Akita University

東北数学教育学会年報
1997. 3. 31　第28号

# 非数学科学生の数学教師教育について

佐伯　卓也（山形大学講師・岩手大学名誉教授）

**概要** 数学科出身の教師（研究者）の数学観は，一応は数学は純粋に思惟だけの学問であり，矛盾がない限り数学は存在する，というものである。これが実験等の実体がなければ意味がないという，自然科学との大きな違いになっている。このことが数学教育の学会や研究会で議論がかみ合わない原因になることがある。このようなことがないようにするためには教師教育の在り方はどうすべきか，を示し，その方策として，特に工学部等の非数学科出身の数学教師教育の指針の提案を試みる。

［キーワード］専門の数学観，数学教師教育，大学数学教育，数学科教育法

## 1　はじめに

１９９６年7月日本科学教育学会第２０回年会（広島市）で，筆者が，ささやかな類推教材の研究を発表した。当該分科会は「教師教育２」であり，教育工学関係者の出席が多く質問も特に工学部で講義する数学に集中した。その時，数学という学問の認識にずれがあることに討論の過程で気付いた。つまり，数学の専門家だけなら数学の認識にずれがあることはあまりないので，今まで気づかないでいたわけだが，この時は教育関係の学会と言っても教育工学者が多く，いろいろの学部出身の人が入っていたからである。

さて，このずれの問題だが，足立（1992）は，多少厳しい発言だが明確に「・・・本格的な数学の教育を受けた人とそうでない（いわゆるまったくの素人）との違いはこのあたりにある。・・・『矛盾しなければ存在するとしても，ちっともかまわない』という思想・・・これこそが思惟だけの学問である数学と，しがみつかねばならぬ対象（物理なら自然現象）を持った学問とを区切っている，大きな違いである（pp. 162~163）」と発言している。

確かに，中・高校の数学教育の現場では，数学の教師には数学の専門教育を受けた人だけでなく，工学部やその他の出身の人などいろんな人々がいるが，中・高校水準の数学教育では，数学そのものの内容性格から，普通あまり問題にはならない。しかし，大学水準の数学教育になると，どうしても「数学は思惟だけの学問である」という認識が明確になる教材が含まれてくる。従って，学会参加者の「数学」の捕らえ方の差異がある時は，数学そのものの理解の差が顕在化してくるのであろう。

本稿においては，この数学観，特に数学教師の持つ数学のイメージないしは数学観について取り上げて論じてみたい。

## 2　専門の数学観

本稿で大学の「数学科」と言うとき，理学部数学科と教育学部数学科およびこれと同等の数学を講義するコースをさすことにする。それ以外のコース，たとえ理工系学部内でも，

Akita University


数学科以外の理学部諸学科や工学部諸学科等は非数学科となる。次に専門の数学観に触れる。専門の数学観とは，一応，現在数学者と言われる人々，例えばわが国では，日本数学会会員のほぼ共有している数学観で，「数学は形式主義（公理主義）の立場で思考し，その内容は公理系と言う若干の命題群から証明により得られる定理と言う命題群の一大体系であり，それら命題はお互いに矛盾しない限り存在する，ヒトの思惟による生産物である」と見る数学観としておく。これはまた，内外の数学専門雑誌，日本なら例えば日本数学会のJournal of the Mathematical Society of JapanとかTohoku Mathematical Journalの掲載の査読にパスする論文を執筆する時の数学観とも言える。このような数学観を今後は，「専門の数学観」ということにする。非数学科の学生でも，数学科等で専門の数学を受講している間に，専門の数学観を持つに至っている学生も少なからずいることを指摘しておく。

## 3　先行研究と研究目的

中・高校の数学の教師という時，所有すべき資質・能力は，まず，数学の専門的知識，専門の数学観，そして何よりも大切なことは，数学が好きであること，数学に対する情熱を持つことであろう。

土谷他（1996）は大学生の実態を調べて，数学を好きになった理由として，「問題が解ける」をあげ，数学の魅力として取り上げている。その上（数学は）「理解できない→嫌い」を指摘している。

公田（1996）は学生生徒が，数学を難しく感じた段階で，特に大学生について，微積分では，理系は級数，偏微分，重積分をあげ，文系でも偏微分，指数関数・対数関数の微分，合成関数の微分をあげている。また，線形代数では，「ベクトル空間」としていることを報告し，いずれの場合も，抽象化を急ぎ過ぎているので分からなくなるとしている。

本研究の目的は，特に理工系の非数学科学生で教員を志望する学生に対して，数学を好きになるように学習させ，その上，専門の数学観を植え付ける方法について提案し，考察することである。

## 4　非数学科学生対象の数学教材

筆者の，１９６０年頃から１９９５年まで工学部学生対象に行っていた教養課程の線形代数・微積分と専門課程の工業数学，１９８０年頃から行っていた数学科教育法の講義および演習の経験，特に１９８５年からのＫＴ法（キー・ワード法，夏期年会の資料，佐伯（1996c）参照）利用の経験から，専門の数学観という観点で要点をとりあげて見よう。

**4.1 旧教養課程の数学**　まず，工学部の数学教育は初めに線形代数と微積分が行われる。線形代数では，行列や幾何ベクトルを扱った後に（前期セメスターの終わり頃），公理的な線形空間が出てくる。ここは数学の公理主義の最初の扱いなので（調べてみるとここから数学が分からなくなると言う学生が多くなる）筆者はいつも「ここからの数学は，今まで高校で学習したときの数学の考え方を変えて，数学は純粋に思惟の学問なので，導入した公理命題以外は使って証明してはいけない」と述べて，公理主義ないしは形式主義の考

Akita University

え方を吹き込むことにしていた。それは，ここが専門の数学観を指導する場所であると考えるからである。

一方，微積分では，線形代数より先になるが，極限とか連続の導入のとき，「これをやると数学嫌いが増えるのだが」と前置きし$\varepsilon$-$\delta$式論法を導入し，「この方法だと，あいまいな『限りなく大きくなる』とか『限りなく・・に近づく』などの言葉を用いないで済む」として，∀や∃の記号を用いて，例えば“$(\forall\varepsilon>0)\ \exists\delta>0: |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$”が「関数 $f(x)$ が $x=a$ で連続である」の定義と言って，現代数学のやり方を強調して指導していた。さらに，$\varepsilon-\delta$式論法がないと定義できない一様連続の概念，連続関数だがいたる所微分できないワイエルシュトラスの例，リーマンの積分の存在定理等にも触れていた。

**4.2 非数学科の数学科教育法**　岩手大学工学部・農学部では，かつて数学科教育法の受講生は教育学部の数学科教育法の授業時間に学生が来て，教育学部の授業に合流してなされていた。ところが，１９８５年になり，農・工学部の受講生が急増して，対応ができなくなり，工学部で独立に数学科教育法が開講された。これが幸いして，工学部学生対象の数学科教育法を考えるきっかけになった。

そこでの内容は，ＫＴ法に基づき，トピックを選んで２単位分は数学科らしい内容の講義と演習を行っていた。その中に幾何学があった。ここではヒルベルトの幾何学基礎論から，ヒルベルトのユークリッド幾何の公理系について，その無矛盾性と独立性等のヒルベルトの証明の仕方に触れている。特に，無矛盾性では，ヒルベルトは実数の無矛盾性におんぶした形で証明していることを強調した形になっている。

ここで改めて提案したいことがある。それはこの問題に関連して有名なゲーデルの不完全性定理に関するトピック（吉永, 1992; 足立, 1992; 田村, 1993）を，２０世紀の数学の思想的な内容として，ヒルベルト，ラッセル，ブラウエルのそれぞれの立場から触れ，その観点で，ぜひ講義に取り入れたいと言うことである。

筆者の幾何学の基礎の講義のヒルベルトの方法も，実際には，実数の無矛盾性は示されてはいない。つまり，ヒルベルトのユークリッド幾何の公理系の無矛盾性は実数論が分からないので不明になる，と言う限界が明らかになる。その上でゲーデルの不完全性定理（１と２）について示すことは意味があると考える。また，これに関連して学生にヒトの知能の限界があることを考えさせてはどうか。その時同時に，ヒトにこのような知能の限界があることが明らかになれば，現在の数学はいかに完全に見えても，それはいつかは乗り越えられる，と言うヒトの無限の可能性をも保証している事実に注目させるべきだろう。付け加えておくべきことは自然数論はその後，自然数論の範囲外での無矛盾性の証明は，最初にゲンツェンが１９３６年に成功していることにも触れたい。

**4.3 フェルマーの大定理**　フェルマーの大定理（または予想）はワイルズによる証明が１９９５年2月１３日に間違いがないことが確認され，フェルマー以来３６０年余をへて，最終的に「定理」になったという事実は，取り上げることも提案したい。よく知られていて，ここで述べる必要はないが，念のため記しておく。フェルマーの大定理とは

“$n$が2より大きい自然数であれば，$x^n+y^n=z^n$ という方程式は自然数解$x$，$y$，$z$を持たない”

Akita University


というものである。筆者はこの証明の過程で使われた楕円曲線なる３次の代数曲線が，楕円関数の　関数でパラメトライズされていることから，ワイエルシュトラスの　関数ではないが，同じくヤコビの実変数楕円関数 sn 関数の定義を類比推論法のベースにして類比教材つまり類比推論法のターゲットとして，sin，cos 等の三角関数，sinh，cosh 等の双曲線関数を“ある種の無理関数の不定積分の逆関数”として定義され，いろいろの公式が同様に導かれる教材を取り上げている（佐伯，1996bc）。特に sin を求めたとき，これを類比推論法のベースとしターゲットには再び，sn，cn，dn 等ヤコビの楕円関数の定義をし若干の性質について触れた。筆者は大学数学の教材としてフェルマーの大定理が証明される過程で重要な役目を演じた楕円関数を取り上げることの意義を強調したい。渡辺（1996）が楕円関数論から見た初等超越関数論をとりあげ福島県立女子高校で「サロン・ド・すうがく」を開いたこと，筆者の類比教材の考えとも関連するので興味深い。

**4.4 高校数学の中の例**　大学数学でないが，高校数学の中にも専門の数学観の出現場面の例を示しておく。これは，特に非数学科学生の数学科教育法で扱う内容例であり，特に演習に適している教材であることを強調しておく。

例えば数学Ｂの「虚数」と「複素平面」は，高校ではどんな扱い方をするか，を別にすれば，「数学は思惟だけの学問」という立場の教材例になる。実際，指導要領の解説書で，正田・茂木（1992）は，この事実に触れ「実数までの数の拡張については，・・・実在するモデルがあり，そのモデルに合わせて理論を構築すればよかった。しかるに，虚数は想像上の産物であり，実在するモデルはない。・・・ここでは，二次方程式が常に解をもつように数の範囲を拡張するという立場から，複素数を導入し，その代数的側面，次いでその幾何学的・機能的側面をも学習する。・・・（生徒は）そのとき，初めて，想像上の数，虚数を実在するものとして認知することができるだろう」（実際に認知は簡単ではないと思うが）と述べていることを指摘しておく。

## 5　未来数学教師（prospective mathematics teacher）のための数学の授業

数学が好きになるためには，数学の内容が理解できてかつ問題が解けることが先行研究から示唆される。そのためには，例えば線形空間や，偏微分等の概念の指導の時は，その分からなくなる原因をつきとめなければならない。原因の一つに，学生の数学的経験に対して抽象過ぎる内容を，しかも短時間のうちに教えることにあると考える。このためには，授業の進め方は，①細かいステップに分けること，②出来る限り懇切丁寧にすること，が考えられる。筆者はよくかつての「考へ方研究社」の著作精神，すなわち，説明は細かいステップでくどいくらい繰り返して説明することを提案している。これと同時に，一つのトピック，例えば位相空間の基礎では，位相空間が類比教材のターゲットなら，そのベースを，学生の経験した範囲の数学のモデルとしての内容，例えばユークリッド平面の $\varepsilon$－近傍とそれから誘導される開集合の例をベースにして考える等，また，線形空間なら，ベースとしてはやはり幾何ベクトルの座標表示したものを用いる等，言わば先行オーガナイザ的なものの活用を実施してきた。この対応である程度進んだら，残りは演習問題にして，学生に解かせる工夫をする，そのときは筆者のＯＭ法（筆者の別項，佐伯，1996e参照）を用いることでの対応を考えている。その時は数学は自分で作り上げることを薦めて，創

造の喜びを経験させることに努める。

以上，ここで示したことは，抽象的な数学トピックの指導のためには，学生の経験した範囲の数学によるモデル（よく言われる現実の例ではなく，数学の範囲での例）を（類比教材としての）ベースとして学生に考えさせる。もう一つは抽象的な数学は，できる限り小ステップに分けて，いちいち各段階を確かめて，時間をかけて懇切丁寧に，指導することに要約されるだろう。

## 6　結び――考察にかえて

前節では一般の数学の，特に抽象度の高い内容の数学の教授法の試論的なことについて触れた。さらに非数学科学生対象にして専門の数学観を認識させるための数学科教育法の内容についても記した。たまたまヴィザール他のプロジェクト・ワーク（ＰＷ法）に接したこともあり，これから大学数学教育研究に取り組むことが緊急かつ必須な課題になっていることを痛切に感じたからである。

ところで，現実に，中・高校の数学教師の出身大学は，解放性免許制度のわが国では非数学科出身の教師が多数いる。かれらの中には専門の数学観を持つ機会のなかった教師も含まれると考えられる。このため非数学科の未来数学教師にも，専門の数学観が育つような授業の内容および数学科教育法の扱い方を示してきた。もちろん，専門の数学観の育成を考えるならば，ここで触れた内容は僅かな例に過ぎない。大学の数学関係教官に，是非，専門の数学観の指導についての関心を高め，意識してのよりよい実践・研究がなされることを期待している。

最後に，数学科教育法以外の一般の大学数学の演習の形態は，１９８５年４月以来の山形大学における経験から学ぶことが多かったことに触れ，機会を与えて戴いた山形大学の教官と学生に感謝したい。

## 参　考　文　献

足立恒雄（1992）『無限の果てに何があるか――現代数学への招待』，光文社，東京

足立恒雄（1995）『フェルマーの大定理が解けた！――オイラーからワイルズの証明まで』講談社，東京

ヒルベルト，D.（1930）（中村幸四郎訳，1943）『幾何学基礎論』，弘文堂，東京

Kerr, D. R. and Lester, F. K. (1982) A new look at the professional training of secondary school mathematics teachers, Educ. Studies in Math., 13, 431-441

公田　藏（1996）大学の数学教育を考える，数学教育学会　大学の数学教育研究会特別紀要（1994年~1995年），13-16

松田念樹（1996）解放性免許制度による一般大学の中・高教員養成の現状と課題～理工系教科の教員養成について～，２１世紀をめざす教師教育，61-73

佐伯卓也（1996a）中・高等学校数学教師教育のための数学科教育法の内容について，東北数学教育学会初夏年会配布資料

佐伯卓也（1996b）数学教師教育と類推教材，日本科学教育学会第２０回年会論文集，345-346

Akita University


佐伯卓也（1996c）類比教材について（２）―― 無理関数の積分による三角関数の定義，数学教育学会研究紀要　数学教育学会秋期例会発表論文集，164-167
佐伯卓也（1996d）類比推論法と類比教材について　―― 大学数学の教材研究：積分による双曲線関数の定義，第２９回数学教育論文発表会論文集，133-138
佐伯卓也（1996e）大学数学教育の研究：数学演習におけるＯＭ法，東北数学教育学会第２８回年会発表資料
正田　実・茂木　勇（1991）『改訂高等学校学習指導要領の展開』，明治図書，東京
田村三郎（1996）『なぜ数学を学ぶのか　―― 数学教育論』，大阪教育図書，大阪
土谷守正・横村国治・渡辺　信（1996）数学に対する大学生の意識について，数学教育学会研究紀要　数学教育学会春期年会発表論文集，179-182
Vithal, R., Christianxen, I and Skovsmose, O. (1995) Project work in university mathematics education, a Danish experience: Aalborg university, Educ. Studies in Math., 29, 199-223
吉永良正（1992）『ゲーデル・不完全性定理―― "理性の限界" の発見』，講談社，東京
渡辺公夫（1996）楕円関数論から見た初等超越関数論，日本数学会数学通信，1(No. 3), 5-22

## On Mathematics Teacher Education of Students in Non-Mathematics Cource

Takuya SAEKI
Lecturer, Yamagata University : Professor Emeritus, Iwate University

(Abstracted)

Teachers being graduates from a mathematics institutes, they understand that mathematics is a purely thinking discipline and that mathematics exists as a disipline as long as it does not contain a contradiction. This is a great difference from other natural sciences.

In the present paper, we shall show a method of mathematics teacher education of students in non-mathematics cources.