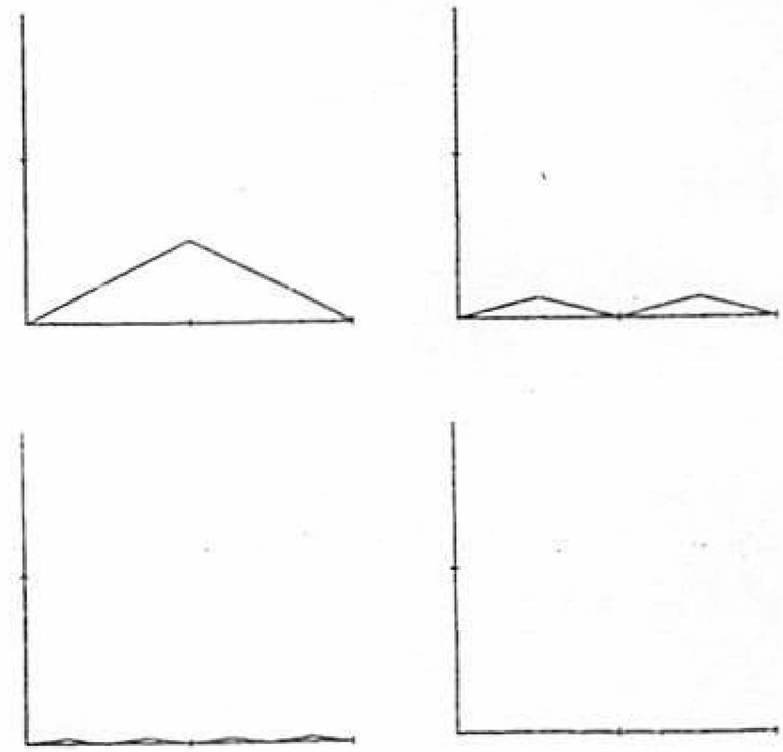


図1:高木関数



無限に積み上げていくと

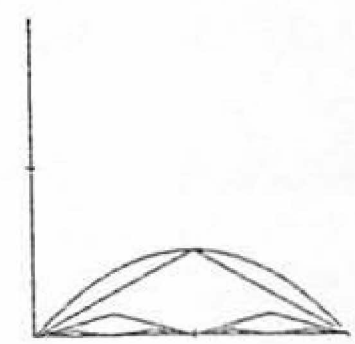


図2

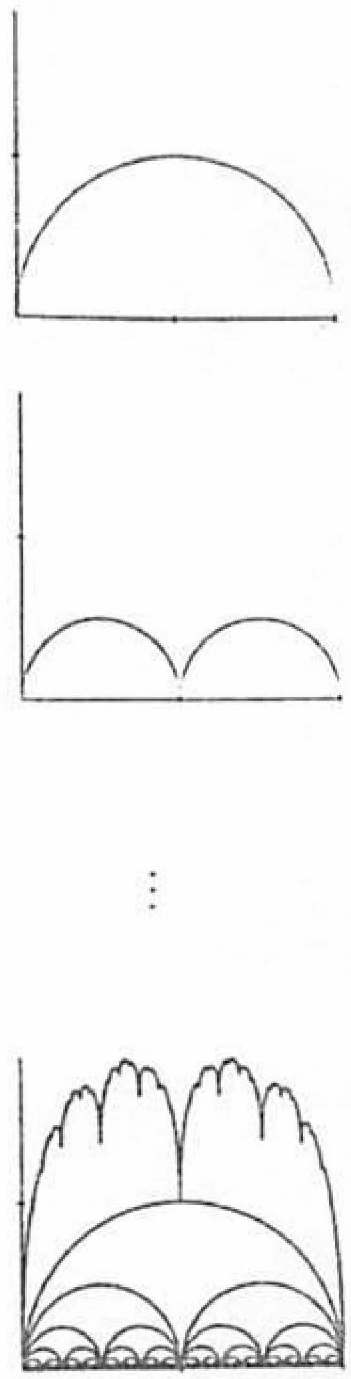


図3

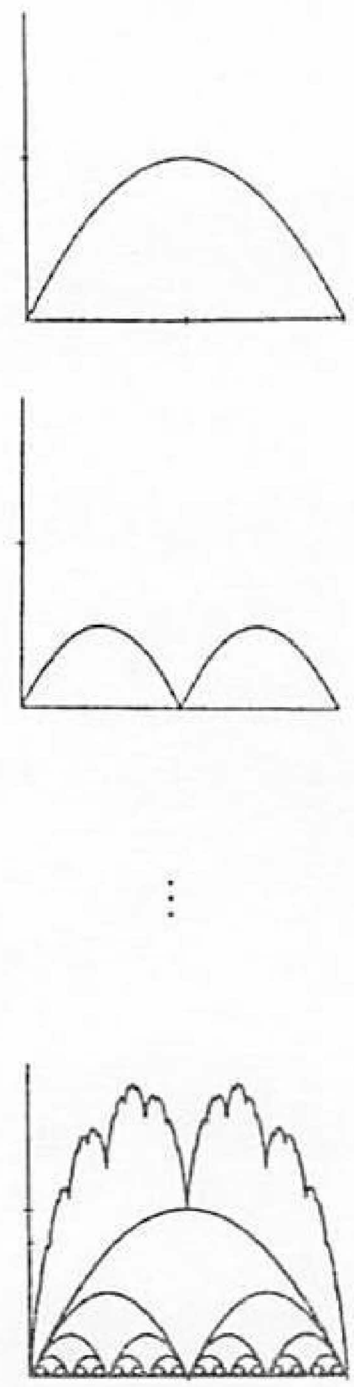


図4

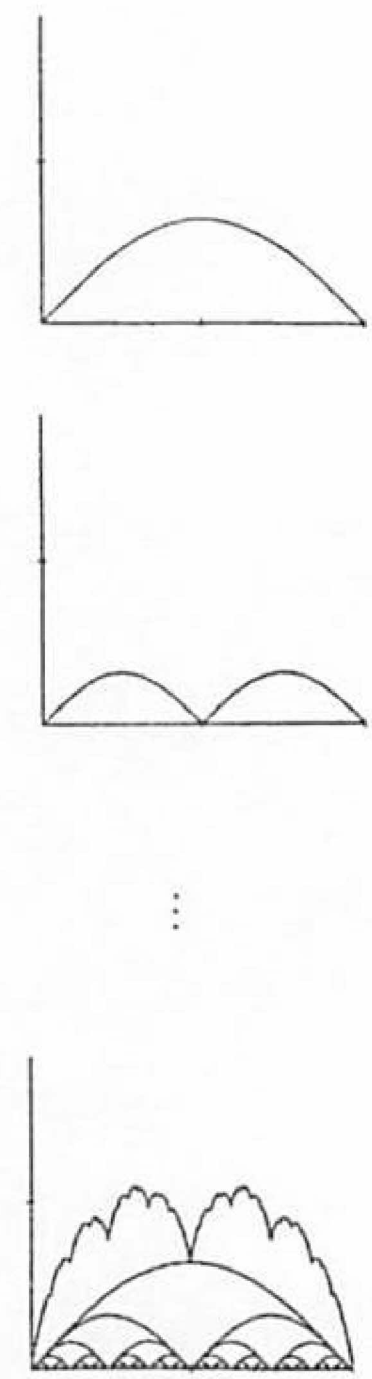


図5

図1の高木関数を構成している三角形の縮小率は $\frac{1}{2}$ である。図2では x 軸方向の縮小を $\frac{1}{2}$ のまま、 y 軸方向の縮小を $\frac{1}{4}$ に変えてみた。すると、なめらかな曲線ができるようである。

次に、図1の高木関数を構成している三角形を、半円、放物線、正弦曲線と変えてみた（図3、図4、図5）。これらのグラフィックから、いずれも連続で、いたるところギザギザに折れ曲がった関数ができあがっているように判断できる。つまり、図1の高木関数と同様の性質（いたるところ微分不可能な連続関数）が見られるようである。

それでは、これらの関数が立式できるものであるのか。また、上で判断したような性質を持っていることが証明できるのか、検討してみる。

2　高木関数について

第 n 段階の折れ線は、$T_n(x) = \dfrac{\varphi(2^n x)}{2^n}$ と表せる。
ただし、$\varphi(x) = \left| \left[x + \frac{1}{2} \right] - x \right| \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ で表されるので、
高木関数は、$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)$ で定めることができる。[1]
このとき、$T(x)$ は、極限をもち、連続関数であり、いたるところ微分不可能な関数であることが証明されている。[2]
また、内部自己相似集合であることも証明されている。[3]

3　なめらかな曲線について

第 n 段階の折れ線は、 $U_n(x) = \dfrac{\varphi(2^n x)}{2^{2n+1}}$ と表せる。
ただし、 $\varphi(x) = \left|\left[x + \dfrac{1}{2}\right] - x\right|$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で表されるので、
極限の関数は、 $U(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$ で定めることができる。
このとき、 $U(x)$ のグラフは $0 \leq x \leq 1$ のとき $y = x(1-x)$ という滑らかな(微分係数が連続な)関数のグラフになる。
[4]

4　"半円"高木関数について

高木関数を構成している折れ線を半円に変更すると、第 n 段階は、 $C_n(x) = \psi_n\left(x - \dfrac{[2^n x]}{2^n}\right)$ と表せる。
ただし、 $\psi_n(x) = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{x - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で表されるので、
半円高木関数は、 $C(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)$ で定めることができる。

このとき、 $C(x)$ は、極限をもち、連続関数である。また、いたるところ微分不可能な関数であるかどうかは、はっきりしないが、 $\dfrac{\ell}{2^m}$ $(\ell, m \in Z, m \geq 1)$ の形の有理数のときは、微分不可能である。
proof.

- 連続については、高木関数の場合と同様に証明できる。
- いたるところ微分不可能かどうかについて

文献 [2] の論法を用いると、
(ア) x が $\dfrac{\ell}{2^m}$ の形の有理数でないとき
$\dfrac{\ell}{2^m}$ の形の有理数でない x は、二進展開によって、

$$x = [x] + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \frac{c_3}{2^3} + \cdots \quad (\text{ただし、} c_1, c_2, c_3, \cdots : 0 \text{または} 1)$$

と一意的に表せる。
ここで、 $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = \cdots = 1$ となるような n は存在せず、

$$\frac{c_{n+1}}{2} + \frac{c_{n+2}}{2^2} + \frac{c_{n+3}}{2^3} + \cdots < 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

が成り立っている。
また、 $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = \cdots = 0$ となるような n は存在しない。
ここで、

$$\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{2^{n+2}} + \cdots \equiv \tau_{n+1}$$

$$\frac{1 - c_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{1 - c_{n+2}}{2^{n+2}} + \cdots \equiv \tau'_{n+1}$$

とすると、

$$\begin{aligned} C_n(x) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{x - \frac{[2^n x]}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left([x] + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots\right) - \left([x] + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left(\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{2^{n+2}} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\tau_{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \tau_{n+1}\right\}\tau_{n+1}} \\
&= \sqrt{\tau'_{n+1}\tau_{n+1}}
\end{aligned}
$$

また、$\forall k = 1, 2, \cdots$に対し、

$$x = [x] + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_k}{2^k} + \tau_{k+1}$$

と表せ、

$$x + h = [x] + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_k}{2^k} + \tau'_{k+1}$$

によって$h = h_k$を定めると、

$$\tau'_{k+1} - \tau_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\tau_{k+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^k \to 0 \ (k \to \infty)$$

$$\tau'_{k+1} - \tau_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^k - 2\tau_{k+1} > -\left(\frac{1}{2}\right)^k \to 0 \ (k \to \infty)$$

より、$0 \neq h_k = \tau'_{k+1} - \tau_{k+1} \to 0 \ (k \to \infty)$

(1) $0 \leq n \leq k-1$のとき

$$
\begin{aligned}
C_n(x + h_k) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{(x + h_k) - \frac{[2^n (x + h_k)]}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{(x + h_k) - \frac{\left[2^n \left([x] + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n} + \cdots + \frac{c_k}{2^k} + \tau'_{k+1}\right)\right]}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{(x + h_k) - \frac{2^n [x] + 2^{n-1}c_1 + 2^{n-2}c_2 + \cdots + c_n}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{(x + h_k) - \left([x] + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left(\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{c_{n+2}}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{c_k}{2^k} + \tau'_{k+1}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left(\tau_{n+1} - \tau_{k+1} + \tau'_{k+1}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{(\tau_{n+1} + h_k) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \tau_{n+1} - h_k\right\}(\tau_{n+1} + h_k)} \\
&= \sqrt{(\tau'_{n+1} - h_k)(\tau_{n+1} + h_k)}
\end{aligned}
$$

したがって、$n=0,1,2,\cdots,k-1$のとき、

$$\begin{aligned}\frac{C_n(x+h_k)-C_n(x)}{h_k} &= \frac{\sqrt{(\tau'_{n+1}-h_k)(\tau_{n+1}+h_k)}-\sqrt{\tau'_{n+1}\tau_{n+1}}}{h_k}\\ &= \frac{\tau'_{n+1}-\tau_{n+1}-h_k}{\sqrt{(\tau'_{n+1}-h_k)(\tau_{n+1}+h_k)}+\sqrt{\tau'_{n+1}\tau_{n+1}}}\end{aligned}$$

(2) $k\leq n$のとき

$$\begin{aligned}&C_n(x+h_k)\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}-\left\{(x+h_k)-\frac{\left[2^n\left([x]+\frac{c_1}{2}+\cdots+\frac{c_k}{2^k}+\frac{1-c_{k+1}}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1-c_n}{2^n}+\cdots\right)\right]}{2^n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}-\left\{(x+h_k)-\left([x]+\frac{c_1}{2}+\cdots+\frac{c_k}{2^k}+\frac{1-c_{k+1}}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1-c_n}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}-\left\{\tau'_{k+1}-\left(\frac{1-c_{k+1}}{2^{k+1}}+\cdots+\frac{1-c_n}{2^n}\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2}\\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}-\left\{\tau'_{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2}\\ &= \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-\tau'_{n+1}\right\}\tau'_{n+1}}\\ &= \sqrt{\tau_{n+1}\tau'_{n+1}}\end{aligned}$$

よって、$n=k,k+1,k+2,\cdots$のとき、

$$C_n(x+h_k)-C_n(x)=0$$

(1)、(2)より

$$\begin{aligned}\frac{C(x+h_k)-C(x)}{h_k} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n(x+h_k)-C_n(x)}{h_k}\\ &= \sum_{n=0}^{k-1}\frac{\tau'_{n+1}-\tau_{n+1}-h_k}{\sqrt{(\tau'_{n+1}-h_k)(\tau_{n+1}+h_k)}+\sqrt{\tau'_{n+1}\tau_{n+1}}}\end{aligned}$$

結局、この h_k のとり方では、$\dfrac{\ell}{2^m}$ の形の有理数でないxにおいて、微分不可能かどうかは分からない。

(イ)xが$\dfrac{\ell}{2^m}$の形の有理数のとき

$$x=[x]+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2^2}+\frac{c_3}{2^3}+\cdots \quad (\text{ただし、}c_1,c_2,c_3,\cdots:0\text{または}1)$$

と表したとき、$c_{m+1}=c_{m+2}=\cdots=0$となるから、$h_k=\dfrac{1}{2^k}$ $(k=1,2,\cdots)$として、
$k\geq m+1$のときを考えると、

$$x+h_k=[x]+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2^2}+\cdots+\frac{c_m}{2^m}+\frac{1}{2^k}$$

より、

(1)$n\geq m$のとき

$$C_n(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}-\left\{\left([x]+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{2^2}+\cdots+\frac{c_m}{2^m}\right)-\frac{[2^n[x]+2^{n-1}c_1+\cdots+2^{n-m}c_m]}{2^n}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left([x] + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_m}{2^m}\right) - \left([x] + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_m}{2^m}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(i)$n \geq k$のとき

$$
\begin{aligned}
&C_n(x + h_k) \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left([x] + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_m}{2^m} + \frac{1}{2^k}\right) - \frac{[2^n[x] + 2^{n-1}c_1 + \cdots + 2^{n-m}c_m + 2^{n-k}]}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left([x] + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_m}{2^m} + \frac{1}{2^k}\right) - \left([x] + \frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2^2} + \cdots + \frac{c_m}{2^m} + \frac{1}{2^k}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(ii)$n \leq k-1$のとき

$$
\begin{aligned}
C_n(x + h_k) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left([x] + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_m}{2^m} + \frac{1}{2^k}\right) - \left([x] + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_m}{2^m}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\frac{1}{2^k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2}\right\}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}}
\end{aligned}
$$

(2)$n \leq m-1$のとき

$$
\begin{aligned}
&C_n(x) \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left([x] + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_m}{2^m}\right) - \frac{[2^n[x] + 2^{n-1}c_1 + \cdots + c_n + \frac{c_{n+1}}{2} + \cdots + \frac{c_m}{2^{m-n}}]}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left([x] + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n} + \cdots + \frac{c_m}{2^m}\right) - \left([x] + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left(\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{c_m}{2^m}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\tau_{n+1} - \tau_{m+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \tau_{n+1} + \tau_{m+1}\right\}(\tau_{n+1} - \tau_{m+1})} \\
&= \sqrt{(\tau'_{n+1} + \tau_{m+1})(\tau_{n+1} - \tau_{m+1})}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_n(x + h_k) \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{(x + h_k) - \frac{[2^n[x] + 2^{n-1}c_1 + \cdots + c_n + \frac{c_{n+1}}{2} + \cdots + \frac{c_m}{2^{m-n}} + \frac{1}{2^{k-n}}]}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left([x] + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n} + \cdots + \frac{c_m}{2^m} + \frac{1}{2^k}\right) - \left\{[x] + \frac{c_1}{2} + \cdots + \frac{c_n}{2^n}\right\} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left(\frac{c_{n+1}}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{c_m}{2^m} + \frac{1}{2^k}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+2} - \left\{\left(\tau_{n+1} - \tau_{m+1} + \frac{1}{2^k}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2} \\
&= \sqrt{\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \tau_{n+1} + \tau_{m+1} - \frac{1}{2^k}\right\}\left(\tau_{n+1} - \tau_{m+1} + \frac{1}{2^k}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\tau'_{n+1} + \tau_{m+1} - \frac{1}{2^k}\right)\left(\tau_{n+1} - \tau_{m+1} + \frac{1}{2^k}\right)}
\end{aligned}
$$

(1)、(2) より、

$$
\begin{aligned}
\frac{C(x+h_k) - C(x)}{h_k} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n(x+h_k) - C_n(x)}{h_k} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{C_n(x+h_k) - C_n(x)}{h_k} + \sum_{n=m}^{k-1} \frac{C_n(x+h_k) - C_n(x)}{h_k} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{C_n(x+h_k) - C_n(x)}{h_k} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} 2^k \left(\sqrt{\left(\tau'_{n+1} + \tau_{m+1} - \frac{1}{2^k}\right)\left(\tau_{n+1} - \tau_{m+1} + \frac{1}{2^k}\right)} - \sqrt{\left(\tau'_{n+1} + \tau_{m+1}\right)\left(\tau_{n+1} - \tau_{m+1}\right)}\right) \\
&\quad + \sum_{n=m}^{k-1} 2^k \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}}
\end{aligned}
$$

ここで、$n = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ のとき、

$$
\left| 2^k \left(\sqrt{\left(\tau'_{n+1} + \tau_{m+1} - \frac{1}{2^k}\right)\left(\tau_{n+1} - \tau_{m+1} + \frac{1}{2^k}\right)} - \sqrt{\left(\tau'_{n+1} + \tau_{m+1}\right)\left(\tau_{n+1} - \tau_{m+1}\right)}\right) \right| < \infty
$$

$n = m, m+1, \cdots, k-1$ のとき

$M_n = 2^k \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}}$ とおくと、

$$
M_m > M_{m+1} > \cdots > M_{k-1}
$$

ここで、$n = k-1$ ならば、

$$
2^k \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}} = 2^k \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}} = 2^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k} = 1
$$

したがって、$M_m > M_{m+1} > \cdots > M_{k-1} = 1$ となるから、

$$
\sum_{n=m}^{k-1} 2^k \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}} \longrightarrow \infty \ (k \longrightarrow \infty)
$$

よって、$\dfrac{C(x+h_k) - C(x)}{h_k}$ の極限は∞である。

つまり、x が $\dfrac{\ell}{2^m}$ の形の有理数のとき、$C'(x)$ は存在しない。

5 ”放物線” 高木関数について

高木関数を構成している折れ線を放物線に変更すると、第n段階は、$P_n(x) = \omega_n\left(x - \dfrac{[2^n x]}{2^n}\right)$ と表せる。

ただし、$\omega_n(x) = -2^{n+1}\left\{x - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で表されるので、

放物線高木関数は、$P(x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)$ で定めることができる。

このとき、放物線高木関数も、半円高木関数と同様の結果になる。

proof.

- 連続については、高木関数の場合と同様に証明できる。
- いたるところ微分不可能かどうかについて

文献 [2] の論法を用いると、

(ア)xが$\dfrac{\ell}{2^m}$の形の有理数でないとき

$$P_n(x)=-2^{n+1}\tau_{n+1}^2+2\tau_{n+1}$$

(1) $0\le n\le k-1$のとき

$$P_n(x+h_k)=-2^{n+1}\tau_{n+1}^2-2^{n+2}h_k\tau_{n+1}-2^{n+1}h_k^2+2\tau_{n+1}+2h_k$$

よって、

$$\frac{P_n(x+h_k)-P_n(x)}{h_k}=-2^{n+2}\tau_{n+1}-2^{n+1}h_k+2$$

(2) $k\le n$のとき

$$P_n(x+h_k)=-2^{n+1}\tau_{n+1}^2+2\tau_{n+1}$$

よって、$n=k,k+1,k+2,\cdots$のとき、

$$P_n(x+h_k)-P_n(x)=0$$

(1)、(2) より

$$\begin{aligned}\frac{P(x+h_k)-P(x)}{h_k} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x+h_k)-P_n(x)}{h_k}\\ &= \sum_{n=0}^{k-1}\left(-2^{n+2}\tau_{n+1}-2^{n+1}h_k+2\right)\end{aligned}$$

結局、この h_k のとり方では、$\dfrac{\ell}{2^m}$ の形の有理数でないxにおいて、微分不可能かどうかは分からない。

(イ)xが$\dfrac{\ell}{2^m}$の形の有理数のとき

(1)$n\ge m$のとき $P_n(x)=0$

(i)$n\ge k$のとき $P_n(x+h_k)=0$

(ii)$n\le k-1$のとき

$$P_n(x+h_k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-n-1}$$

(2)$n\le m-1$のとき

$$P_n(x)=2^{n+1}\left(\tau'_{n+1}+\tau_{m+1}\right)\left(\tau_{n+1}-\tau_{m+1}\right)$$

$$P_n(x+h_k)=2^{n+1}\left(\tau'_{n+1}+\tau_{m+1}-\frac{1}{2^k}\right)\left(\tau_{n+1}-\tau_{m+1}+\frac{1}{2^k}\right)$$

(1)、(2) より、

$$\begin{aligned}
\frac{P(x+h_k)-P(x)}{h_k} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(x+h_k)-P_n(x)}{h_k} \\
&= \sum_{n=0}^{m-1}\frac{P_n(x+h_k)-P_n(x)}{h_k}+\sum_{n=m}^{k-1}\frac{P_n(x+h_k)-P_n(x)}{h_k}+\sum_{n=k}^{\infty}\frac{P_n(x+h_k)-P_n(x)}{h_k} \\
&\longrightarrow \infty \quad (k \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

よって、$\dfrac{P(x+h_k)-P(x)}{h_k}$ の極限は∞である。

つまり、x が $\dfrac{\ell}{2^m}$ の形の有理数のとき、$P'(x)$ は存在しない。 ∎

6 "サイン" 高木関数について

高木関数を構成している折れ線を正弦曲線に変更すると、

第n段階は、$S_n(x)=\dfrac{1}{2^n}|\sin(2^n\pi x)| \quad (n=0,1,2,\cdots)$ で表されるので、

サイン高木関数は、$S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}S_n(x)$ で定めることができる。

このとき、サイン高木関数も、半円高木関数と同様の結果になる。

proof.

- 連続については、高木関数の場合と同様に証明できる。 ∎

- いたるところ微分不可能かどうかについて

$|\sin(\pi x)|$は、xの連続関数であり、数直線$\mathcal{R}$上の整数を除いて微分可能である。

$\forall k\in\mathcal{Z}$については、右および左に微分可能で、

$$\lim_{h\to+0}\frac{|\sin\pi(k+h)|-|\sin\pi k|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|\sin\pi(k+h)|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|\sin\pi h|}{h}=\pi$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{|\sin\pi(k+h)|-|\sin\pi k|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|\sin\pi(k+h)|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|\sin\pi h|}{h}=-\pi$$

$S(x)$がある1つの$\dfrac{\ell}{2^m}$の形の有理点rで微分可能であったと仮定すると、$2^n r$が整数となる自然数nの最小のものがmとなる。

$n<m$のとき、$2^n r$は整数でないから、$|\sin(2^n\pi x)|$は、$x=r$において微分可能となる。

したがって、$\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1}\frac{1}{2^n}|\sin(2^n\pi x)|$が$x=r$において微分可能となるから、

$$\sigma_m(x)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{2^n}|\sin(2^n\pi x)|$$

も$x=r$において微分可能となる。

このとき、$\sigma_m(x)\geq S_m(x),\quad \sigma_m(r)=S_m(r)=0$となるから、$x\to r+0$のときは、$x-r>0$、$x\to r-0$のときは、$x-r<0$となることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
\sigma_m'(r) &= \lim_{x\to r+0}\frac{\sigma_m(x)-\sigma_m(r)}{x-r}=\lim_{x\to r+0}\frac{\sigma_m(x)}{x-r} \\
&\geq \lim_{x\to r+0}\frac{S_m(x)}{x-r}=\lim_{x\to r+0}\frac{|\sin(2^m\pi x)|}{2^m(x-r)}=\lim_{h\to+0}\frac{|\sin 2^m\pi(r+h)|}{2^m h}=\lim_{h\to+0}\frac{|\sin\pi(2^m r+2^m h)|}{2^m h} \\
&= \lim_{h\to+0}\frac{|\sin(2^m\pi h)|}{2^m h}=\pi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma'_m(r) &= \lim_{x \to r-0} \frac{\sigma_m(x) - \sigma_m(r)}{x - r} = \lim_{x \to r-0} \frac{\sigma_m(x)}{x - r} \\
&\leq \lim_{x \to r-0} \frac{S_m(x)}{x - r} = \lim_{x \to r-0} \frac{|\sin(2^m \pi x)|}{2^m (x - r)} = \lim_{h \to -0} \frac{|\sin 2^m \pi (r + h)|}{2^m h} = \lim_{h \to -0} \frac{|\sin \pi (2^m r + 2^m h)|}{2^m h} \\
&= \lim_{h \to -0} \frac{|\sin (2^m \pi h)|}{2^m h} = -\pi
\end{aligned}
$$

これは矛盾である。

よって、x が $\frac{\ell}{2^m}$ の形の有理数のとき、$S'(x)$ は存在しない。 ∎

7 まとめ

以上、未証明の部分が多く残っているが、これまで調べてきたことをまとめると、いずれの関数も連続関数でり、$\frac{\ell}{2^m}$ の形の有理数のときには、微分不可能であることは明らかになった。それ以外のときには、高木関数では振動して極限が収束しないことにより、有限な微分係数を持たないが、半円、放物線、正弦曲線の場合には、この証明の手法では結論が得られていない。つまり、いたるところで微分不可能であるかどうかははっきりせず、これは、高木関数固有の特徴であると予想も立てることができる。

また、これまで、数学的事象に限らず、日常的な様々な事象について、その内容を視覚的に表現する手段として、コンピュータ・グラフィックが多く用いられている。また、数学的なアイデアを演繹的に未証明のまま、コンピュータを使って帰納的に構成していくことは可能である。しかし、どのようなコンピュータにもその処理能力には限界があり、コンピュータが描き出す世界は、有限の世界しか表現していない。このことを忘れてしまい、コンピュータの画面だけによって、問題がすべて解決していると思い込むのは早急である。今回の事例は、コンピュータを問題解決の場面で利用する場合には、その適用範囲を考える必要があることを示唆しているものと思われる。

参考文献

[1] 羽鳥裕久, 数学の小さな旅, 近代科学社,1982,pp.176-177.

[2] 前掲[1],pp.169-170.pp.177-180.

[3] 石村貞夫・石村園子, フラクタル数学, 東京図書,1990,pp.62-64.

[4] 山口昌哉, カオスとフラクタル入門, 日本放送出版協会,1992,pp.51-52.

[5] 小平邦彦, 解析入門, 岩波書店,1991,pp.124.

A Study on Generalizations and Problems of Construction Method of Takagi's Function

Dairoku Junior High School in Sakata　Toru TAKEUCHI　Yanagata Unversity　Seiji MORIYA

abstracted

Takagi's function (T. Takagi 1903) is a famous example of undifferentable functions everywhere in interval [0,1]. It has been proved non-homogeneous self-similarity set afterwards. Both its topologycal and Hausdorff dimension are 1 dimention.

We paid attention to the construction method of Takagi's function,and analyzed variations of Takagi's function which changed polygonal lines into upper semicircles, parabolas, and sine curves. Then, we got the result that these functions are undifferentiable functions in Q such as $\frac{\ell}{2^m}$ $(\ell, m \in Z, m \geq 1)$.