

中学校数学における教材開発の実証的研究 —フラクタル数学を中心として—

武内 徹

酒田市立第六中学校

守屋誠司

山形大学

1 問題の設定理由と研究目的

情報化社会といわれて久しい今日、ようやく学校現場にもコンピュータが整備され、更にマルチメディア化が次々と行われてきている。しかし、コンピュータを利用した実践授業については、残念ながら日常的に行われているとはいえない。

中学校数学においては、高校受験との関連もあり、机上での手計算を重視したこれまでの授業が中心を占めている。更に、課題学習や選択教科としての数学が、その主旨とは別に、受験対策として指導されている場合も少なくない。その結果として、日常生活とは全く関連性のないものであり、数学を受験のためだけに勉強するものであると生徒が考えるようになったとしても不思議ではない。

また一方では、生徒の「数学離れ」が増加していると言われている。数多くの情報がすぐに手に入る現在の生活では、情報処理能力が要求されているにも関わらず、生徒が自分の頭の中でじっくり考える機会が、「数学離れ」によって少なくなっている。これでは、生徒は自ら情報を処理することがますますできなくなってしまう。

そこで、数学は社会事象を調べることに役立っていること、コンピュータ利用はそれを分析する手段として有効であることなどを、生徒に実感させることは数学教育の重要な役目である。このことによって、生徒自身が、数学を学習していく意義の一つを見いだすことができると考えている。そのためには、課題学習の主旨である「生徒の主体的な学習を促し数学的な見方や考え方の育成を図るため、各領域の内容を統合したり日常の事象に関連付けたりした適切な課題を設けて行う。[1]」ことを更に発展させ、情報科学を含んだ新しい教育内容の数学教育を模索していかなければならないと思う。

以上の観点からの試みとしては、従来の学校教育では扱われてこなかったファジィ、フラクタル、カオスなどの理論を教材として採り上げている例がある。これら理論は、情報化社会において重要であり、今後さらに研究が進められ実生活に応用されるものと思われる。これら理論を教材として採り上げた例として、守屋(1994)のフラクタルを学校数学に導入する試みがある。守屋では[2]、フラクタルの教育的意義、中学生に見合ったコンパクトなフラクタルの教育内容、実験授業からフラクタルの指導の可能性について考察を行っている。その結果、フラクタルは、生徒の興味を引く内容で、学校数学として導入可能であることが明らかになってきている。しかしながら、このプランを一言授業の中で実施するには、次のようないくつかの問題点がある。

- (1) 実験授業の対象生徒数が少なく、一般的なクラス(40名程度)に対する結果が得られていない。
- (2) 数式によって、図形が移動するイメージがつかみにくい。
- (3) また、そのためのコンピュータのプログラムが準備されていない。
- (4) プログラム操作に十分慣れていることを前提としているが、生徒の負担が大きすぎる。

本研究では以上の問題点を解決し、フラクタルの教材化の可能性を検討することを目的とする。そのために、フラクタルを課題学習として位置づけ、新たに指導案を作成し、実験授業を行った。このとき、新しい教材は、生徒にとって心理的負担が大きいものであるということが予想された。また、この教材は生徒が興味をもって学習できる内容であるのかどうかを調べる必要があった。そこで、生徒の情意的側面を調べるため、1時間ごとの授業について、MSD(淡1984)[3]を用いた自己評価を行わせ、それを分析することにした。

2 フラクタルの課題学習上の意義

中学校指導書登学編 [1]によると、課題学習が満たすべき要件として、「学ぶことの楽しさや成就感を体得する。ことが可能で、

- (1) 様々な思考や創意工夫を行うことができ、意欲的な追求を継続することができる課題
- (2) それぞれの方法で結果を見通すことのできる課題
- (3) 解決のために多様な数学的な考え方が発揮される課題
- (4) その課題の解決だけにとどまらず、更に一般化が可能な課題
- (5) その評価の観点を数学的な見方や考え方やそれを活用する能力及びよさを感じ得る態度に置くことができ、また、それにふさわしい課題

であることとされている。

さて、フラクタルの授業について、これらの要件を検討してみる。

- (1)(2)について 実験授業では、コンピュータを使ってフラクタル図形を作っていく。その過程で生徒は、自らプログラムを操作し、各自の数式によって図形を作り上げていくことができる。このとき、数式のとおり図形が移動するおもしろさや、図形が出来上がったときの喜びや達成感、各自が工夫して数式を考えた分だけ大きいものがあるはずである。
- (3)について 自己相似図形を扱っているため、図形の相似、回転移動、平行移動、対称移動、解析幾何的な考え方を使って、図形をつくることができる。
- (4)について 自然現象(例えば、三陸海岸などは、統計的フラクタルといわれている)について、解析していくこともできる。
- (5)について 授業を通して、自然や身の回りの物に対してフラクタル的に見ることを評価することができる。

そして、課題学習が満たすべき条件に加えて、フラクタル図形の学習には、既習の知識と、その知識を発展させる新しい内容も含んでいるため、生徒がこれまでの数学を、違った角度から見ることにも可能であると思われる。

3 教育実験

3.1 教育実験の目的

教育実験を通して、次のことを明らかにしたい。

- (1) 図形の相似変換を数式で表すことを理解し、数式をつくることができるか。
- (2) 与えられたフラクタル図形を分析して、コンピュータ上で再現できるか。
ここで、フラクタル図形とは、自己相似図形とする。

3.2 教育実験の方法

(1) 実施日 1995年9月20日～26日

(2) 被験者 公立R中学校3年生の1クラス(37名)を対象に行った。

(3) 手続き 著者が指導者となり、一斉授業の形態をとった。指導時間は5時間である。各授業の終了後にMSD調査用紙を生徒に配布し、記入させた。特に選択肢の両極端を選択したときには、その理由等もあわせて記入するように指示した。また、指導終了の約2週間後に、評価問題テストを行い、感想も記入させた。

また、守屋プランの問題点は次のように解決した。

- (1) 実験授業を課題学習として設定し、抽出生徒ではなく1クラス37名を対象とした。
- (2) 数式によって、図形が移動することを意識させるため、練習の時間を多く設定し、各自が考えた数式を練習に用いた。
- (3) 図形の移動を練習するプログラムを準備し、各自の数式を直接入力する方法を取った。
- (4) コンピュータの操作については、プログラムのコード、リストから行の修正、実行ができる程度とした。なお、事前に1時間、グラフを表示させるプログラムを使って、これらの操作を行う学習を終えている。

授業の展開については、後の指導案の通りである。

3.3 実験授業の結果と考察

結果

1時限目

最初に、カオスゲーム(三角形の内部にノミの移動した跡を印していく作業)を行った。ゲームの説明が不十分であったため、中央付近から3頂点に向かってそれぞれ点を取っていく生徒や、三角形の辺上に点を取っている生徒がいた。また、最初にノミがいる場所は、どこでもよいという指示は、かえって生徒を戸惑わせ、点を取るのに躊躇している生徒も見られた。全体として、点がどこに散らばっているかということよりも、ノミがえさにたどり着けるのかどうかということに関心が向いてしまった。その後、コンピュータを使って、シミュレーションを各班ごとに行った。次第に描かれていくシェルピンスキーのギャスケットには、一様に驚きが見られた。また、ジャンプの回数が1万回、2万回と増加していても、図形には大きな変化が見られないことが確認された。

次に、シェルピンスキーのギャスケットを見て、気がつくことを挙げさせていった。三角形がたくさんある、相似な三角形があるなどの発表の他に、三角形の個数が3、9、27…と増加していく、三角形の辺の長さが半分になっていくなどが発表された。縮小された図形が平行移動されていることや、フラクタルの定義(自己相似図形)を確認した後、他のフラクタル図形(コッホ曲線、スギの葉、シダの葉)に名前を付けさせ、どのような自己相似が見られるのか考えさせた。コッホ曲線については、パズル、雲の形、スギの葉やシダの葉については、植物の枝、シダの葉などの名前を付けていた。また、コッホ曲線の自己相似については、細かい見方をしている生徒が多く、大きく2つや、4つの自己相似図形から構成されていると考えられなかった。

2時限目

前時の復習として、コッホ曲線の自己相似的な見方を確認した。前時とは異なり、コッホ曲線全体を一つの三角形で囲み考えさせた結果、まず、4つの自己相似図形から構成されているという発表があった。さらに考えさせると、2つの自己相似図形によって構成されていることにも気づいていった。

次に、図形に座標を導入し、頂点の座標の変化から、縮小についての数式を考えさせた。座標を求めることや、座標の変化に関する関係を見つけることは容易であったが、相似の比と比の値を混同している生徒が見られた。また、数式をつくるため、縮小によって点 (x, y) が点 (p, q) に移動したと考えさせたが、点 (x, y) や点 (p, q) はどの点なのかという質問があった。平行移動については、縮小と同様の進め方で行った。座標を求めること、座標の変化から関係を考えること、数式を求めることは、縮小のときに比べて、短時間に理解できた。

最後に、コンピュータ室に移動し、プログラムに数式を入力することによって、縮小や移動が行われることを確認した。このとき、数式にかけ算の記号(*)を入力しなければならないことを忘れていた生徒が見られた。しかし、操作に慣れてくるにつれ、相似変換だけでなく、アフィン変換を行っている生徒もいた。

3時間目

前時の復習として、縮小と平行移動の数式を、実測によって考えさせた。その結果、測定値に対する不安が大きくなり、自分の測定値が1ミリでも周囲の生徒とずれていると、何度も測定を繰り返していた。また、相似比の求め方が徹底していなかったこともあり、実測の指導には、20分程度の時間がかかった。

次に、対称移動、縮小からの移動について、2時間目と同様の進め方で行った。縮小からの移動の式化にやや手間取ったものの、実測の指導にかかった時間に比べると、時間はあまりかからなかった。

本時のまとめとして、相似変換についての数式を考えさせる練習問題を解き、最後に、その数式が適当であるかを確認する手段としてコンピュータを利用していく予定であった。しかし実際には、残り時間の関係で、練習問題を省略する結果となり、コンピュータの操作は、2時間目と同様に試行錯誤的に行わせるものになってしまった。前時の様子とは異なり、数式の意味を理解し、意図的に数式を変化させていた。

4時間目

最初に、回転移動に関して、その方向によって2通りの表し方があることを指導した。

次に、これまでの学習をまとめて、シェルピンスキーのギャスケットについて、数式を考えさせた。このとき、3つの自己相似図形によって構成されていることは確認していたが、3組の数式が必要であることに対する指導が不十分であった。そのため、3組の数式がすべてそろえるまでには、予想以上の時間がかかってしまった。

また、3つの数式をプログラムに入力する方法が前時までと違い、データ文中を変更する方法に変わるので、まずその解説と演示を行った。入力したデータ文によって、シェルピンスキーのギャスケットが出来上がっていく様子に生徒は驚き、非常に興味を示した。

5時間目

三角形のフラクタル図形(4つの自己相似図形によって構成されている)や、1時間目に示したフラクタル図形について、数式を考え、その結果をコンピュータで確認する指示を与えた。このとき、コッホ曲線については教具を準備し、4つの自己相似図形によって構成されていること、その相似比、平行移動、回転移動が行われていることについて復習した。

コンピュータの操作については、入力方法が変わっているために戸惑っていた。特に、コンマ(,)をデリオード(.)と間違えている場合があった。結果として、ほとんどの生徒が、正方形のフラクタル図形を作成できた。さらに、コッホ曲線については、3つのグループで作成できた。彼らの方法は、まずおよその数式を考えた後、それを試行錯誤的に修正していくものであった。スギの葉、シダの葉は作成できなかったが、スギの葉が2つの自己相似図形によってできていることを発見できた。また、シェルピンスキーのギャスケットを復習として作成している生徒、独創的なフラクタル図形としてアフィン変換を使ったフラクタル図形などを作成している生徒も見られた。

考察

1時間目より

カオスゲームは、フラクタル図形の導入として位置づけていたので、ゲームの進め方は簡単に説明した。しかし、生徒にとって初めての内容の操作ゲームであることを考慮すれば、具体的に演示する場面が必要であった。また、ノミは、いつまでたってもえさにたどり着けないことを確認した後で、ノミの移動した場所を考えさせた方が生徒の混乱は減少すると思う。

また、シェルピンスキーのギャスケットから、相似や平行移動などの図形的な特徴を数多く挙げ、3つの自己相似な図形から構成されていることにも気づく。しかし、他のフラクタル図形(コッホ曲線、スギの葉、シダの葉)については、自己相似な図形と見ることは難しかった。ギャスケットからコッホ曲線などに移るときの図形として、ギャスケットを四角形にしたものなどが必要となるであろう。

1時間目の授業から、フラクタル図形から身近な事象へのイメージを膨らませることができ、フラクタル図形を分析させることは難しくないと思われる。しかし、そのためには、さらに段階を踏んで図形を使用していく必要がある。また、授業後の調査により、金網をフラクタル図形と考えていることから、縮小が無限に繰り返されているという認識には至っていないと判断できる。その理由としては、コンピュータ画面上で繰り返しが行われていると判断できる範囲に限られていたためであると考えられる。

2時間目より

コッホ曲線の構成方法について、全体を一つの三角形で囲むことによって生徒の思考が進んだことから、線のみによって構成されている図形を面としてとらえることが難しいものと思われる。

「相似比」については、用語についての混乱が見られたので、新出用語であっても「縮小率」を使用した方がよいといえる。

また、式化するときには、これまでの関数での学習と関連を強調した指導を行うことが必要である。

プログラムを修正して数式を直接入力する方法をとったことにより、数式によって図形が縮小したり、移動したりすることがよく分かったようである。

2時間目の授業から、図形を数式によって移動させることができるということは、生徒にとって驚きであり、強く興味を引く内容であることが示された。なぜなら、これまでの移動はコンパスと定規を利用したものであったのに対し、数式によって移動させることができたからである。また、生徒がプログラムを理解し、最初から組んでいくには時間を要するが、修正するだけであれば、事前に1時間程度の指導を行うことによって、授業の中で十分利用可能であるといえる。

3時間目より

測定値を用い、縮小を平行移動の数式と考えさせたが、予想以上に時間がかかってしまった。その理由としては、これまでの学習では実測値を用いたことは少なく、あらかじめ準備された数を使って計算することが中心であったためと思われる。

対称移動については、対称の軸がx軸、y軸だったので、既習内容が使えたようである。移動の合成についても、2時間目に学習した内容が生かされていたように思う。しかし、時間不足により練習問題ができず定着が不十分になってしまった。4、5時間目の学習内容は、数式を考えていくことが中心となるため、本時において練習を行っておくことは重要であった。

3時間目の授業から、測定値を利用することに生徒が慣れていないことが明らかになった。今回は本時の結果から、4、5時間目を測定のあまり必要としない内容に修正することになった。しかし、指導プラン全体から考えると、自然物のサンプルから、実測によって、必要な数式のデータを集め、コンピュータにフラクタル図形を描くことが目標である。したがって、本プラン内も含め、測定値を扱った学習を大切にしたい指導の必要性が示された。

コンピュータについては、前時と同じプログラムを使用したことから、混乱なく利用することができた。

4時間目より

中学生を対称とした回転移動の指導については、移動した座標を求めることは難しく、回転角についての指導を行うことしかできない。そこで、回転移動を伴わないフラクタル図形だけを扱う指導プランも考えられる。しかし、自然物には回転運動を伴っているものが多く、生徒の関心が高い図形を考えるならば、やはり、回転運動は必要となってくる。今後の学習で、回転移動に三角関数が利用されていることを知れば、回転移動についての理解が深まるものと思われる。

シェルピンスキーのギャスケットについての数式は、3組の数式が必要であったため、それまで移動を考えていた図形と比べると、難しかったようである。そこで、このとき、1つの数式についての縮小が次々に繰り返されていくプログラムを準備し利用していけば、フラクタル図形の特徴がより明確になっていったに違いない。つまり、金網がフラクタル図形であると生徒が考えることはなかったと思われる。

4時間目の授業から、ある図形に対して、1つの移動が1回行われている場合に比べて、数種類の移動が繰り返されている場合には、数式の場合分けを明確にして指導する必要があることが分かった。

5時間目より

4時間目の続きとして、4つの自己相似図形によって構成されている正方形のフラクタル図形についての数式を考えさせたが、グループによって理解度が違っていた。フラクタル図形の学習も5時間目となり、興味や関心の違いが影響している傾向が見られた。また、生徒によっては、これまでの学習内容を整理して理解されていないために、既習事項を生かし切れていない場面があった。既習事項をまとめた図を使って説明するなどのまとめが5時間目に入る前に必要であったと思われる。

コンピュータへの入力方法がデータ文に変わった点については、やはり、慣れるまでの時間を必要とした。できる限り、生徒の負担を軽くするためには、事前の指導においてデータ文の入力方法を採り上げておく必要がある。

各自のデータによって、フラクタル図形を作り上げていく面白さは、それぞれが感じとれた。この活動が、自然物を測定したものであれば、なおさら面白く、身の回りの事物に対する見方も変化してくると思われる。

確認テストの結果より

教育実験の目的「(1)図形の相似変換を数式で表すことを理解し、数式をつくることができるか。」について

1. $\triangle ABC$ に対し、原点を相似の中心として縮小させた $\triangle A'B'C'$ の相似比(縮小率)を求める

答の種類	人数(%)
正答($\frac{1}{3}$ または0.33)	16名(44%)
比の値を求めていない(3:1)	5名(14%)
比が逆(1:3)	6名(17%)
他の誤答	5名(14%)
無答	4名(11%)

2. そして点 (x, y) が点 (p, q) に移動したときの数式を求める

答の種類	人数(%)
正答($p = \frac{1}{3}x, q = \frac{1}{3}y$ または $p = 0.33x, q = 0.33y$)	21名(58%)
誤答	10名(28%)
無答	5名(14%)

この結果、数式を求めることの方が、相似比を求めることよりも正答率が高くなっている。これを「相似比」という用語を使用したための混乱と判断すると、「縮小率」という用語を正確に用いれば、75%の正答率が得られたと考えられる。また、数式を求めることは、2つの式が完全にできて正答とした。一方のみの正答であれば、コンピュータの操作によって試行錯誤的に短時間で修正が可能であるので、実際の授業では、正答率はさらに高かったものと思われる。

教育実験の目的「(2)与えられたフラクタル図形を分析して、コンピュータ上で再現できるか。」について

1. シェルピンスキーのギャスケット(S.G.)とコッホ曲線(Koch)について、自己相似な部分(同じ縮小率のもの)を見つけ、その個数を求める。

S.G.	人数(%)	Koch	人数(%)
3個	21名(58%)	4個	21名(58%)
9個	8名(22%)	2個	9名(25%)
27個	1名(3%)		
誤答	4名(11%)	誤答	4名(11%)
無答	2名(6%)	無答	2名(6%)

2. シェルピンスキーのギャスケットをコンピュータ上で再現するため、プログラムのデータを入力する。

答の種類	人数(%)
正答	8名(22%)
誤答(データ中の1ヶ所のみ)	5名(14%)
誤答(上記以外)	8名(22%)
無答	15名(42%)

この結果、80%を超える生徒がフラクタル図形を自己相似図形として見る事ができている。また、ギヤスケッチとコッホ曲線による違いもない。1時間目のときには難しかったコッホ曲線の自己相似性についても、生徒が理解できていることは、授業の効果があつたものと判断できる。また、フラクタル図形を再現するためのデータを完全にそろえることは難しかった。しかし、実際の授業では、ほとんどのグループでフラクタル図形を描くことができていたことから、コンピュータを利用した学習形態は、利用しない場合と比較し、内容を理解させる効果があつたものと判断できる。

また、身の回りのものについてフラクタル図形と思ったことがあるかどうか質問をした。その結果、10名の生徒があると答え、その内容は、雲(入道雲)、フェンスの金網、人間の細胞、万華鏡、城、車のタイヤ、蜂の巣、美術の絵などであつた。これらのすべてが、フラクタル的な構造を持っているとはいえないが、身の回りのものに対する見方が変化していることは確かである。しかし、フェンスの金網、人間の細胞、万華鏡をフラクタル図形と誤ってしまっているという事実から、実験授業を通して、無限に縮小が繰り返されているという確証が弱かったことが反省される。

生徒の授業後の主な感想は、次の通りである。

- ・身近なものにフラクタル図形があるので、周りをもっと気にしてみたい。
- ・ある一つの図形(模様)が何をもとにしているか探すとき、図形と図形のつなぎ目を探するのが楽しかった。
- ・拡大したり縮小したりするのはとてもおもしろい。
- ・思った通りの図形にするまで何回もやり直しをしたりして大変だった。

MSDの自己評価より

集計は各授業ごとに、好意的側から(+3,-2,+1,0,-3,-2,-1)の7点尺度を採り各項目のクラス平均値を算出した。

1時間目では、評価項目の中で、「すっきりしない」、「ややこしい」、「むくむくしない」、「もやもやしている」、「不得意」、「おっくうな」というマイナスイメージが挙げられている。これは、新しい内容を初めて学習したという影響によるものと考えられる。

2、3時間目では、マイナスの評価であつた項目は減少している反面、プラスの評価であつたポイントも減少している。よい意味でも悪い意味でも生徒が授業に慣れた状態で授業が進められたと判断できる。

4時間目では、17項目中14項目についてマイナスイメージを挙げている。これまでの授業と比べ、フラクタル図形を構成するためのデータが増え使用したプログラムも変わったことによって、生徒の負担が大きくなったことがうかがえる。

5時間目では、4時間目とは逆に17項目中15項目についてプラスイメージを挙げている。それぞれのポイント数も高く、満足感の高い授業であつたといえる。その理由としては、各自のデータによってフラクタル図形がつくれ、一人一人にやりがいが見つけられたためであると考えられる。

授業全体より

これまで学習してきた数学との関連を考えてみる。実験授業では、数式をつくる場面が多くあり、数量関係についての知識が要求されている。その結果、成績評定が高い生徒のほとんどは、実験授業の内容を理解している。さらに注目すべきことは、美術や、技術を好む生徒が実験授業に対して高い興味を示したことである。それらの生徒は必ずしも数学の成績評定が高い生徒ばかりとはいえず、むしろ、これまでの数学の授業では、あまり目立たなかった生徒も多く含まれている。その理由として、実験授業にはグラフィックを操作していく場面が多くあつたこと、また各自の発想で図形を作り上げられることに興味を示したことからであると考えられる。

4 まとめ

1. 守屋プランの問題点について

- (a)「実験授業を課題学習として設定し、抽出生徒ではなく1クラス37名を対象とした。」ことについて

実際の授業では、ほとんどの生徒がコンピュータで意図的にデータを修正、訂正しながらフラクタル図形を描くことができた。さらに、確認テストの結果、コンピュータを利用する場面以外でも、75%程度の生徒は内容を完全に理解できたと判断できる。

- (b) 「数式によって、図形が移動することを意識させるため、練習の時間を多く設定し、各自が考えた数式を練習に用いた。」ことについて

図形の移動が数式によって行えることを生徒に意識させることができた。ただし、縮小が無限に繰り返されていることをさらに指導する必要がある

- (c) 「図形の移動を練習するプログラムを準備し、各自の数式を直接入力する方法を取った。」ことについて
プログラムにより、図形の移動を視覚的に理解させることができた。また、数式の入力させたことは、数式によって図形が移動していることを印象づけた。

- (d) 「コンピュータの操作については、プログラムのコード、リストから行の修正、実行ができる程度とした。」ことについて

1時間の事前指導により、授業の中で操作可能である。ただし、データの入力についての練習も必要である。

2. フラクタルの教材化の可能性について

今回の指導内容により、生徒はフラクタル図形を作り上げていくことの楽しさを感じることができた。また、数式によって図形を移動させることができるという新しい見方も、生徒ができるようになった。したがって、内容的には中学生にとっても、十分指導可能であると思われる。

3. 今後の課題

今回の指導内容では、フラクタル図形が無限に縮小された自己相似図形によって構成されていることに対する確認が不十分であった。そのためのプログラムの準備などの改善が必要である。

また、指導の体系に関する検討が不十分であるので、小学校からの指導とともに、今後の高等学校における指導内容の検討が必要となってくる。

参考文献

- [1] 文部省, 中学校指導書数学編, 大阪書籍, 1988, pp.121-125
- [2] 守屋誠司, 情報化社会に対応した教育内容の研究—フラクタルの教材化の試み—, 数学教育学会研究紀要, 1993/Vol.34/No.3.4
- [3] 湊三郎, 算数数学に対する態度を測定するために開発されたSDについて, 日本数学教育学会誌数学教育學研究, 1983/Vol.39.40

Proof studies of the teaching materials development in junior high school mathematics

—Mainly on fractal mathematics—

Dairoku Junior High School in Sakata

Toru TAKEUCHI

Yanagata University

Seiji MORIYA

abstracted

It is said that the number of the students who don't like mathematics increases, as well as science. Therefore we must think the method that students study mathematics of their own accord. In this sense, it is necessary to let students realize that mathematics is useful to examine the world phenomenon.

In our study we suggest a lesson plan of fractal mathematics as one of the contents of subject learning, and we report a class practice.

第3章 第4回 数学科学習指導案

(生徒数 男16名、女22名)
指導者 内 教

1. 単元 幾何学習 (題材「フラクタル」)

2. 目標

- 自然界のフラクタル図形を通して、フラクタルについて興味を持たせる。
- フラクタル図形が、相似変換によって生成されていることを論理的に考察させる。
- 図形を移動、または、縮小したときの相似変換を、図式で表現させる。
- 自然界のものから、フラクタル図形を知り、フラクタル図形の特性を理解させる。

3. 指導にあたって

(1) 教材について

フラクタルという概念は、19世紀前にファンデルワールによって初めて生み出されたものである。このフラクタル理論とカオス理論の出現によって、複雑な自然現象に於ける見方が大きく変わってきている。例えば、これまでは、自然現象は、直線であるがゆえに、モデルに、単純化を好み、それらなるべく簡単な図形や式で表そうとしてきた。しかし、フラクタルでは、直線であるということも、自然界では異常な状態であると考え、更に、フラクタル次元を導入することにより、定量的に分類し、解析できるようになった。

中学生に指導するにあたって、幾何学習の中で、図形の相似図形と反方、図形的な考え方を広げるために、自己相似図形としてのフラクタルを挙げていきたいと思う。そのため、相似変換も指導内容に含まれるが、既習事項との関連を強調することによって、十分理解可能であると思われる。また、コンピュータの利用についても、数学的な考察を深めるための道具として活用していきたいと思う。

(2) 生徒について

はじめに授業に臨み、発問もあり、授業中に理解しようという姿勢の生徒が多い印象。自分は数学が苦手であると感じている生徒も多い。

そこで、4月の最初の授業のとき、秋田大学の西三郎氏の「算数 数学に対する態度を育成するために開発された5D」を採択し、1、2年生のときに学習した数学についてのイメージを調査した。それによると、「むづかしい」の反対である「やりがいのある」というプラスイメージは、1項目目全体的に高いイメージが強い。

「すっきりしない」、「かたくな」、「うつくしくない」、「難しい」。

「無理」、「数式のきつさ」、「おこがましい」。

6月には、式の展開と因数分解についてのイメージを調査した。その結果、マイナスイメージのポイントがかなり減り、プラスイメージの項目も増えた。プラスイメージの目次項目としては、「むづかしい」項目で、これに代って、「すっきりする」

項目であった。

7月には、平方根についてのイメージを調査した。その結果、前回に比べ、どちらでもないという項目が多くなっている。

一方、定期テストとの関連では、中間テスト、期末テストとも、学習態度をやや向上している。

以上の分析から、生徒の数学に対する態度は、学習内容と共に変化しているものの、肯定的な考え方は減少しているものと思われる。本教材は、これまでの授業での数学とは、やや異なる内容ではあるが、生徒の関心を十分に引きつけ、生徒に数学の新しい一面を知らせることができると考えている。



(3) 研究主題にせざるために

今年度の研究主題にせざるために、数学科としては、「自分なりの発想を持ち、それを自分で解決していく」という学習の自主性・課題解決の工夫を通して「一」を主題に取組んでいる。本年度では、フラクタル図形を、自己相似図形の集合としてとらえることにより、生徒一人一人の多様な見方を育てていきたいと考えている。そして、シェルビンスキーのボックスを2つの移動で表すこと、他の多くのフラクタル図形が互に自然現象にもあるということから、自分で、コンピュータを使ってその図形を表現してみようという意欲を育てていきたいと考えている。

4. 指導計画(5時間授業)

時	日	時	指導内容	指導上の留意点
1			フラクタルの 意味や特徴を 知る。	シェルビンスキーのボックスから、自己相似を知る。 その特徴としての相似や移動について理解を深め自己相似図形としてのフラクタルを知る。
2			相似変換を することが できる。	図形を縮小し、図式で表す。 図形を平行移動させ、図式で表す。 合成では、原点を相似の中心として縮小してから移動を行わせる。
3			フラクタル図 形を描くこと ができる。	フラクタル図形のサンプルから、相似変換を見いだす必要変換式などのデータを集める。 そのデータを使って、コンピュータでフラクタル図形を描く。

5. 4時の指導

4時目

(1) 題材 フラクタルについて知ろう

- 目標 ① 図形全体が、自分自身の相似図形によって構成されていること(自己相似図形)から、フラクタルの意味を理解する。
② 自然界にフラクタル図形が多くあることを知り、その特徴を数学的に考察していくこととする。

(3) 指導過程

学 習 内 容	時 指導上の留意点
---------	-----------

到達目標	生徒の働きかけ	予想される反応	時	評価(%)
シェルビンスキーのボックスから、自己相似図形を知る。	① 図形を縮小し、図式で表す。 ② 図形を平行移動させ、図式で表す。 ③ 合成では、原点を相似の中心として縮小してから移動を行わせる。	「角の中心全体」 「やってみないとわからない」 「角の中心を移動させよう」 「全体には縮小していかない」 「コンピュータでやってみよう」 「この図を見て、気づくことは何ですか」 「相似図形は縮小した図形をどのように移動させることによって、自己相似図形が出来上がることを理解する」	15分	① ② ③ から、フラクタルへの関心を高める。
相似変換をすることが出来る。	① 図形を縮小し、図式で表す。 ② 図形を平行移動させ、図式で表す。 ③ 合成では、原点を相似の中心として縮小してから移動を行わせる。	「角の中心全体」 「やってみないとわからない」 「角の中心を移動させよう」 「全体には縮小していかない」 「コンピュータでやってみよう」 「この図を見て、気づくことは何ですか」 「相似図形は縮小した図形をどのように移動させることによって、自己相似図形が出来上がることを理解する」	20分	① ② ③ から、フラクタルへの関心を高める。
フラクタル図形を描くことができる。	① 図形を縮小し、図式で表す。 ② 図形を平行移動させ、図式で表す。 ③ 合成では、原点を相似の中心として縮小してから移動を行わせる。	「角の中心全体」 「やってみないとわからない」 「角の中心を移動させよう」 「全体には縮小していかない」 「コンピュータでやってみよう」 「この図を見て、気づくことは何ですか」 「相似図形は縮小した図形をどのように移動させることによって、自己相似図形が出来上がることを理解する」	15分	① ② ③ から、フラクタルへの関心を高める。

縮小や移動の仕方を書き表すことができれば、これらの図形もコンピュータで描くことができます。

51 _____



43

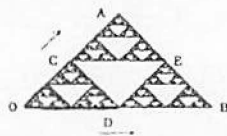


58



上の例1～例3について、相似な図形を探し、その位置や、相似比、特徴の仕方などについてまとめてみよう。

④ ΔO を相似の中心として、 $1/2$ に縮小したものを、点 A の方向に平行移動させる。



(1) 相似比1/4に縮小した図形は、いくつありますか。

(2) α_0 を周囲の中心としたとき、(1)の関数についての境界のきき方をまよよう。

もこの位置と、その位置に対化する平行移動した後の位置について比較してみることと、
それによってどのように変化しているでしょうか。また、内角の内側の点については、どう
なるでしょうか。

2時間目

(1) 題材 図形を相似変換してみよう①

(2) 目標 ① 図形の縮小を関係式に表すことができる。
② 図形の平行移動を関係式に表すことができる。

(3) 指導過程

到達目標	学習内容 教師の働きかけ	予想される反応	時間	指導上の留意点 評価 (◎)
・前の時間の復習をします。	・図形を縮小、平行移動させ、関係式で表してみよう。		5分	・自己相似を確認する。
・座標平面上にのせた図形を縮小することができる。	・この図形について、原点を相似の中心として1/2に縮小してみよう。	・マス目を数える	15分	・相似の中心は原点に際して考えさせる。 ・内部の点も縮小されて、変換後の内部の点になることを確認しておく。
・変換前後の座標について、関係式を導出することができる。	・もとの図形と縮小した図形の座標を比べて気づくことは何ですか。	・縮小すると半分になる。 ・もとは縮小したものの2倍。		・もとの座標を (x, y) 、縮小した後の座標を (p, q) として考える。 ◎縮小を関係式で表すことができたか。
・縮小を関係式で表すことができる。	・関係式を式で表すとうなりませうか。	$p = 0.5x, q = 0.5y$ $(p, q) = (0.5x, 0.5y)$	10分	◎平行移動を関係式で表すことができたか。
・平行移動についても、関係式を導出し、関係式で表すことができる。	・平行移動について、縮小のときと同様に、座標に関する関係式を	・作図する。 ・移動した分だけ座標、y座標を増やせばよい。		

る。

考えてみましょう。

 $p = 0.5x, q = 0.5y$
 $(p, q) = (0.5x, 0.5y)$

・問題の答えを

10分

◎問題ができて

・縮小と平行移動をコンピュータで表すことができる。

・コンピュータに関係式をいれて確かめてみましょう。

・関係式の値を入力する。

10分

◎コンピュータを使って確かめることができたか。

3時間目

(1) 題材 図形を相似変換してみよう②

(2) 目標 ① 図形の対称移動を関係式に表すことができる。
② 図形の縮小や移動の合成を関係式に表すことができる。

(3) 指導過程

到達目標	学習内容 教師の働きかけ	予想される反応	時間	指導上の留意点 評価 (◎)
・図形の対称移動について、関係式を導出し、関係式で表すことができる。	・図形の対称移動したときと、縮小したものを移動したときの関係式を考えてみよう。	・長さを調べる。	10分	・実際に場合の相似比の求め方を確認する。
・対称移動についても、関係式を導出し、関係式で表すことができる。	・対称移動について、座標に関する関係式を導出して、関係式で表すことができる。	・作図する。 ・マス目を数える。 ・x軸対称はy座標の符号だけを変えて、y軸対称はx座標の符号だけを変えればよい。 $p = x, q = -y$ $p = -x, q = y$ $(p, q) = (x, -y)$	10分	◎対称移動を関係式で表すことができたか ・縮小や平行移動のときと同様に、関係式で表すことができる。

・縮小や移動を合成して考えることができる。	・縮小したものを移動させてみましょう。	・関係式を考える ・これまでの式を合わせるとよい $p = 0.5x, q = 0.5y$ $p = 0.5x, q = 0.5y$	15分	◎関係式で表すことができたか
・練習問題を解きましょう。	・問題の答えを	・問題の答えを	15分	◎問題ができていますか。 ・問題ができたグループからコンピュータに譲渡させる。 ◎コンピュータを使って確かめることができたか。
・コンピュータを使って表すことができる。	・コンピュータに関係式をいれて確かめてみましょう。	・関係式を入力する。		

4時間目

(1) 題材 フラクタル図形を描こう①

(2) 目標 ① フラクタル図形のサンプルから、相似変換を見だし、必要な変換などのデータを集めることができる。
② 各自が集めたデータを使って、コンピュータにフラクタル図形を描くことができる。

(3) 指導過程

到達目標	学習内容 教師の働きかけ	予想される反応	時間	指導上の留意点 評価 (◎)
・回転移動の方法を知る。	・回転移動は回転の角度に注目しよう。	・角度を調べる。 ・右回りの回転、または、左回りの回転を行う。	15分	・回転移動については、関係式は考えない。 ◎回転方向の扱いについて、理解できたか。

5時間目

(1) 題材 フラクタル図形を描こう②

(2) 目標 ① フラクタル図形のサンプルから、相似変換を見だし、必要な変換などのデータを集めることができる。
② 各自が集めたデータを使って、コンピュータにフラクタル図形を描くことができる。

(3) 指導過程

到達目標	学習内容 教師の働きかけ	予想される反応	時間	指導上の留意点 評価 (◎)
・例題から相似変換を見つけたデータを集めることができる。	・今日の課題や1時間目に紹介した図形をコンピュータに描いてみよう。	・例題について、長さや角度を測定してみよう。 ・各組で相談する。 ・長さや角度を測定してみよう。 ・相似変換を見つける。	15分	・最初に自己相似な図形を見つけてみる。 ◎適切な相似変換を見つける。

・データを使ってコンピュータにフラクタル図形を描くことができる。	・各問で見つけた相似変換を式で表してみよう。	・変換式を考える	ことができたか。
・他の図形（コッホ曲線、スギの葉）についてもコンピュータに描くことができる。	・変換式をコンピュータに入力してみよう。	・データを入力する。	うまくいかなかったときには、相似変換の式に戻って考えさせる。
	・1時間目に示した図形についても考えてみよう。	・例題と同じように変換式を考える。	④他のフラクタル図形についても、変換式をみつけることができたか。
		15分	
		20分	

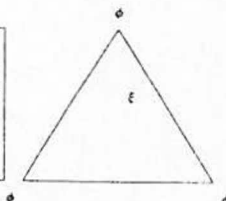
- 参考、引用文献 (1) 守屋誠司、情報化社会に対応した教育内容の研究—フラクタルの教材化の試み—、数学教育学会研究紀要、1993/Vol.34/No.3-4
 (2) 石村貞夫・石村園子、フラクタル数学、東京図書
 (3) 廣三郎、算数・数学に対する態度を測定するために開発されたSITについて、日本数学教育学会誌 数学教育研究、1993/Vol.39/40

図形と幾何学 (フラクタル)

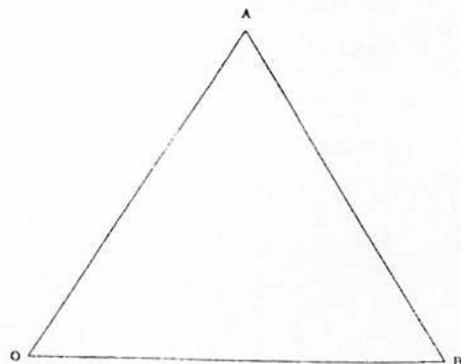
1. フラクタルとは、何だろう。

問

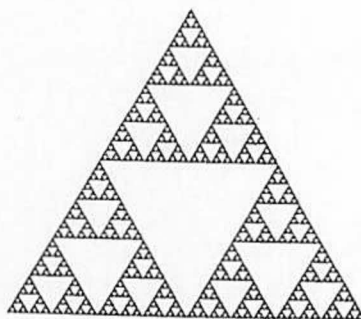
三角形の内部に小さなノミが1匹います。その三角形の3つの頂点には、ノミの大好物のえさがあり、ノミはそのえさを目標してジャンプしています。このとき、ノミが移動できる場所をすべて考えると、図はどうなりますか。ただし、ノミはいつでも3ヶ所のえさのどの地点を目標してもよいが、いつも目標までの距離の半分までしか飛べません。



次の△OABに対して、実際にノミの移動できる場所を点でとってみよう。



ノミの移動できる点を無限にとっていくと、次のような図形が出来上がります。



問

この図形を見て、気づくことをまとめてみよう。

— 点の移動について —

点(x, y)について、
x軸方向にc、y軸方向にdだけ平行移動させたとき、点(p, q)になった。
このとき、
 $p = x + c$
 $q = y + d$
と、関係が成り立つ。

コンピュータでは、260行目にxの関数式、270行目にyの関数式を入力すると
図1の移動ができます。

```

110 READ X,Y
120 IF X=999 AND Y=999 THEN GOTO 210
130 IF F=1 THEN PSET (X,-Y),5
140 LINE -(X,-Y),5
150 GOTO 150
160 FOR J=0 TO 50000:NEXT J
170 RESTORE
180 I=I+1
190 READ X,Y
200 '
210 P=X
220 Q=Y
230 '
240 '
250 IF X=999 AND Y=999 THEN GOTO 330
260 IF I=1 THEN PSET (P,-Q),3
270 LINE -(P,-Q),3
280 GOTO 230
290 END
300 '
310 DATA 0,0,4,4,8,0,0,0,999,999
320 '
330 COPY 3

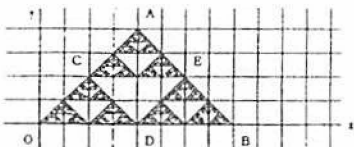
```

load auto no to list run

3 フラクタル図形を描こう

いよいよ、これまで学習したことを使って、フラクタル図形をコンピュータに描きま
しょう。

図



△OABを、自分自身を相似比0.5に縮小した3つの△ODC、△DEB、△CAEによってできてい
ると考えました。

(1) △OABを、△ODCにしたとき、点(x, y)が、点(p, q)になった。このときの関係式で
表してみよう。

(2) △OABを、△DEBにしたとき、点(x, y)が、点(p, q)になった。このときの関係式で
表してみよう。

(3) △OABを、△CAEにしたとき、点(x, y)が、点(p, q)になった。このときの関係式で
表してみよう。

(4) (1)～(3)までの関係式をコンピュータに入力してみましょう。

```

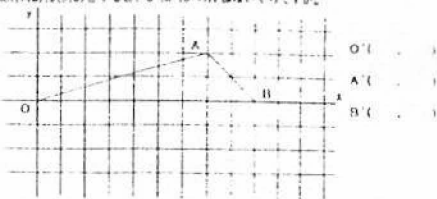
350 'souzizukei no kazu
360 DATA 2
370 '
380 'kankei isiki a,b,c,d
390 DATA 0.5,0.5,0.0,0.0
400 DATA 0.5,0.5,0.0,0.0
410 DATA
420 DATA
430 DATA

```

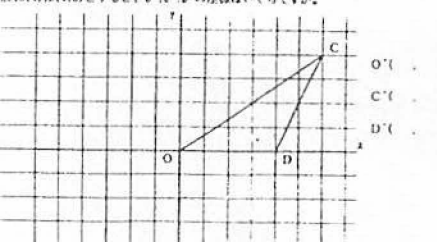
5.3 対称移動

図

(1) 次の△OABについて、x軸に対称移動させた△O'A'B'を書いてみましょう。また、点
A(7,2), B(9,0)とすると、O', A', B'の座標はいくらですか。



(2) 次の△OCDについて、y軸に対称移動させた△O'C'D'を書いてみましょう。また、点
C(6,4), D(4,0)とすると、O', C', D'の座標はいくらですか。



(3) △PQRについて、y軸に対称移動させた△P'Q'R'を書いてみると、P', Q', R'の座標はい
くらですか。ここで、点P(3,6), Q(6,15), R(12,12)とする。

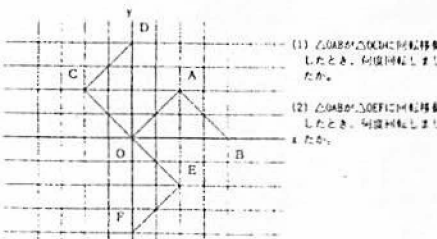
P'(), Q'(), R'()

もとの図点と、その図点に対応する対称移動した後の図点について比較してみたと
座標はどのように変化しているのでしょうか。また、三角形の内部の点については、ど
うなるのでしょうか。

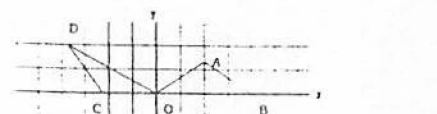
5.5 回転移動

回転移動については、三角関数の学習を覚えている必要がある。そこで、ここでは、
回転の角度だけ考えることにする。

図



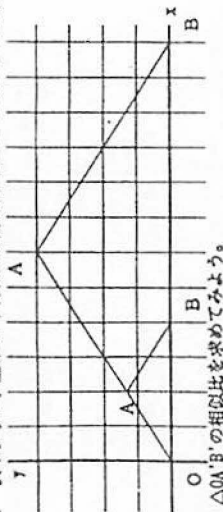
図



△OABが△OCDに何回転移動したとき、何度回転しましたか。分度器で測定しなさい。

縮小と移動をまとめて
点(x, y)について、
原点を相似の中心として、相似比 a で縮小し、
x軸方向にc、y軸方向にdだけ平行移動させたとき、点(p, q)になった。
このとき、
 $p = ax + c$ (y軸について対称移動もしていたら $p = -ax + c$)
 $q = ay + d$ (x軸について対称移動もしていたら $q = -ay + d$)
という関係が成り立つ。

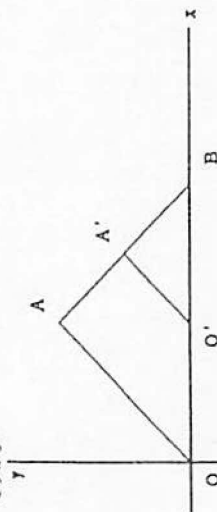
図1 次のように、 $\triangle OAB$ が、原点を相似の中心として $\triangle OA'B'$ に縮小したとき、



(1) $\triangle OA'B'$ の相似比を求めてみよう。

(2) この縮小によって、点 (x,y) が、点 (p,q) になった。関係を式で表してみよう。

図2 次の $\triangle OAB$ を $\triangle O'A'B'$ にしたい。このとき、プログラムをどのように変えたいといですか。



```

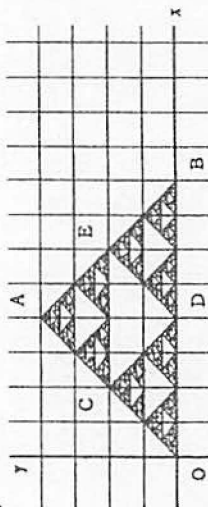
190 LINE -(X,-Y),5
200 GOTO 150
210 FOR J=0 TO 50000: NEXT J
220 RESTORE
230 I=1
240 READ X,Y
250
260 P=X
270 Q=Y
280
290 IF X=999 AND Y=999 THEN GOTO 330
300 IF I=1 THEN PSET (P,-Q),3
310 LINE -(P,-Q),3
320 GOTO 230
330 END
340
350 DATA 0,0,4,4,8,0,0,0,999,999

```

図3 次のフラクタル図形は、何個の図形（自分自身を縮小したもの）からできていると考えますか。



図4



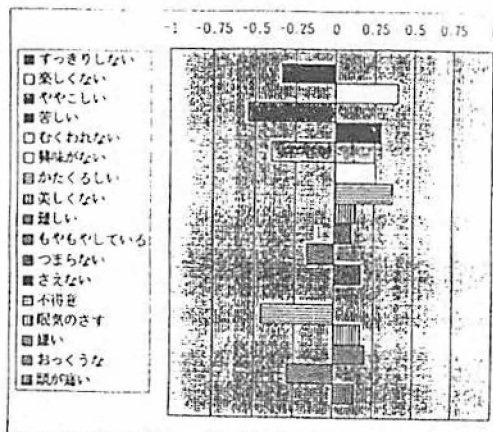
上のフラクタル図形を描きたい。このときプログラムをどのようにすればよいですか。ただし、データは、
相似比、回転角、平行移動（x軸方向）、平行移動（y軸方向）の順です。

```

350 'souzizukei no kazu
360 DATA 2
370
380 'kankeisiki a,a,r,c,d
390 DATA 0.5,0.5,0.0,0
400 DATA 0.5,0.5,0.0,0
410 DATA
420 DATA
430 DATA

```


1時間目 (H7.9.20)



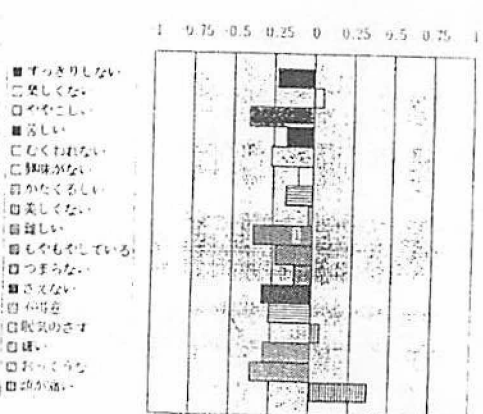
2時間目 (H7.9.21)



3時間目 (H7.9.22)



4時間目 (H7.9.23)



5時間目 (H7.9.24)

