東北数学教育学会年報
1995 3.31 第26号

コンピュータ利用マルチメディア環境授業の研究（7）

―― 中学数学：直線平面の決定条件・デザルグの定理 ――

佐伯　卓也（岩手大学教育学部）

協力者：布田　貢・深渡綾子
（平成5年度岩手大学教育学部4年次学生）

教育現場へのマルチメディアの導入が問題になっているが，既にコンピュータが導入されている学校ではマルチメディアと言われても対応する機械を導入することは難しい。一方教師教育ではマルチメディアに対応できる教師の育成をしなければならない。このような要求から附属中学の現有システムを利用して学生にマルチメディアの考え方を植え付ける教育を試みた研究の一つであり，教材にはデザルグの定理を含んでいるので，このようなふくらまし教材が中学生を対象にして授業が組めるか否かの確かめを行った。
［キーワード］中学校数学，コンピュータの教育利用，教師教育，
プログラミングのビジュアル化

1　はしがき

児童生徒にコンピュータを操作させる時，その操作性が問題になる。岩手大学教育学部附属中学校のCAI教室のコンピュータにマウスが付いたのが昨年（1993年）の4月であった。生徒にマウス等を操作させるという，いわゆるビジュアルなソフトを提供するというソフト開発に本格的に取り組むことになった。ここでソフトの「ビジュアル化」と言うのは，例えばメニュー選択等がマウスのカーソルとか，マウスによらない時は色つき大型カーソルを矢印キー等で動かして選択画面をするなどの，いわゆる「ビジュアル」に操作される意味である。本稿はプログラムのビジュアル化としてはマウスによらない方式を利用し操作性を高めたソフトの自己開発を試みた。

さて，本研究の内容は，初等幾何学の基礎として直線の決定条件，平面の決定条件のような基本的な平面図形や空間図形の認識を深める内容とした。基本図形とは，厳密でないが，例えばヒルベルトの「幾何学基礎論」（ヒルベルト・中村訳，1930）の中にある“無定義要素”と，公理系の一部の命題群にでてくる諸概念と考えている。このような内容をパソコンで指導する試みは筆者の研究室では初めてのことである。最後にふくらまし教材として，空間の場合の“デザルグの定理”を取り扱った。

2　研究の目的

本研究はプレサービス教師教育として未来教師に，クラス単位のコンピュータを利用し

た数学の授業ができるための，ソフトウェア開発及びそれを用いて，そのほかのメディアも併用したマルチメディア環境授業の理論と技術を身に付けさせるための指導法を開発しマニュアル化するためのデータを提供することを第一の目的としている。第二の目的としては，ふくらまし教材としてのデザルグの定理（立体）が中学校の生徒で効果的に扱うことができるか否かを確かめることである。なお，本研究の授業で用いる生徒操作用のソフトウェアは，操作性の上からビジュアル化されたプログラムとなっている。

3　授業の設計

単元の選択は，コンピュータを利用した授業であること，正規の授業ではなく１単位時間の研究授業であることを考慮し，普通の伝統的な授業の形式では生徒の理解のための教具や模型の作成が困難で，それらのいろいろの操作が難しいとかの問題がある単元を選び，コンピュータの能力を活用して効果的な授業を実現するという立場で考えている。このような理由で，図形の単元，特に空間図形にかかわる単元を選んだ。

まず，背景となる指導要領から単元の根拠を探る。平成元年中学校学習指導要領：数学：第１学年の中でＢ図形（２）ア“空間における直線や平面の位置関係”に関係する。授業は学習プリント主体の教科書は殆ど使用しないという方式であるが，生徒の持っている教科書は東京書籍版である。

内容については，幾何学の公理の学習ということで

・直線が２点によって決定されること。
・平面が一直線とその上にない１点，または同一直線上にない３点によって決定されること。

などを理解させるをねらう。しかし，これだけでは内容的に焦点が明確にならないので，応用として空間のデザルグの定理：

・デザルグの定理――同一平面上にない２つの三角形ＡＢＣとＤＥＦがあって，ＡＤ，ＢＥ，ＣＦが１点Ｏで交わるならば，ＢＣとＥＦ，ＡＣとＤＥ，ＡＢとＤＥの交点Ｙ，Ｚ，Ｘはすべて同一直線上にある。

（証明）△ＡＢＣを含む平面をＰ，△ＤＥＦを含む平面をＱとする。直線ＢＣと直線ＥＦは同一平面ＯＥＦ上にある。また，直線ＢＣは平面Ｐ上に，直線ＥＦは平面Ｑ上にある。ゆえに，直線ＢＣと直線ＥＦはこれら３平面上にあるので３平面の共通な１点Ｙを通る。残りの２つの頂点についても同様である。ゆえに，３点Ｘ，Ｙ，Ｚは平面Ｐ，Ｑの交線上，従って１直線上にある。

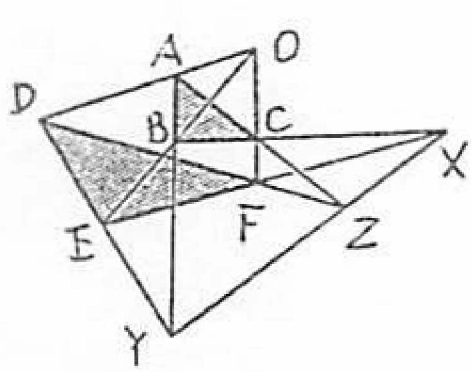


図１　デザルグの定理

を加えることにした。この定理はもちろん指導要領にはないので“ふくらまし教材”である。しかし，空間の場合は証明は，上に示したように比較的平易であるので取り上げた。

さらに，デザルグの定理は平面射影幾何学の定理でもあり，その上幾何学基礎論的には，少し特殊な場合のデザルグの定理であるが，“平面幾何学が立体幾何学の一部と見做し得るための必要十分条件がデザルグの定理が成り立つことである”，という意味をも有する（ヒルベルト，1930）ので数学的には重要な定理の一つである。すなわち，筆者の唱える“開いた教材”つまり，中学校なら中学校の範囲内だけで出てくる教材でなく，高等学校や大学でも扱う教材という意味である（佐伯，1992）。ただ，今回の授業での取り扱いは，証明を示すのではなく，デザルグの定理の成立の説明のためには，どの条件が利用できるかを指摘させる程度に止めることを目標とした。

次に，本時の学習指導案を示す。

数学科学習指導案

指導者　　布田　貢
共同研究者　深渡　綾子

1．日　　時　平成5年12月8日（水）3校時
2．指導学級　岩手大学教育学部附属中学校1年D組
3．主　　題　空間図形
4．目　　標　①直線，平面の位置関係がわかる。
　　　　　　　②空間における，直線や平面の位置関係がわかる。
5．展　　開

	指導事項	教師の活動	予想する生徒の活動	時間	留意点/教材
導入	直線の決定条件	直線の決定条件は何か考えさせる	・2点		・パソコンで演示したあと，実際に生徒にパソコンを操作させる
	平面の決定条件	平面の決定条件は何か考えさせる	・直線と点 ・3点 ・交わる2直線 ・平行な2直線		
	学習課題 空間における直線や平面の位置関係を考えよう			10分	・学習フリント配布
展	直線の関係	2直線にはどんな関係があるか考えさせる	・平行・交わる・ねじれ 		
	直線と平面の関係	直線と平面にはどんな位置関関係があるかを考えさせる	平行　上にある　交わる 		紙板書 パソコンにより提示する(一斉送信)
	平面と平面の関係	平面と平面にはどんな位置関係があるか考えさせる	平行　　交わる 	15分	学習プリントに図示させる
	デザルグの定理	先にまとめた空間の位置関係を使ってデザルグの定理を考えさせる	平行でない2直線が交わる ←→同一平面上にある		パソコンにより提示する(一斉送信)

開			2平面が交わるとき1直線で交わる 上の2つを使って証明する	20分	
終 結	まとめ	本時のまとめをする	直線，平面を決定する条件がわかる 空間における直線，平面の位置関係がわかる	5分	

次に学習プリントを示す。

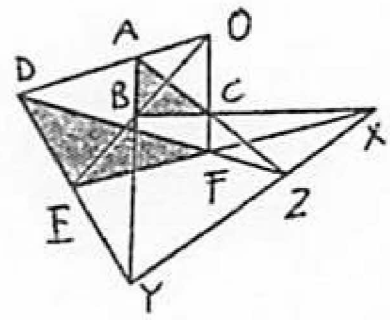
学習プリント

年　　組　名前

デザルグの定理

直線の決定条件は（　　　　　　　　　　　）

平面の決定条件は（　　　　　　　　　　　）



同一平面にない2つの三角形ＡＢＣ，ＤＥＦがある。ＡＤ，ＢＥ，ＣＦが1点Ｏで交わるならならＡＢとＤＥ，ＢＣとＥＦ，ＣＡとＦＤは1直線上で交わる。

学習課題

1．空間内の2直線にはどんな関係があるだろう

その理由を左の関係を使って説明してみよう

2．空間内の直線と平面にはどんな関係があるだろう

そのとき，その3点は

3．空間内の2平面にはどんな関係があるだろう

その理由を左の関係を使って説明してみよう

4　教材開発

パソコンソフトウェアについて記す。ソフトウェアはビジュアルなものである。

1)タイトル【1-340】タイトル画面。リターンキーでメニュー画面に移る。

2)メニュー【350-750】メニュー画面。矢印キー（↑↓）で選択（1～6の中から）。リターンキーで選択。なお，ＳＴＯＰキーを押すと，どこからでもこのメニュー画面に戻るようになっいる。

3)線の決定条件【760-1450】メニュー画面の1に対応。始めに1点が表示され，この点

はテンキーで動く（8－上，4－左，6－右，2－下）。スペースキーで固定し同時にこの点を通る直線が1本できる。次に“0”を押し続けると直線がたくさん出てくる。さらにスペースキーを押すともう1点が画面に表示されるので，ここで再び最初の点のときのようにテンキーで動かしスペースキーで固定する。同時に2点を通る直線が確定する。ここでＳＴＯＰキーを押すとメニュー画面に戻る。

4)平面の決定条件【1460-2650】メニュー画面の2に対応。この部分はすべてリターンキーだけでプログラムが次に進むようになっている。始めに1本の直線が画面上にあり，この直線を通る平面がたくさんあることを示す。次に，この直線上にない1点をとると，今の平面がこの1点を通るようにするとただ一つ平面が定まることを示す。始めの直線の上に2点が取れるので，今の1点と合わせて3点を通る平面はただ一つ定まることも示す。次いで交わる2直線，平行な2直線でもただ一つの平面が定まることを示し，合計4つの平面の決定条件にまとめる。ここは生徒のキー操作はない。

5)2つの直線の位置関係【2660-3950】メニュー画面の3に対応。空間での2直線関係は，交わる，平行，ねじれの位置，の3通りあること，ねじれの位置の2直線は平面を決定しないことを示す。ここも生徒のキー操作はない。

6)平面と直線の位置関係【3960-4560】メニュー画面4に対応。空間での平面と直線の位置関係は，直線と平面が平行，平面が直線を含む，直線が平面と交わる，の3通りあることを示す。ここも生徒のキー操作はない。

7)2平面の位置関係【4570-5070】メニュー画面5に対応。空間では2平面の位置関係は平行と交わる，の2通りであることを示す。ここも生徒のキー操作はない。

8)デザルグの定理【5080-7370】メニュー画面6に対応。段階を追って説明する画面の連続である。

9)データ【7380-7760】メニュー画面2～6で用いるデータを入れて，グラフィックのでるスピードを早くしている。本文プログラムにＲＥＳＴＯＲＥ命令を付けて，何度でも使用できるようにした。

10)サブルーチン【7770-8570】メニュー画面2～5で使用するサブルーチンを入れてある。3次元座標を2次元になおして画面表示するサブルーチン，平面，直線，点を描くサブルーチンも含まれる。

5　授業実践の概略

本時の授業は一口で言えば，コンピュータを利用したマルチメディア環境授業である（佐伯，1993a）。項目を追って記す。

（ハードウェア・生徒関係）パソコンはＰＣ－９８０１ＥＸ２０セット（生徒用子機，２人に1台）と教師用親機1セット，ランはＰＣゼミで接続されている。このシステムは実物投影機（テレビカメラ），ＶＴＲが接続され，生徒用子機の画面に映し出せるようになっている（本時ではＶＴＲは使用しない）。

授業を行った教室は，岩手大学教育学部附属中学校ＣＡＩ教室，生徒は同校1年Ｄ組男子２０名，女子１９名，合計３９名である。

（ソフトウェア関係）使用ソフトウェアはツールによらない自己開発である。使用言語はＢＡＳＩＣで他への提供は可能である。

（授業）形態はコンピュータ利用のマルチメディア環境授業であり，学習プリント中心にして，そこへコンピュータや紙板書等の提示や生徒に操作させる場面が入る，伝統的な方法になっている。
（授業の評価）ＶＴＲ収録，プロトコール作成，評価用具としてはＩＷＡＴを用い，Ｐ－Ｐグラフ分析等を行って評価した。これについては次章に詳しく述べる。

6　授業の評価とその結果

６．１　キーワードの抽出　本時のＩＷＡＴ（岩手式言語連想テスト）に利用するキーワードはアメリカ式（教科書より出現数を数えて多い方からとる）と論理的な方法とを併用して次の９語を採用した。すなわち，①直線，②平面，③平行，④空間，⑤点，⑥ねじれの位置，⑦交わる，⑧交わらない，⑨含む，の９語である。これらを元にして内容構造を作成した（これは応答表および認知構造図の中で示す）。

６．２　ＩＷＡＴの結果　ＩＷＡＴを用いて授業の前後で事前・事後テストを行った。その結果の応答数を表１で示す。ＩＷＡＴ用具は様式２である。表中の大数字は応答した

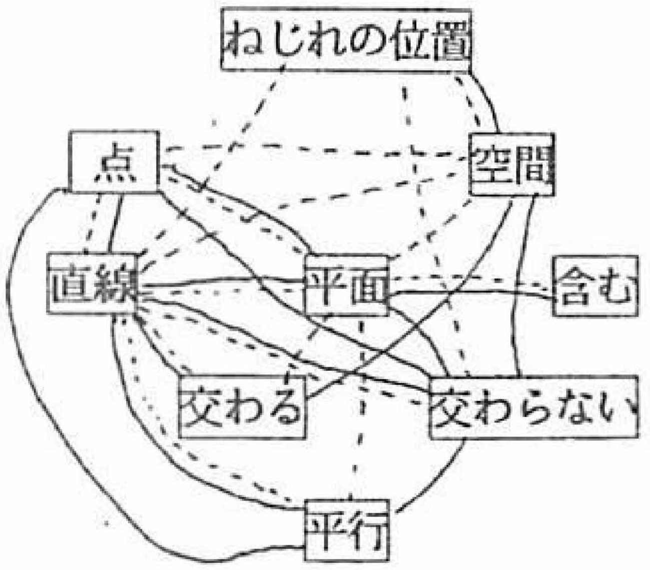
表１　ＩＷＡＴの事前・事後テストの生徒の応答数

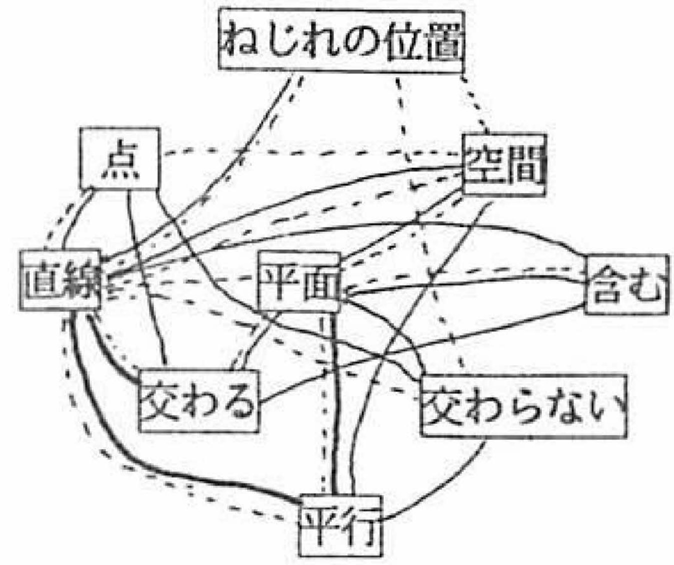
事前 ＼ 事後	①直線	②平面	③平行	④空間	⑤点	⑥ねじれの位置	⑦交わる	⑧交わらない	⑨含む	意味度
①直　線		$^{1}23_{1}$	$^{2}31_{2}$	$^{3}9$	$^{4}14_{3}$	$^{5}5$	$^{6}23_{4}$	$^{7}17_{5}$	13_{6}	7
②平　面	$^{1}27_{1}$		$^{8}11$	$^{9}10$	$^{10}13_{7}$	8	$^{11}12$	16_{8}	$^{12}13_{9}$	6
③平　行	$^{2}35_{2}$	$^{8}30_{8}$		7	16_{10}	3	4	21_{11}	7	2
④空　間	$^{3}16_{3}$	$^{9}20_{9}$	16_{13}		$^{13}12$	$^{14}16_{12}$	13_{13}	15_{14}	11	4
⑤点	$^{4}26_{4}$	$^{10}20_{10}$	12	$^{13}12$		7	8	18_{15}	8	3
⑥ねじれの位置	$^{5}24_{5}$	14	9	$^{14}15$	8		12	$^{15}6$	9	3
⑦交わる	$^{6}31_{6}$	$^{11}29_{11}$	9	15	16_{15}	14		6	11	2
⑧交わらない	$^{7}15$	12	21_{14}	15	17_{16}	$^{15}14$	9		8	2
⑨含　む	16_{7}	$^{12}16_{12}$	11	14	14	10	18_{17}	7		1

生徒の人数，右半分上は事前の，左半分下は事後の応答数である。太枠で囲んだ欄は内容構造の隣接箇所，左肩の番号は内容構造の隣接箇所番号である。右下の番号は，クラスレベルの認知構造の番号である。これらのデータを元にして認知構造図を作成する。図２が事前Ｔの認知構造図，図３が事後Ｔの認知構造図であり，図中太いパスは応答数３０以上細いパスは３０未満，また破線は内容構造のパスである。

６．３　距離法分析とＰ－Ｐグラフ　認知構造が決まれば，距離行列が定まり内容構造と認知構造の距離Ｄと，意味度の距離ｄが計算できる（計算法は佐伯，1981）。その結果

を表2で示す。表の中で＊＊は経験的に得られた近さの規準で「近い」を示している。認





----- 内容構造のパス　——　認知構造３０以上　——　認知構造３０未満

図２　事前Ｔ認知構造図　　　　図３　事後Ｔ認知構造図

表２　内容構造と認知構造の距離

D ＼ d	内容構造	事前認知構造	事後認知構造
内容構造	—	.533	.471
事前認知構造	.133**	—	.497
事後認知構造	.104**	.124**	—

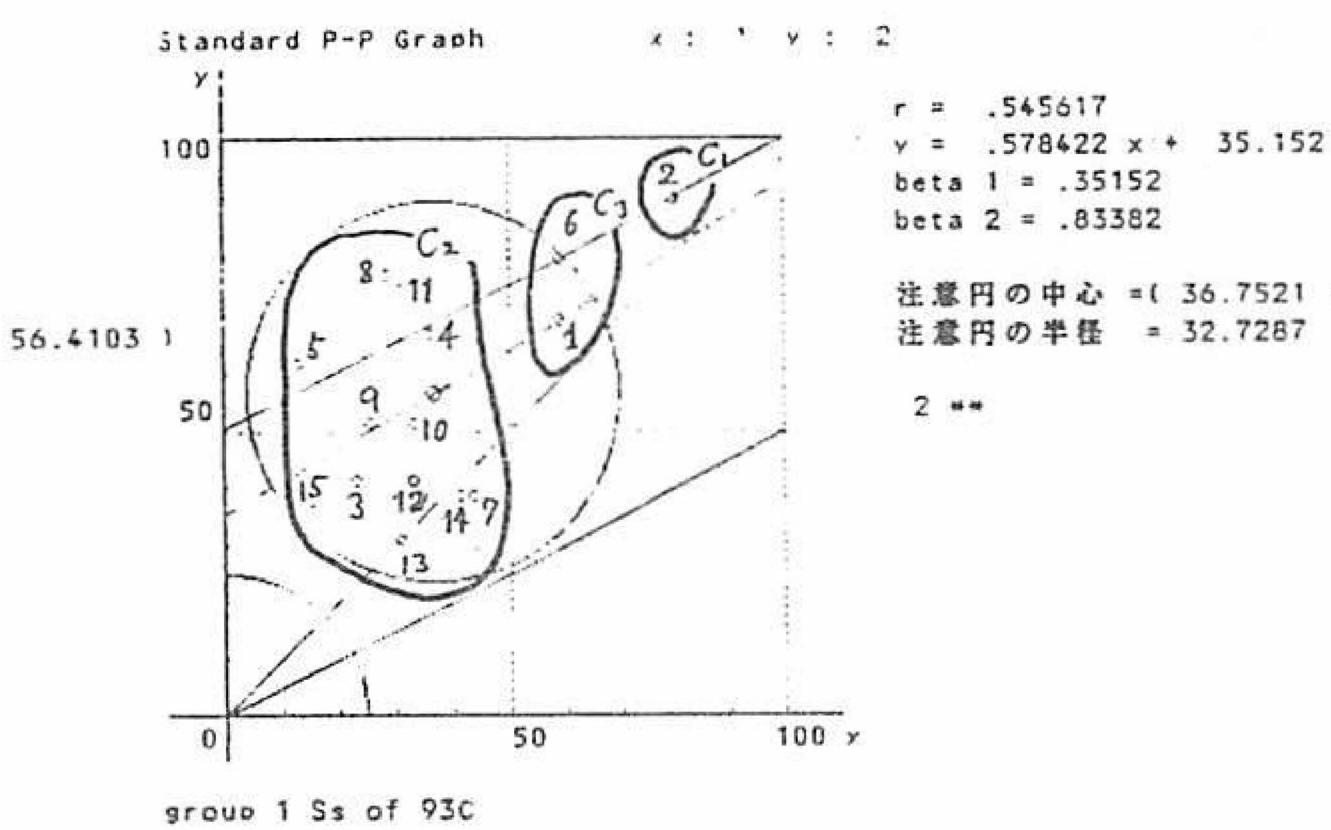


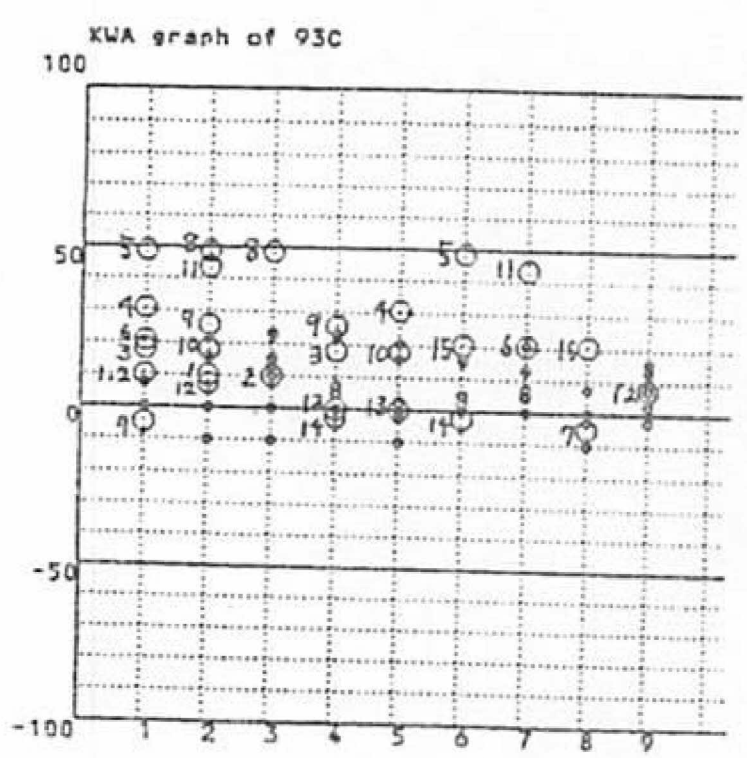
図４　本時のＰ－Ｐグラフ

知構造のDの方が「近い」という判定で，事前より事後がやや近くなっている，また，d の方も事後の方が事前より内容構造に近づいているのが分かる。

次に図4で本研究のP－Pグラフを示す。P－Pグラフについては何度も公表している（例えば，佐伯，1981）ので詳しくは触れないが要点だけに触れる。デカルト座標に点を表示するのだが，点は内容構造の隣接箇所に対応している。x座標は事前Tの応答数，y座標は事後Tの応答数としてプロットする。したがって点の数は内容構造の隣接箇所数と一致する。これらの点をユークリッド距離を用いてクラスター分析（通常は重心法）をし，ちょうどクラスターが3個になったところで止めて，それらの分布パターンで型を決める。本時のパターンはⅢ型であり授業はあまり成功的とはいえないが，極端に負に変容した点がないことは一応評価される。また，変容係数は β_1=.352，β_2=.834 であるので，一応こちらは授業が成功的であったことを示している。しかし，P－Pグラフの点の分布を見ると，事後が減少した点（y座標がy＝xより下になる）が2点あったことが分かる。

6．4　キーワード分析グラフと意味度の変容

応答表（表1）のデータで本時のキーワード分析グラフ（KWAグラフ）を図5に示す。KWAグラフはすべての隣接箇所の事前Tの応答数に対して事後のそれがどれくらい変容



<<<< y coordinates of 93C >>>>

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.00								
2*	10.26	0.00							
3*	10.26*	48.72	0.00						
4*	17.95*	25.64	23.08	0.00					
5*	20.77*	17.95	-10.26*	0.00	0.00				
6*	48.72	15.38	15.38*	-2.56	2.56	0.00			
7*	20.51*	43.59	12.82	5.13	20.51	5.13	0.00		
8*	-5.13	-10.26	0.00	0.00	-2.56*	20.51	7.69	0.00	
9	7.69*	7.69	10.26	7.69	15.38	2.56	12.82	-2.56	0.00

図5　キーワード分析グラフ

したかを標準化して示したグラフである。図中大きな○は内容構造の隣接箇所にあたる。結果は小変容（内容構造の隣接箇所の点のy座標の絶対値が0～100の間にある，混合（隣接箇所の○のy座標が正と負の部分に跨がっている），Ⅱ型（非隣接箇所の点（小さい丸）のy座標が正と負の部分に跨がっている）と判定される（佐伯，1993b）。

次に認知構造の各キーワードの意味度の変容を表3に示す。意味度は各キーワードに集まるパスの数であるので，生徒の関心が高いキーワードと言うことができる。キーワード

表3　事前・事後認知構造の意味度とその変容

キーワード	①直線	②平面	③平行	④空間	⑤点	⑥ねじれの位置	⑦交わる	⑧交わらない	⑨含む
事前認知構造	6	4	3	3	4	1	2	5	2
事後認知構造	7	6	4	3	4	1	4	2	3
変　容	+1	+2	+1	0	0	0	+2	−3	+1

「平面」と「交わる」で意味度が2増加し，「交わらない」が3減少したのが目立つ。特にキーワード「直線」が意味度か高く，「平面」がこれに次いでいる。また，「交わる」が増加したのに対し，「交わらない」が5から2に激減したことが注目される。

7．考察

まず，ＩＷＡＴのキーワードの採り方，内容構造の作り方を見るため，ＫＷＡグラフを用いる。ＫＷＡグラフによれば，内容構造の隣接箇所で，事後に減少した箇所が2箇所でた。それは「直線−交わらない」と「空間−ねじれの位置」である。また，「空間−点」は変化はなかった。これは隣接箇所としては不適切か，またはキーワードとしたことが不適切かのどちらかである。一方非隣接箇所で大きく変容した箇所はない。これは一応評価される。つまり，これらのキーワードに対して作った内容構造は上の減少した箇所とか変容しなかった箇所を除いて妥当であったとなろう。

次に，本時の授業の目標であった直線と平面の位置関係，さらに空間におけるそれらの位置関係が分かる，という観点からはどうであったろうか。本時の評価に利用したＩＷＡＴに関連させて見る。ところで，ＩＷＡＴは，特にＫＷＡグラフは，授業の際にどの辺を強調したかという授業時の教材の取り扱いに微妙に関係することが知られている。ところで，プロトコールを見ると，点，直線を考えるときそれらが空間で考えるとは説明されていない。特に，「ねじれの位置」は空間で考えなければならないが，ここでも空間で考えるということがあまり強調されていない。このことが，「空間」に関連した隣接箇所が事後に減少する原因となったと考えられる。さらにもう一つコンピュータ画面が3次元の図形として表現しているが，見方によっては2次元的に見えたことも影響しているように見える。これはキーワードの意味度にもよく現れている。生徒の認知構造を見ると，空間の意味度は事前事後ともに3で変化していないことが分かる。さらに，直線と平面の意味度が高くしかも増加したことは，生徒の関心がこれらのキーワードに向いていたことを示していて，事後に高くなったことは，授業により一層関心がそちらに向いたことを示していることになる。

また，授業の目標との観点からこの授業を見ると，直線と平面の位置関係が明確に把握されたか，という点については，ある程度達成されたように見える。しかし，デザルグの定理はコンピュータのみの説明であったこともあり，うまく理解されたようには見えない。その点成功的ではなかった。今後デザルグの定理を扱う時は，模型を準備するなど，もっ

と触覚的な教材を工夫する必要がある。

参 考 文 献

深渡綾子（1994），中学校数学におけるパソコン教材を利用した授業の実践と研究，岩手大学教育学部平成５年度卒論

Hess, C. A. (1994) Computer literacy: An evolving concept, School Sci. and Math., ９４，208-214

ヒルベルト，D.（1930）・中村幸四郎訳（1943）「幾何学基礎論」，弘文堂，東京

布田　貢（1994）中学校数学におけるパソコンソフト教材の開発と非ＣＡＩ的授業による授業実践，岩手大学教育学部平成５年度卒論

佐伯卓也（1981）言語連想テスト（Ｉ式）の処理 —— ＷＡテストＰ－Ｐグラフ分析，日本教科教育学会誌，６，195-199

佐伯卓也（1992）数学における“内容論”研究とコンピュータ —— 開いた教材と閉じた教材，日数教第２５回数学教育論文発表会論文集，413-418

佐伯卓也（1993a）コンピュータ利用マルチメディア環境授業（１）—— 中学数学：平面図形の移動，東北・北陸数学教育基礎的研究報告，２１，1-9

佐伯卓也（1993b）キーワード分析グラフの方法と解釈 —— 中学校数学の場合，東北数学教育学会年報，２４，23-30

A Research for Teaching with Computers in the Multimedia Environment (The 7th Report)
— A Junior High School Mathematics : Cognition of Space Figures —

Takuya SAEKI (Iwate University)

(Abstracted)

To induce teaching mathematics with computers in the school curriculum is talked about in the multimedia level now. Many schools which have had computer systems already, it is difficult to introduce a new multimedia system by financial reason. On the other hand, it is necessary to foster teachers with computer and multimedia talent in teacher education at the universities. We have tackled such trial with computer systems which are not a pure multimedia but multimedia environment, equipped in the attachedjunior high school of Iwate University. Materials were basic concepts of geometry such as lines, planes and their axiomatic propositions. As an applied one, we have tried to prove Desargues' Theorem in solid geometry with computers.