

ビュッフォン-ラプラスの平面における2種の諸現象とそれらの確率

居駒 和雄 [富士大学]

キーワード: ビュッフォンの針, ビュッフォン-ラプラスの公式

1. はじめに 本誌1991年第22号で、硬貨投げの実験ととりあげたことがあった。これは有名な“ビュッフォン(Buffon, G.L. 1707-1788)の針投げ”実験の代りに、硬貨を用いて学生に実験させた報告であった。

ビュッフォンの針投げの実験は、1777年、彼がある試論の中で述べたもので、大きな紙面に一定間隔(これを $2d$ と表す)の平行線をたくさん引き、平らな床に置いたその紙面上に、針(その長さを $2l$ で表す、ただし $l < d$ とする)を無作為に何度も投げるとき、針が平行線の一つと交る現象の相対度数の動きをしらべることから始まって、その確率を $2l/\pi d$ と正確に求めた(ビュッフォンの公式といわれる)のである。

その後ラプラス(Laplace, P.S., 1749-1827)は、確率論に自しで得た多くの成果を、1812年の著書「確率の解析的理論」に収めた中で、ビュッフォンの針の実験を次のように拡張した。大きな紙面に互いに直交するそれぞれ一定間隔(それぞれ $2a, 2b$ とする)の平行線をたくさん引き、平らな床に置いたその紙面上に、長さ $2l$ (ただし $l < a, l < b$ とする)の針を無作為に投げるとき、針が平行線の一つと交る現象の確率として $l(2a+2b-l)/\pi ab$ を与えている(ビュッフォン-ラプラスの公式といわれる)。ここで $a = d$ とおき $b \rightarrow \infty$ (或は $b = d$ とおき $a \rightarrow \infty$) とすると、上記ビュッフォンの公式に還元する。(文献[1]参照)

2. 小論の目的 引用の都合上、間隔 $2a$ の平行線の系を $H(a)$ 系、これに直交する間隔 $2b$ の平行線の系を $V(b)$ 系と呼ぶこととする。さて小論の目的は、 $H(a)$ 系と $V(b)$ 系が描かれた平面（これを単に ビュッソン-ラプラスの平面と呼ぶ）において、次の(イ)～(ホ)を展開すること、他方これによってこの種の実験の際の裏付けを与えることである。すなわち、ビュッソン-ラプラスの平面において、硬貨または針を無作為に投げる実験には、ビュッソン-ラプラスの扱った現象も含めて他にも

(イ) 多くの現象（次節表1, 2参照）が付随して考えられ、それらは直接、間接に関連している。（§4の(図式1), (図式2)参照）

(ロ) したがって、それらの現象の確率も直接、間接に関連している。（§5表3, 4, 5, 6参照）

(ハ) 諸現象とその確率については、硬貨使用の場合と針使用の場合との間に、かなり類似的なことがなり立つ。（§4の(図式1), (図式2), §5の表3, 4, 5, 6参照）

(ニ) 諸現象の中には、ビュッソンの扱った現象の拡張に当る現象が、ラプラスの扱った現象の他にも三つほど含まれている。

（§4の(図式2), §5の末尾の(**)の関係参照）

(ホ) 諸現象の確率の中で、他を導出するという意味で本質的であるものは、硬貨、針いずれの場合も3個である。（例えば、§5表3の E_a, E_b, E_{ab} の確率；表5の F_a, F_b と表6の F_3 の確率）

3. 硬貨投げ、針投げ実験に付随する諸事象

現象は確率用語では 確率事象 或は単に 事象 と呼ばれる。以下現象の代りに事象という用語を使うこととする。 $H(a)$ 系と $V(b)$ 系とによって、紙面には多くの長方形からなる格子状の縞模様

ができる。長方形はその内部に周囲を含めた集合である。

表 1

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
事象とその記号	$H(a)$ 系 と交る	$V(b)$ 系 と交る	$H(a)$ 系, $V(b)$ 系 の両方と交る	$H(a)$ 系 とだけ交る	$V(b)$ 系 とだけ交る
硬貨投げの 場合の記号	E_a	E_b	E_{ab}	E'_a	E'_b
針投げの 場合の記号	F_a	F_b	F_{ab}	F'_a	F'_b

表 2

	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
事象とその記号	一つの長方形 からはみ出す	一つの長方形 上におさまる	隣合う度2個の 長方形にまたがる	隣合う度3個の 長方形にまたがる	隣合う度4個の 長方形にまたがる
硬貨投げの 場合の記号	E	E_1	E_2	E_3	E_4
針投げの 場合の記号	F	F_1	F_2	F_3	F_4

上表の F_a, F_b はピュフオンが扱った事象で, F はラプラスが扱った事象である。

4. 諸事象間の関係

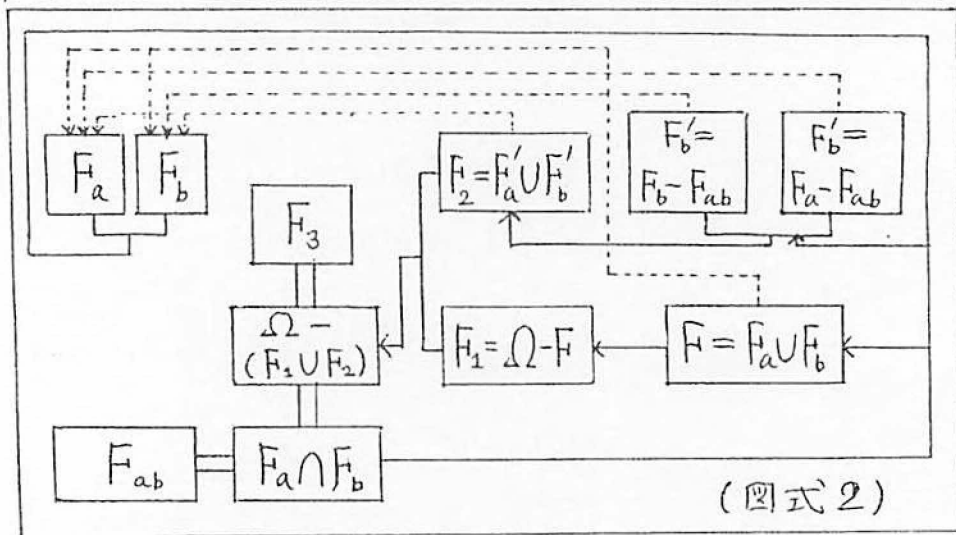
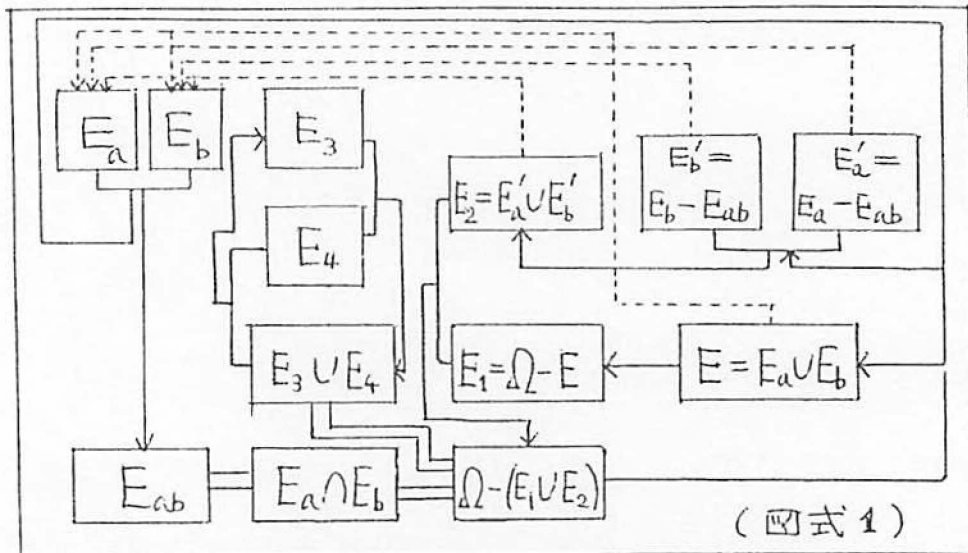
以下の図式 1, 2 で, Ω は全事象を表す。また

$G_1 \rightarrow G_2$ は事象 G_1 から事象 G_2 が導かれること,

$G_1, G_2 \rightarrow G_3$ 或は $G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3$ は事象 G_1 と
事象 G_2 から事象 G_3 が導かれること,

$G_1 \equiv G_2$ は事象 G_1 と事象 G_2 が等しいこと,

$G_{ab} \dashrightarrow G_a$ は $\lim_{b \rightarrow \infty} G_{ab} = G_a$ をそれぞれ表す。



5. 諸事象の確率

硬貨は無作為に投げるので、その中心の占める点は長方形上一様に分布していると考えられる。どの長方形上でも同じことであるから、硬貨の中心の占める点は、ある一つの長方形上に限定して差支えない。各事象の確率は、建ぺい率が敷地面積に対する建築面積の比として計算されるように、長方形の面積 $4ab$ に対する各事象における硬貨の中心の占める点の存在領域の面積の比として計算されて、次の確率表 3, 4 がえられる。

前節の(図式1)にしたがって、 E_a と E_b の確率を用いれば、 E_3 又は E_4 を除いた他の事象の確率はすべて求められる。

表3

硬貨投げ	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
事象	E_a	E_b	E_{ab}	E'_a	E'_b
確率	$\frac{r}{a}$	$\frac{r}{b}$	$\frac{r^2}{ab}$	$\frac{r(b-r)}{ab}$	$\frac{r(a-r)}{ab}$

表4

硬貨投げ	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
事象	E	E_1	E_2	E_3	E_4
確率	$\frac{r(a+b-r)}{ab}$	$\frac{(a-r)(b-r)}{ab}$	$\frac{r(a+b-2r)}{ab}$	$\frac{(4-\pi)r^2}{4ab}$	$\frac{\pi r^2}{4ab}$

なおここで、 $\lim_{b \rightarrow \infty} P(E) = P(E_a)$ と同様に

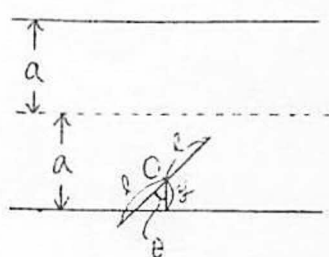
$$(*) \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} P(E'_a) = P(E_a), \quad \lim_{a \rightarrow \infty} P(E'_b) = P(E_b) \\ \lim_{b \rightarrow \infty} P(E_2) = P(E_a), \quad \lim_{a \rightarrow \infty} P(E_2) = P(E_b) \end{cases}$$

がなりたつことを注意する。(Pは確率を表す)

次に、針投げの場合の確率も、事象の間に(図式2)に示した関係によって、 F_a 、 F_b および F_{ab} の確率が分れば、この三つを用いて他の事象の確率が求められる。 F_b の確率は、 F_a の確率の計算と全く同様に入られるので、結局 F_a と F_{ab} の確率だけ求めるとよい。しかし F_a 、 F_{ab} における針の中心の点める点の存在範囲を求めるのは困難であるので、硬貨投げの場合のようには行かない。これは次のような考え方で求められる。

(1). $P(F_a)$ の値

針の中心Oは、二つの平行線の間の中心線によって二分される下半部に落ち着くと考えてよい。Oから平行線までの最短



距離(垂線の長さ)を y とする。(左図参照) この垂線が針となす角のうち、最小の正の角を θ とすると、針が平行線と交る条件は、 $y \leq l \cos \theta$ であるから、針が平行線のどれかと交る事象

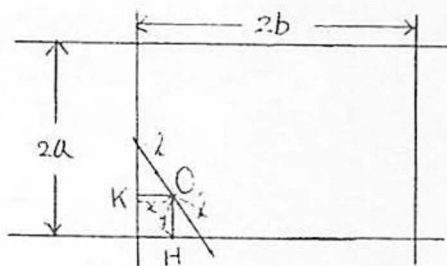
F_a は、 $F_a = \{(y, \theta) \mid y \leq l \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ と表される。

全事象 Ω は、 $\Omega = \{(y, \theta) \mid 0 \leq y \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ とみられるのぞ、 m_2 は面積を表すとして

$$P(F_a) = \frac{m_2(F_a)}{m_2(\Omega)} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} l \cos \theta \, d\theta}{\frac{\pi}{2} a} = \frac{2l}{\pi a}.$$

(3) $P(F_{ab})$ の値

針が直交する両方の平行線と交るとする。針の中心 O から、 $H(a)$



系の平行線への最短距離(短かい方の垂線 OH の長さ)を y , $V(b)$ 系の平行線への最短距離(短かい方の垂線 OK の長さ)を x と表し、垂線 OH が針となす角のうち、最小の正の角を θ とする(上図参照)と、針が直交する両方の平行線と交る条件は、 $x \leq l \sin \theta$ かつ $y \leq l \cos \theta$ である。

$F_{ab} = F_a \cap F_b$ であるから

$$F_{ab} = \{(x, y, \theta) \mid x \leq l \sin \theta, y \leq l \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

と表される。このとき全事象 Ω は

$$\Omega = \{(x, y, \theta) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

とみられるのぞ、 m_3 は体積を表すとして

$$P(F_{ab}) = P(F_a \cap F_b) = \frac{m_3(F_a \cap F_b)}{m_3(\Omega)} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} l^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta}{\frac{\pi}{2} ab} = \frac{l^2}{\pi ab}.$$

その他の事象の確率は、(図式2)を用いればすべて求められて次の確率表5, 6がえられる。

表5

針投げ	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
事象	F_a	F_b	F_{ab}	F'_a	F'_b
確率	$\frac{2l}{\pi a}$	$\frac{2l}{\pi b}$	$\frac{l^2}{\pi ab}$	$\frac{l(2b-l)}{\pi ab}$	$\frac{l(2a-l)}{\pi ab}$

表6

針投げ	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
事象	F	F_1	F_2	F_3	F_4
確率	$\frac{l(2a+2b-l)}{\pi ab}$	$\frac{\pi ab - 2(a+b)l + l^2}{\pi ab}$	$\frac{l(2a+2b-2l)}{\pi ab}$	$\frac{l^2}{\pi ab}$	0

ここで、 $P(F_{ab}) = P(F_a \cap F_b) = P(F_a) \cdot P(F_b | F_a) \neq P(F_a) \cdot P(F_b)$ であること、また

$$(*) \begin{cases} \lim_{b \rightarrow \infty} P(F'_a) = P(F_a), & \lim_{a \rightarrow \infty} P(F'_b) = P(F_b) \\ \lim_{b \rightarrow \infty} P(F_2) = P(F_a), & \lim_{a \rightarrow \infty} P(F_2) = P(F_b) \end{cases}$$

が成り立つことを注意する。

6. 確率間の大い関係.

簡単のため $a \leq b$ と仮定しておく。

硬貨投げの場合、つねに

$$\begin{cases} P(E_3) < P(E_4) < P(E_{ab}) < P(E_b) \leq P(E_a) < P(E), \\ P(E_2) < P(E), & P(E'_b) \leq \frac{P(E_b)}{P(E'_a)} \leq P(E_a) \end{cases}$$

が成り立つ。10個の確率の中で、最大なもの、最小なものは r の大きさによって異なり、 $0 < r \leq \alpha$ では $P(E_1)$ が、 $\alpha \leq$

$r \leq a$ ときは $P(E)$ が最大であることが分る。こゝで α は、
 $\alpha = \frac{1}{2}(a+b - \sqrt{a^2+b^2})$ である。また $0 < r \leq \beta$ ときは $P(E_3)$
 か $P(E'_b)$ が、 $\beta \leq r < a$ ときは $P(E_1)$ か $P(E'_b)$ がそれぞれ最大
 最小になることを知られる。こゝで β は、 $\beta = \frac{2}{\pi}(a+b - \sqrt{(a+b)^2 - \pi ab})$
 である。

次に、針投げの場合も類似の度係

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = P(F_4) < P(F_3) = P(F_{ab}) < P(F'_b) \leq \frac{P(F'_b)}{P(F'_a)} \leq P(F_2) < P(F), \\ P(F_2) < P(F) \end{array} \right.$$

がつかぬなりたつ。10個の確率の中で、最大なもの、最小なもの
 は、 l の大きさによって異なり、 $0 < l \leq \gamma$ ときは $P(F_2)$ が、
 $\gamma \leq l < a$ ときは $P(F)$ がそれぞれ最大である。また、 $0 < l \leq \delta$
 ときは $P(F_3)$ が、 $\delta \leq l < a$ ときは $P(F_1)$ がそれぞれ最小である。
 こゝで、 γ, δ は

$$\gamma = a+b - \sqrt{(a+b)^2 - \frac{\pi}{2}ab}, \quad \delta = \frac{\pi ab}{2(a+b)}, \quad \gamma < \delta$$

である。

文 献

[1] C.B. Boyer 著, 加賀美鉄石, 浦野由有訳,

数学の歴史, 第4巻 p.96, p.149, p.157 (朝倉書店)

Two kinds of events on the Buffon-Laplace plane
and their probabilities

Kazuo IKOMA, Fuji University

Abstract

The Buffon-Laplace plane means a adequately spacious plane on which two systems $H(a)$ and $V(b)$ of mutually perpendicular parallel lines are drawn with the intervals $2a$ and $2b$, respectively. The random throwing of coin and needle onto the Buffon-Laplace plane brings about some events similar to each other (coin vs.needle) as indicated in Tables 1 and 2. In either case, the probabilities of these events have a direct or indirect relation with each other, which can be seen by referring to Schemata 1 and 2 in Paragraph 3 and Tables 3,4,5 and 6 in Paragraph 4.

It should be noted, in particular, that there hold

$$(**) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{b \rightarrow \infty} P(F'_a) = \lim_{b \rightarrow \infty} P(F_2) = P(F_a) \\ \lim_{a \rightarrow \infty} P(F'_b) = \lim_{a \rightarrow \infty} P(F_2) = P(F_b) \end{array} \right. \quad \text{as well as}$$

Buffon-Laplace's formula $\lim_{b \rightarrow \infty} P(F) = P(F_a)$, and that among probabilities in either Tables 3 and 4 or Tables 5 and 6, essential elements from which the others are deduced consist of just three of these probabilities. That is to say, these three are, for example, $P(E_a)$, $P(E_b)$ and $P(E_{ab})$ in Tables 3 and 4; $P(F_a)$, $P(F_b)$ and $P(F_{ab})$ in Tables 5 and 6.