東北数学教育学会年報
1997. 3. 31 第28号

小学校における整数計算への提案

―― 私の教育課程(1) ――

山形大学　森川幾太郎

概要　小学校3年生以降で学習する整数計算と整数の性質に関するカリキュラム私案を提案する。前者では、十進数の乗法構造を基本に展開する。後者では、p進法の考えも含め初等整数論的性質を扱う

検索語　教育課程、整数、暗算、p進法、約数

1　はじめに

新しい教育課程作成のための議論が、1996年7月の中央教育審議会の第一次答申や教育課程審議会の発足をうけ、様々な機関で行われるようになった。この小論では、1997年1月数学教育実践研究会の事務局拡大研究会において発表した事柄をもとに、小学校、それも3年生以降における整数分野のカリキュラム私案を提案する。

はじめにこの提案に関わる私の認識を整理しておこう。

1) 計算機器の使用を前提としない社会においては、人間の手で行う計算に正確さと迅速さが要求された。このことから、初等教育では、口数も3口以上の計算や桁数の大きい整数の計算に習熟することがその教育目標になった。しかし、近年、電卓を始めとする計算機器の発展に伴い、計算指導のありようは根本的に変えなければならなくなった。

2) このことは、学校教育の場で計算に習熟するまで計算指導を行う必要がない、を意味しない。基礎計算は習熟するまで計算練習を積むことは依然として必要である。ただ、基礎計算についてその範囲は従来より狭くする必要があり、また 習熟をはかる意味合いを大きく変える必要がある。

3) 私は、加減計算では、2位数間の計算については暗算ができるまで徹底して指導すべき、と考える。これには、

a. 暗算を行うためには、数を多様に加法分解する必要がある。この加法分解を行うことで数を自在に扱う力をつけたい

b. これら暗算力や数の加法分解の知識を基に3位数以上の加減計算法を多数見出

させたい

c. 数計算のもつ意味自体を認識するため。もちろん、計算の量場面への適用を考えるとき、量的変化と計算の関係の考察が、計算の意味理解に欠かすことはできないが、ここでは、電卓など計算機器を運用するときの基礎として働く計算に関わる知識、という意味である。

d. 整数の性質自体を多面的に考察する際の一手段として計算が活用できるようにしたい

という思いがある。

4）整数の乗法分解はわり算の基礎となるので、２年生の乗法学習でも扱う。

5）算数として扱う整数の範囲は、３年生では１万まで、４年生で億の桁とする。

なお、計算ではその活用場面に限らず４則間の関係を考察するときにも量場面を必要とするが、この小論では量との関係については説明に必要な場面で触れる程度にした。

2　計算への提案

A 数の分解を利用しての加減計算

３年生における加減計算では、２位数間の暗算と３位数間の加減算を学習させたい。この学習に先立って、頭加減法も含めて筆算形式による２位数間の加減算と乗法的構造まで含めて数の十進位取り記数法の学習がそれぞれなされている、とする。

(1) ２位数間の加減算の暗算

この学習では、暗算に習熟することもその目標におくが、それ以上に、数を多面的に加法分解できる力の育成を目標とする。このため、加減算を実行する際、数の分解のメモ書きは認めることにする。

様々な加法分解に基づく暗算の方法をいくつか示す。

３８ +５６	30+50 8+6	38+6	38+50	6→2と4 38+2	8→4と4 56+4
	↓	↓	↓	↓	↓
	80+14	44+50	88+6	40+54	60+34

６１ -３７	60-37	60-30	61→11と50 11-7, 50-30	61→40と21 40-37
	↓	↓	↓	↓
	23+1	31-7	4+20	3+21

(2)十進位取り記数法の乗法的仕組を用いた加減算

例えば、４７３は十進位取りからは

４(百)７(十)３(一)と各位毎に一位数で表示

47(十)、473(一)と各位を表す記号をもとに多位数表示

と２通りの見方ができる。後者は現行指導要領では、数の相対的見方というが、私は、この見方は、大きな桁のかけ算やわり算を行うときの根拠に使えるので、位取りの乗法的性質ということにしている。（前者は、筆算形式の加減算の説明に都合がよいので、位取りの加法的性質と呼んでいる。）

位取りの乗法的性質を用いて、３位数を上２桁と下１桁に分解する。この分解と暗算を用いて次のような計算法が考えられる。なお、この計算法は頭加減法に関する知識も前提とする[1]。

例

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle(+)} \\ 4\,3\,8 \\ +\,3\,7\,6 \\ \hline 8\,0 \\ 1\,4 \\ \hline 8\,1\,4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle(+)} \\ 6\,1\,3 \\ -\,4\,7\,7 \\ \hline 1\,4 \\ \hline 1\,3\,6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle(+)} \\ 5\,0\,3 \\ -\,3\,6\,7 \\ \hline 1\,4 \\ \hline 1\,3\,6 \end{array}$$

この方法を用いると、尾減法で問題になった、空位の0の扱いで苦労することはない。

B　多位数間のかけ算

乗法では、３位数×２位数までを扱う。この指導は、現行通り３年生で行う。

まず、２位数をかけるために必要となる考えを整理してみよう。

① $a \times b = a \times (b-1) + a = a \times (b-2) + 2a$ を２年生でも３年生でも扱う。この性質を用いて、次のような課題に取り組ませる。

３×７や８×10の答えをいろいろな考えを使って求めよう[2]

②十進位取り記数法の乗法的性質をもとに、

「３×40 ＝ ３×４(十) ＝ 12(十) → 120」

のように、（１位数）×（何十）や逆の（何十）×（１位数）、さらに（１位数）×（何百）、（何百）×（１位数）の答えを導く。

③多位数×一位数の計算では、被乗数は、十進数の加法的仕組により分解し、そこに、②の性質を適用する。

例　２３６×４　→　２(百)×４、３(十)×４、６(一)×４

以上の準備から、多位数×多位数では、乗数を十進数の乗法的仕組を用いて分解し、多位数×１位数に還元して行う。

例　２３６×６４　→　２３６×６(十)
　　　　　　　　　　２３６×４(一)

$$\begin{array}{rl} 2\,3\,6 & \\ \times\ \ 6\,4 & \\ \hline 1\,4\,1\,6 & \leftarrow(十) \\ 9\,4\,4 & \leftarrow(一) \end{array}$$

このほか、横地清提案による、積の位を考えて、1位数×1位数に還元して行う計算法もある[3]。

注；小数の乗法に前者の考えを適用すると、小数×整数に還元できる。

```
例　3.45×2.36　→　　3.45×236(0.01)　　  3.45　→　　 3.45
                                      x 2.36　　　 x 236(0.01)
                  =8.142               8.142 ←　  814.2 (0.01)
```

C　多位数間のわり算

除法は、現行と同じように、3～4年生において扱う。筆算は、3位数÷2位数まで指導する。

①多位数÷1、2位数では、計算場面そのものは等分除がよい。ただし、筆算形式によるわり算は、包含除、即ち累減の考えを用いて行う。

②多位数÷1位数の計算では、被除数を十進数の乗法的性質をもとに分解する。

```
例　　318÷6　　　　　31(+)÷6　　　→　　　  5 6
                    18(-)÷6                6）3 1 8
                                              3 0
                                              　1 8
                                              　1 8
                                              　　0
```

③多位数÷多位数の計算は、十進数の乗法的仕組をもとに、商の立つ位置を考えさせながら計算に取り組ませたい。

即ち、「百の位の数÷十の位の数」では、商が十の位、もしくは一の位になる。

「十の位の数÷十の位の数」では、商が立つときは、一位数になる。

などに注意して、商を立てる。

注；2位数で割るわり算で仮商を立てるとき、除数を1の位で切り上げ、累減の考えを用いると右のような方式で、修正を行いながら、わり算を展開することができる。

```
               1
 4 0          1 2　→　2 2
 3 6）7 9 8
      3 6
        4 3
        3 6
          7 8
          7 2
            6
```

3　概数・概算

概数や概算は数教育の大事な要素になる。これらは4年生から正式に指導するが、2節のA項で示したような計算の工夫が概算指導の準備ともなるので、少なくとも加減に関わる概算は4年生から扱いたい。

①概数指導では、次の2つの事柄がその指導の前提となる。

1)子ども達が、34.6(千)や45(百)のように、様々な桁を単位に数表現ができる。

2)子ども達が、統計値には上の桁の数字ではゆれはないが、下の桁の数字にゆれる場合があることを知っている。

前者に関しては、十進数の乗法的性質の学習をもとに、各種統計数字や実測で得た数値をある桁を単位に棒グラフ表示する学習などが、また後者では、地域の過去何年間かの人口の経年変化を見たり、学校から自宅までの歩数調べを行うなどの活動が有効であろう。

こうした、グラフ作りやゆれのある数字の揺れない部分に注目することで概数の基本的な考えが導入され、これらをもとに、四捨五入など概数を作るための技能的内容が指導される。さらに、各種統計数字の数直線表示をもとに、丸められた数がある区間の数全体を代表することにも触れる。

②概算は、十進数の乗法的仕組による表記をもとに計算を行うことで展開される。すなわち、

1234＋5678 ――　(百)を単位にすると　⟶ 12(百)＋56(百)＝　68(百)
1234×5678 ――　(百)を単位にすると　⟶ 12(百)×56(百)＝ 672(万)

そして、これら桁表示を伴った概算の学習や小数の4則計算とから、

1)加減算では、被加数（被減数）と加数（減数）の桁と和、差は同じ桁になる

2)乗法では、積の桁は被乗数と乗数の桁とから新しく作られる

3)除法でも、商の桁は被除数と除数の桁とから新しく作られるが、とくに、被除数、除数の桁が同じときは1位数をもとにした表記になる

を導く。

（注）この考えを、$\frac{3}{5}=3_{(1/5)}$ と分数を単位分数をもとに整数表示する場面に拡張することで、次の考えで分数指導が可能になろう。

1)異分母分数の加減算は、例えば、

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=21_{(1/35)}+10_{(1/35)}$$

と共通単位1/35を探し、その単位に関して計算することである

2)分数の商は

$$\frac{3}{5}\div\frac{2}{7}=21_{(1/35)}\div10_{(1/35)}=21\div10=\frac{21}{10}$$

と共通単位にすることで、商の桁は1で表示され、共通分母で表示されたときの分子の割り算に還元される。

4　初等整数論的性質を導入する

A　p進法の考えを積極的に取り入れる

60年代後半のいわゆる現代化学習指導要領でも2進法や5進法が扱われた。この当時は、10進法表記の特性を明らかにすることをその主たる学習目標にこの学習が

展開された。今回、私がp進法の考えの導入を提案するひとつの目的は、従来は計算術としてのみ指導された内容を、その計算法自体を児童に見出させ、また他の数についての計算法と対比させることでその計算法の特徴を明らかにする、であり、もうひとつの目標は現代技術の背景を伝える、という視点からのものである。

(1) 帯分数表現は2進法や3進法の学習の一環として位置ずける

伝統的に、仮分数・帯分数の学習は分数を数として抽象すること、あまりのある整数のわり算の発展課題として扱われているが、私はこの学習をp進法に関わる学習と位置ずけて展開したい。このため、この学習は、現行のように4年生ではなく、5年生でもよい、と考えている。その展開の概略を述べる。

箱に等分割された小片、例えばカステラとかチーズ、が詰め合わされている場面を用い、箱に小片をつめる活動を重視する。なお、学習の当初では分母は5とか6に固定する。例えば、

カステラを焼いているお菓子屋さんで、$\frac{1}{5}$(箱)の大きさのカステラを次々に焼き上げ、できたものから順に箱に詰めている。この$\frac{1}{5}$(箱)のカステラが□個できたとき、これをいっぱいに詰めできた箱がいくつできたか。

この問題で、□に入れる数を様々に変え、それぞれの場合について箱詰めされた箱の個数を実際に箱詰めの活動をもとに求め、それぞれの場合について結果を分数表記させる。この活動の後で、整数計算を用いて行う仮分数と帯分数の変換をまとめの意味で扱う。そして、

$2\frac{2}{5} - 1\frac{4}{5}$、　$\frac{2}{5} + 1\frac{4}{5}$

などの繰り下がりや繰り上がりのある帯分数の加減計算を、帯分数表記の意味を確認しながら行う。また、分母5なり6の帯分数の加減算の終了時に、小数の加減算との対比を行い、帯分数表記やそれが入った加減算の特徴をまとめさせたい。

この後で、分母の大きさを様々に変え、それぞれの場合について仮分数・帯分数の入れ替えや帯分数の入った加減計算を行う。この学習は分母5の学習で学んだ基礎事項を修得・習熟するための学習と考え、子ども主体の学習とする。

(2) 暗号遊び

日本語ワードプロセッサーでは、その文字がJIS規格で

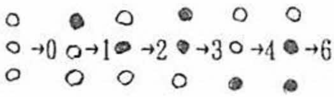
あ → 2422　い → 2424　…　お → 241A　…　き → 242D　…

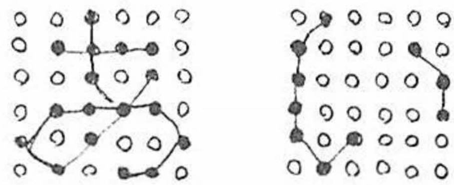
と、4桁の16進数表現を用いてコード化されている。このコードを、画面の16×16の素子、もしくは32×32の素子のそれぞれを電気的にon、off状態にするようさらに変換することで文字が画面に表れる。ところで、16進数表現では英文字を数として

扱うが、この考えは中学生であっても抵抗があろう。そこで、８進数表現を用いて文字を表すことを考える。バーコードなどでその仕組を探求する課題もあろうが、以下では、ワードプロセッサーの画面をイメージしての展開案を述べる。

縦に６個、横に６個、それも下図のように上に３、下に３の上下２分割された点の並びを考える。そして、（本来はいんちきであるが、点素が少ないのでやもうえず）通電した点と点とを線分で結び、「あ」や「い」などの文字を表す。つまり、画面を構成する素子に電流が通り発光している状態を12桁の８進数で表現する。

それぞれの数に次の状態が対応する





あ → 027260 253552　　い → 610024 342001

12桁表示はどのようにしてもよいが、上に例示したものは、上段の升目を横に移動して初めの６桁を表し、次に下の升目を横に移動することで下の６桁を表すことにした。12桁の表記では素子が少なく、12桁の８進数表現された数字を点素に表しても文字に見えないが、通電された素子を線分で結ぶことで文字の推定はできる。そこで、12桁の８進表現された数を使って文字あてゲームを楽しむというのはどうであろうか。

注；p進法に関係したゲーム遊びとしては、この他「誕生日あて」も考えられる。
　これについては、森川幾太郎他著「さんすうだいすき、５年生」、民衆社、1997年で述べたのでそちらをご覧いただきたい。

B　整数の剰余

平年では、１年経つと曜日が１日ずれる。このわけを考えたり、20歳になった年、扱う時期にもよるが多くの５年生にとっては10年後になろう、の誕生月のカレンダーをつくる、という課題で整数の剰余を扱うことができる。その他、２位数や３位数の２や３、４、５、９の倍数の判定法も適切な課題と考える。例えば、３の倍数になる判定法を電卓などを用いて推定した後、

○　３の倍数＋３の倍数　＝　３の倍数、

○　３でわって１あまる数＋３でわって２あまる数　＝　３の倍数

をもとに、その推定が正しいことの「証明」を行う。

C　約数・倍数

(1)約数と公約数・素数

通常よく見かける例題ではあるが、

各辺の長さが整数表示された直方体に、きっちりつめることのできる小箱の大きさを求める、

という課題から、約数、公約数や最大公約数を導入する。なお、約数の性質として

1) a が b の約数で、b を a で割ったときの商が c のとき、c も b の約数

2) a が b の約数で、その b が c の約数のとき、a は c の約数

があるが、これらも使って、約数や最大公約数を見い出せるようにしたい。

注；可能ならば、ユークリドの互除法も指導したい。

1～100の間の素数は、右のように、7ずつ一列に数を配列し、7の倍数、2の倍数、…、と次々に倍数をふるい落とすと早く見い出せる。このとき、2の倍数や3の倍数が斜め線で消える理由も考えさせる。

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	…			

(2)倍数・公倍数

倍数は、ものさしづくりから導入する。例えば、

算数学習新聞をきれいに張り出すための枠作りを行うものさし

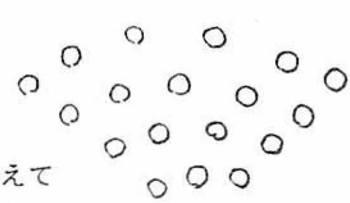
きれいな石を入れるために、箱の中にいれる仕切板をつくるためのものさし

が考えられる。最小公倍数の見つけ方では、「短除法」、「2数の積÷最大公約数」があることを導く。

(3)整数の和を使う問題

36脚の椅子をきれいに配列する。

どんな方法があるか



という問には、長方形状に配列することを考えて答える方法の他にも、扇型に配列する場合を考えた答えも考えられる。この場合、一列うしろに下がる毎に、椅子の数が1つ増える、として考えることにする。この場面設定では自然数の和の公式をもとに解を見出す方式もあるが、ここでは、子どもには論理がやさしい、平均の考えをもとにした方法による解を示す。

配列の列の数nが奇数のとき、中央の列の個数bは一列に配列する椅子の脚数の平均値になる。つまり、

bn＝全体の脚数

nが偶数のときは、中央の2列の和をcとすると

cn／2＝全体の脚数　(cの決め方からcは奇数)

となる。この問題の場合、全体の脚数が36で、奇数である36の約数は3と9。これを手がかりに解を探すと、解が2組み見つかる。

D　不定方程式を解く

整数の性質の利用の一つとして、不定方程式の解法がある。たとえば、

○*3円の切手と5円の切手を何枚かずつ使って作ることができる金額を探そう*

という問題がその例になる。

この問の解1；

	y＝0	＝1	＝2	＝3	＝4
x＝0	0	5	10	15	20
1	3	8	13	18	…
2	6	11	16	…	
3	9	14	…		
4	12	…			

表で、右から左方向に斜めに数を見ると、階差-2の等差数列ができる。これらの数列では、初項が奇数のときその数列の各項は奇数で、初項が偶数のときはその数列の各項は偶数になる。また、各数列の初項は5の倍数であるが、初項が20の数列では、20, 18, 16, 14, 12と項数が5個なので、これ以降の整数は必ず3と5の組み合わせで表現ができる。

従って、3と5の組み合わせで表現できない数は、上の表中に書かれていない数字に限定される。

解2；数直線を、0～5、5～10、…、と5毎に区切り、各区切り内で3と5の組み合わせで表示された数、表示できない数を表示する。この表示のされ方から、表示されていない数に関する規則を見い出す[4]。

○*ラグビーには、3点、5点、7点の3種類の得点法がある。*

あるチームが38点とった。どんな得点の取り方が考えられるか。

○*一本80円の鉛筆と100円の鉛筆を買って500円にする方法にはどのようなものがあるか。ただし、消費税はない。*

*これらの問は、場合の数の学習で扱うことも考えられる。

参考文献および注

1)森川幾太郎「数の乗法的構造を生かしての加減計算」、東北数学教育学会、年報 No. 21、1990、pp. 17-28、

2)「8×10」は、分配法則を基にするにするものだけでなく、十進数の仕組からも導くことができる。例えば、次の2つの考えがある。

1) 8×10=10×8　→　10の単位が8個分、から導く

2) 8×1 (+) = 8 (+) と十進数の乗法的性質をもとに導く

3) 町田彰一郎「整数への試み」、横地清編「数学教育学序説　上」、ぎょうせい、1980、PP. 39-80、

4)この解法は、伊藤説朗”数学教育における構成的方法に関する研究　上”、明治図書、1993、pp. 68-115、による

A Proposal to Teach Properties of Integers

MORIKAWA　Ikutaro(Yamagata University)

In this paper, I propose curriculum of integer including calculations and elementary number theory in primary school.

1) For addition and subtraction. We stress 2 things to these calculations.

a. We require children to find various additive decompositions of integers and then to do mental addition and subtraction of numbers within hundred.

b. By basing mental arithmetic, we require children to find some methods to add or subtract numbers more than hundred mutually.

2) For multiplication and division

We require pupils to find multiplicative properties of 10-adic numbers and then to do multplications or divisions by basing their founded things.

3) From elementary number theory

We set following problems to use some properies in elementary number theory.

a. Make the calender after ten years from the present year

b. Find the method to arrange many chairs as fan-shaped.

c. Code the some characters by using 8-adic numbers

d. Solve some indeterminate equations