

グラフ電卓の利用を前提とした関数カリキュラム

東京都中野区立第二中学校
大澤 弘典

要 約

中学校の関数指導において、グラフ電卓等のテクノロジーの利用を前提とすることで、従来の式を中心とした授業とは異なるグラフの解析的な扱いを中心としたカリキュラムの構成を試みた。公立中学校2年生3クラス（1クラス36名）を対象に17時間にわたる授業を実施しその有効性を明らかにした。具体的には次の知見を得た。①グラフ電卓等を利用した体験的な理解や知識が、それらのテクノロジーが手元にない状況でも有力な情報判断の根拠になりうる。②グラフ電卓等の利用を背景とした「速さ比べ」の授業展開は、変化の割合の意味や意義を生徒に必然的に感得させうる。③現実的な問題の解決に際し、生徒は数学的モデルの視覚的な表示道具としてグラフ電卓を利用しつつ、生徒自身の意思決定をもとに数学的モデルの構築を図っている。

検索語：関数カリキュラム、 グラフ電卓、 数学的モデル

1. カリキュラムの構想

学習の道具が変われば、授業が変わるという認識から、本稿では鉛筆と紙およびグラフ用紙に加え、新たな学習の道具としてグラフ電卓やCBL (Calculator Based Laboratory) システムを取り上げ、関数の授業で現実世界の事象を探究しつつ、関数の意味や意義を生徒に実感させることを目指す。

グラフ電卓等のテクノロジーの利用を前提とすれば、関数指導の目標がどのように変容するか、グラフ電卓等を利用することで、データから式表現を経なくともデータから直接にグラフ表現できる(例えば大澤, 1996b)。しかも、様々な関数グラフの表現が容易にできる。このことは従来の式を中心としたカリキュラム構成とは違ったグラフの解析を中心としたカリキュラム構成を可能にすることを意味する。本稿はこの点に注目し、グラフ電卓を駆使することで生徒が成し得る活動を積極的に授業に取り入れ、その後それらのグラフ電卓による活動を数学的に整理し位置づける。そのようなカリキュラムの構想により、生徒はテクノロ

ジーの働きと人間の知恵の表出した数学との比較活動を通し、数学の学習をより意義ある活動と認識するだろう。具体的には、関数の目標を次の(A)～(D)の様相に設定しカリキュラムの構想を進める(大澤・小澤・吉田, 1995)。ある現実的な問題やデータを手にしたとき、どのように判断しそれらの問題やデータを処理していけばよいのか。グラフの解析的な展開を通し、生徒に問題解決のための判断や意思決定させることを、関数指導の重要な目標と捉えるからである。

- (A) 関数関係を見出す
- (B) 関数を的確に表現・処理する
- (C) 関数を推察する
- (D) 関数を活用する

2. 授業の方法と指導内容

(1) 授業の方法

前述のカリキュラム構想に基づき、1998年9月4日から1998年10月22日までの間、おおむね17時間にわたる関数の授業を次のように実施した。

対象生徒は、東京都公立中学校2年生3クラス

(1クラス男子20名、女子16名、計36名)である。1～12時間目は、テクノロジーの利用を前提とするが、1～3時間目のテクノロジー操作は教師が代表しておこなっている。実際に生徒各自がグラフ電卓を手元において操作するのは、4時間目からである。逆に13時間目以降はテクノロジーが手元に用意されていない状況で授業を進めている。また、12時間目後の定期試験(1998年10月12日)で、グラフ電卓が自由に利用できる状況で評価テストを実施している。なお、授業の様子はATRで記録し、筆者の授業後のメモとともに授業分析の資料としている。

(2) 指導内容の概要

本授業の指導内容をまとめると次のようになる。なお、指導内容の詳細な説明は本稿末の注1で述べている。

表1: 指導内容の一覧

指導項目	指導内容	通算時間	指導目標
関数のグラフ	グラフを歩く	1	AB
	速さ比べ	2～3	BC
	グラフ電卓の操作	4	B
最大最小	箱作り	5～6	AB
現象の予想	停止距離の問題	7	BC
	カウンター問題	8	CD
	刺激と反応の問題	9	C
	リレーの問題	10～12	D
定期試験			
1次関数	1次関数の定義	13	AB
	1次関数の式の値	14	B
	1次関数のグラフ	15	B
	1次関数の式決定	16	B
	2元1次方程式	17	-

補足: 指導目標の重点は、授業プランにより変

3. 授業実践の分析・考察

17時間にわたる授業の中で、生徒はどのような振る舞ったのか、生徒の振る舞いが特徴的に表出されているエピソードについて述べる。一つ目は2時間目の「速さ比べ」への授業、二つ目は9時間目の「刺激と反応の問題」の授業である。

(1) 「グラフを歩く」から「速さ比べ」へ

1時間目の「グラフを歩く」授業(注1参照)に関わるこれまでの研究は、トピック的な課題の扱いに終始し、その後続く授業展開の提案が充

分になされていない。そこで、本授業はそのグラフを歩く問題の解決後に、図1に示すように、グラフ電卓が手元にない状況で、速さ比べの問題を提示し授業を進める。そのような授業展開を企てることで、グラフ電卓やCBLシステムを利用した時の生徒の活動が、引き続き授業にどのように生かされるか、2年A組の授業記録をもとに述べる。

<速さ比べの問題>

図1のように、A、B君が歩く。同時にスタートしてから2秒後の速さは、A君とB君のどちらが速いですか?

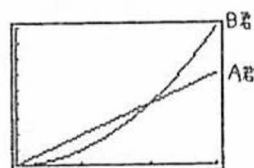


図1: A、B君の歩く様子

速さ比べの授業の様子

速さ比べの提示問題では2秒後の速さという曖昧な表現を使っている。スタートしてから2秒後までの平均の速さを求めるのか、2秒経過した時点での速さを求めるのか、不明確な表現をすることで生徒の議論を活性化しようとするねらいがある。また例えばB君の歩く様子について、1時間目の「グラフを歩く」問題の解決経験を踏まえ、次の表2を図2のようなグラフの各点の座標をグラフ電卓のトレース機能で読み取った情報を整理したものとして生徒に提示している。同様にA君の歩く様子についても生徒に提示している。

表2: B君の歩く様子

x (秒)	y (m)	x (秒)	y (m)	x (秒)	y (m)
0	0	1.0	1.00	2.0	4.00
0.1	0.01	1.1	1.21	2.1	4.41
0.2	0.04	1.2	1.44	2.2	4.84
0.3	0.09	1.3	1.69	2.3	5.29
0.4	0.16	1.4	1.96	2.4	5.76
0.5	0.25	1.5	2.25	2.5	6.25
0.6	0.36	1.6	2.56	2.6	6.76
0.7	0.49	1.7	2.89	2.7	7.29
0.8	0.64	1.8	3.24	2.8	7.84
0.9	0.81	1.9	3.61	2.9	8.41

(x: 経過時間, y: 進んだ距離)

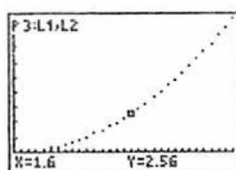


図2：B君の歩く様子

「速さ比べ」問題の結論としては①A、B君の速さは等しい、②B君の方が速い、③A君の方が速い3つの場合が考えられる。議論前の生徒の反応は①と②にわかれ、③を主張するものは少なかった。ここでそれぞれ結論づけた理由として、例えば①のA、B君の速さは等しいと捉える生徒から、次のような意見が出された。(発話中の生徒名は仮名)

- 岩田：2秒後ってというのは、ぶつかるから、2秒までで、
 それで2秒のときに、同じところにあるから、同じ。
 味尾：2人とも4メートルいくのに2秒間だから、同じ時間かかるから、同じ速さだと思います。
 教師：同じ速さって、具体的にどのくらいの速さですか？
 味尾：秒速2、メートル。

これらの主張に対し、A君の方が速いと考えていた生徒の反論はなく、B君の方が速いと考えていた生徒も岩田や味尾の主張に同調し始めた。クラスの合意として、A、B君の速さはともに秒速2メートルであり等しいという見方が大勢を占めた。しかしここでB君の方が速いと捉える生徒(塚原)から、次のような発話がなされ、議論の様相は新たな展開を見せることになる。

塚原：B君のグラフの方が、2秒のところに来たときが、
急になっていて、B君の方のスピードが速い。前の
歩く実験で、グラフの角度(傾き)が急の方が速かっ
たから。

教師：うー。この(塚原の)考えは間違っているんですか？

美馬：それ(塚原の見方)は瞬間的な速さだから。

笹木：こっち(岩田、味尾の考え)は、2秒間の動きに対しての速さ。

美馬：瞬間的な速さってというのは、1.8秒から2秒とか、
 2秒とか2.1秒までにしぼって集中して見たときの速さ。

上記の発話を踏まえ、授業では次のような経過時間の区間におけるA君、B君の平均の速さを表2のデータ等から次の表3ようにそれぞれ求めさせ比較させた。

表3：A、B君の「平均の速さ」の算出

	0～2秒	1.8～2秒	2秒～2.1秒
A君	2 m/秒	2 m/秒	2 m/秒
B君	2 m/秒	3.8m/秒	4.1 m/秒

算出例：B君の速さ(2秒～2.1秒までの場合)

$$\frac{4.41 - 4.00}{2.1 - 2.0} = 4.1 \text{ (m/秒)}$$

塚原の速さの捉え方

上述の塚原の発話は何を示唆しているのだろうか。塚原は、発話の最初の部分で「2秒のところに来たとき…」と述べ、曲線グラフを局所的に捉え直線グラフと見ている。続いて彼は「…急になっていて、B君の方がスピードが速い」と結論づけている。彼はグラフを局所的に直線と見た後、その直線の傾き具合を視覚的に捉えることでA、B君の速さ比べをしたのである。さらに続く発話「…前の歩く実験で、グラフの角度(傾き)が急の方が速かったから。」は、直線の傾きに注視する彼の振る舞いの根底に、前時の「グラフを歩く」活動が関与することを示唆している。

前時の「グラフを歩く」実体験の通し、生徒らは等速で歩くとき、その速さが速いほどその直線グラフの傾き(角度)は急になることを確認(発見)している。言い換えれば、イメージとして頭の中を廻る速さ、身体を使った体感としての速さ、グラフ化された視覚的に捉えられた速さが、実体験によって結びの強いものとして組織され理解されたと言える。そのような「グラフを歩く」活動がなくとも、「速さ比べ」の授業展開は可能ではないかという指摘もある。しかし、「グラフを歩く」実体験があればこそ、A、B君の速さは等しいというクラスの大勢の中、塚原のような確信のある速さの捉えがなされたのである。

つまり、グラフ電卓等のテクノロジーを利用した体験的な理解や知識が、グラフ電卓が手元にない状況でも有力な情報判断の根拠になりうるということである。

変化の割合の意味・意義の感得

変化の状態を捉えるために変化の割合(平均変化率)を学ぶことは、関数の重要な学習の一つ考えられる。一方、従来の関数指導において生徒に変化の割合の意味や意義を十分に感得させる授業

展開がなされているとは言い難い現状がある。そのような問題点の解消に、1次関数と2乗に比例する関数を対比させる速さ比への授業は有効に働くのではないか。

速さ比への授業で、①A、B君の速さは等しい、②B君の方が速いという生徒の捉え方を確認し議論した後、数量的に速さ（平均の速さ）を算出する活動を生徒にさせている。議論で見られた「2秒間の動きに対しての速さ（笹木）」や「1.8秒から2秒とか、2秒とか2.1秒までにしばって集中して見たときの速さ（美馬）」を具体的に求めさせている。経過時間について0～2秒の区間を対象とすればA、B君の速さは等しく、1.8～2秒の区間を対象とすれば、B君の方が速いことを、表3の算出活動の結果等により、生徒は数値的にその遅速関係を明確に把握し検証したのである。つまり、生徒は遅速の判定が対象とする経過時間の区間に深く関わることを、変化の割合という捉え方を通し実感したのである。

以上のように、「速さ比べ」という活動を通し、生徒は平均の速さ（変化の割合）に着目することや変域を設定することの重要性を認識していたのである。

(2) 数学的モデルの作成と検討・検証

7時間目以降の授業は、グラフ電卓を利用した数学的モデルの作成と検討・検証に深く関わる活動を含んでいる。ここでは9時間目「刺激と反応の問題」の授業における生徒の振る舞いを中心に述べる。

「刺激と反応の問題」において、最初の段階で生徒は、「どの関数になるか」と推察し始めている。その段階で多くの生徒は、理科における既習の知識から経過時間 y は実験人数 x の比例と捉えている。

<刺激と反応の問題>

人間の刺激に対する反応時間を探ろう。

実験方法：何人か手をつなぎ、握手で信号を送っていきます。最後の人は信号が伝わってきたら手を挙げてください。

計時方法：最初の人に信号を送り始めてから、最後の人が手を挙げるまでの時間をストップウォッチで計ります。

表3：刺激と反応の実験結果(2年A組)

x (人)	5	10	16	22	27	32
y (秒)	1.02	1.91	2.95	3.86	4.63	6.21

補足：実験は2回ずつ実施し時間の短い方を y の値として採用

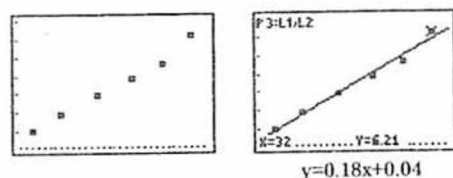


図3：表3をもとにした数学的モデルの作成

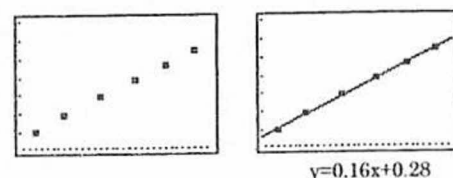


図4：再実験と数学的モデルの修正

現実場面と数学的モデル間の往来

生徒はグラフ電卓の回帰モデル機能を使い、図3～4のように、反応時間は対象人数の1次関数になると確認する。そこで、反応時間は対象人数の比例でなく1次関数になる理由を、「(計時者が)最後の人が手を上げるの見て、ストップウォッチを押すのにかかる時間が(y)切片になるから」と解釈する発言が見られた。さらに、生徒の活動はそのような関数を推察し最適な数学的モデルを作成したり、数学的モデルから現実場面を解釈する活動に止まらない。図3のようにプロットしたデータとグラフ電卓による1次回帰モデルを視覚的に比べ、その回帰線から極端に離れている点(32, 6.21)に注視した。結局、生徒はその現実場面からの実験データに疑問をもち、実験のやり直しをおこなっている。32人による再実験を実施し経過時間5.42秒を得て、改めて定式化し $y = 0.16x + 0.26$ と数学的モデルを作成している。その1次関数の式から、人の刺激に対する反応時間は約0.16秒、挙手した生徒を視覚的に捉えストップウォッチを押すまでの作業に約0.28秒かかるとクラス合意された。

以上のように、生徒は無批判的に回帰モデル機能で得られたモデルを鵜呑みにせず、現実場面に意味付けすることで1次関数になる理由を考えている。一方で、場合によっては数学的モデルの方でなく現実世界からのデータを修正している。つまり、生徒は現実からのデータとグラフ電卓を利用しつつ得た数学的モデルとの間を往来しつつ、より確かな数学的モデルの構築を図っているのである。グラフ電卓の利用の視点から言えば、グラフ電卓の回帰モデル機能は生徒の意思決定の余地を残しつつ数学的モデルとしての候補を視覚的に表示したのである。

抽出要因に対する取り扱いの変容

本カリキュラムにしたがいある程度の期間にわたりグラフ電卓等を利用すれば、生徒の活動はどのように変容するのだろうか。

例えば、引き続き10時間目以降の「リレー問題(大澤,1996a,1998a)」における生徒の振る舞いを考察してみる。「リレー問題」は、リレーの総タイムを短縮するため、そもそもどのような要因が問題の解決に関係し、どの要因に焦点を当てデータ抽出すべきかという要因の抽出に関わる活動を含んでいる。それらの活動は、問題解決に関連した要因の間にどのような数学的な関係を生成するかという数学的なモデルの作成と検討・検証の前段階の活動として位置づけられる。

問題解決のための要因として、生徒の運動会におけるリレーの実体験等から、バトンパス、走順、体育的トレーニング、足に合う靴の選択という要因が授業で指摘されている。続く議論の中で、それらの要因のうち体育的トレーニングと靴の選択は問題解決の要因として数学的に捉えていくのは難しく不可能であると切り捨てられている。また、バトンパスの要因に関わるデータ抽出である90m走の計時について、「それほど細かいデータを採らなくともよい」という主旨の意見が生徒から出されている。その意見の背景には、例えば細かく1mごとに計ることは、面倒であり作業に困難性を伴うから、そのような計時方法は妥当でないとの主張がある。

またもう1つの背景として、詳細に計時せず5m程度ごとに計時しても、その間のデータは内挿的な捉えにより生じでき、抽出したデータの外側の部分では、外挿的な扱いによりデータの傾向を伸長できる。つまり、ある程度のデータを抽出すれば、前時までの授業で学習してきたグラフ電卓の回帰モデル機能が利用できるという生徒の見込みが伺える。

つまり、生徒は、問題解決のために、より有効に効く要因を選ぶという視点だけでなく、生徒自身の扱える要因を選ぶという視点から要因の決定をおこなっているのである。グラフ電卓の利用の視点からは、グラフ電卓の回帰モデル機能等の利用経験を反映し、生徒の抽出する要因の対象や取り扱いが変容しようと言える。

4. まとめ

中学校の関数指導において、グラフ電卓のテクノロジーの利用を前提とすることにより、グラフの解析的な扱いを中心としたカリキュラムの構成を試みた。

3(1)の「グラフを歩く」から「速さ比べ」の授業の分析・考察から、生徒のグラフ電卓等のテクノロジーを利用した体験的な理解や知識が、グラフ電卓がない状況でも有力な情報判断の根拠になりうるということがわかった。また、速さ比べの授業展開は、変化の割合の意味や意義、ひいては関数、数学を学ぶ意味を生徒に感得させるのに有効であるとの示唆を得た。

3(2)の数学的モデルの作成と検討・検証では、問題解決のための要因抽出に際し、生徒はグラフ電卓の利用経験を生かし、要因の有効さのみならず要因の取り扱いやすさの視点に立って活動を進めていることがわかった。また、抽出したデータから数学的モデルを生成する段階で、生徒は無批判的にグラフ電卓を利用するのではなく、現実からのデータとグラフの利用から得られた数学的モデルとの間を往来しつつ、数学的モデルの構築を図っている。つまり、グラフ電卓は、生徒の判断や意思決定の余地を残しつつ、数学的モデルとしての候補を視覚的に表示することがわかった。

以上、本稿のグラフ電卓の利用を前提とするカリキュラムによるグラフの解析的な扱いを中心とした授業展開は関数指導に少なからず有効であると言える。

5. 註および引用・参考文献

註1)

1時間目の「グラフを歩く」授業で、グラフ電卓、CBLおよび距離センサー等のテクノロジーを利用して、生徒自ら身体を自由に動かすことで図5のようなグラフを歩く(つくる、描く)活動を試みている(堀尾, 1997 ほか)。どのようにしたら図7のようなグラフを歩くことができるのか、生徒はリアルタイムにスクリーン上に表示される自分の歩きぶりを視覚的に捉えつつ、自らの歩きに修正を加え問題の解決を図っていく。それらの活動を通して、生徒に経過時間に対し自身の位置(センサーからの距離)が唯一決まることを体験させることで関数の意味を実感させている。

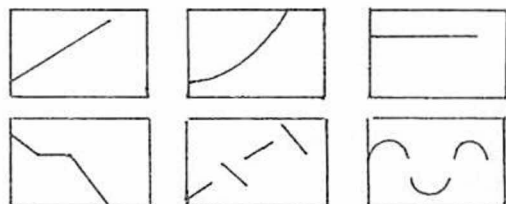


図5：グラフを歩く(つくる、描く)例

4時間目の授業で、生徒は初めてグラフ電卓を手にするようになる。しかしグラフ電卓の操作について、教師は生徒の電卓操作に関わる負担を考慮し必要以上のことを生徒に教えていない。基本的な操作に時間をかけ指導し、電源の入切、演算記号「+」と負の符号「-」の分別、1～3時間目の授業で教師が操作していたグラフ機能や式入力機能等を扱い、グラフ電卓による関数の表現・処理の仕方を習得させている。

5時間目からの「箱作り」の授業で、長方形(B5の紙)の4隅から正方形を切り取りフタのない最大体積となる箱を作る場面を取り上げる。最大体積となる箱の形を予想しつつ、実際に切り取る正方形の1辺の長さを変え、生徒全員で手分けをし様々な箱を作成する。その作業を通し、1辺の長さが決まると体積も決まるという関数の意味をつかませる。それら一つ一つのデータを、座標平面上に点でプロットし、視覚的に最大値を捉える。一方で、数学的に直方体の体積を1辺の長さの3次関数の式で捉え、グラ

フ電卓を利用してグラフ化し視覚的に最大値を捉え取らせている。

7時間目の現象を予想する授業で、自動車の速さに対する停止距離を取り上げている。車のいくつかの速さと停止距離のデータから、データにない速さに対する停止距離を予想させる。一方で、グラフ電卓を利用した2次回帰モデルのグラフを内挿的・外挿的に読み取ることで、生徒の予想を検証させる。それらの活動により、データから特徴を捉えたり傾向を予想するのにグラフが有効であることを理解させている。

8時間目の「カウンターの問題(大澤, 1998b)」で、抽出したデータをもとにテーブルカウンターと経過時間の関係を取り上げている。経過時間はカウンター数の比例でなく2次関数であることを捉えさせている。

試験後の13時間目以降の授業は、テクノロジーが手元にない状況で、2組のx, yの値に注視し1次関数のグラフを決定していく表現・処理の方法等をグラフ電卓の利用と対比させつつ学ばせている。

大澤弘典, 小澤慶児, 吉田裕行. (1995). 生徒の関数的な見方・考え方の変容について. 日本数学教育学会, 第77回総会特集号, 279.

大澤弘典. (1996a). 現実場面に基づく問題解決: グラフ電卓を利用した合科的授業展開を通して. 日本数学教育学会誌, 78(9), 16-20.

大澤弘典. (1996b). 数学的モデリングの教材化についての一考察: 中学校におけるグラフ電卓利用の効果と限界を視点に. 大阪教育大学数学教室, 数学教育研究, 26, 55-64.

大澤弘典. (1998a). 中学校における数学的モデリングの指導についての研究: 生徒によるグラフ電卓の利用を視点として. 上越教育大学数学教室, 上越数学教育研究, 13, 53-62.

大澤弘典. (1998b). 数学的モデリングにグラフ電卓の利用を図った教材例: テーブルカウンターのカウンターの問題. 日本数学教育学会誌, 80(9), 30-33.

平野圭一, 川上公一, 大月一泰. (1998). 床に鏡を置いて覗いてみよう. Teachers Teaching with Technology (T²) JAPAN, 2, 40-45.

堀尾直史. (1997). グラフ電卓+距離センサーでグラフを歩く. Teachers Teaching with Technology (T²) JAPAN, 1, 10-13.

Function curriculum in which graphing calculator is used

OHSAWA Hironori

Summary

In this paper, the curriculum composition which centered on an analytical treatment of the graph was attempted on the assumption of the use of graphing calculator. The class for 17 hours was executed for the eighth grade pupil (Three classes; 36 people a class) in a public junior high school. The following finding was concretely obtained. ①Experienced understanding and knowledge in which the graphing calculator are used can become grounds of a powerful information judgment even in the situation that those technologies are not at hand. ②The class of "Speed comparison" in the background of the use such as graphing calculator can make the student inevitably learn the meaning and the meaning of the ratio of the change. ③When a realistic problem is solved, the student constructs the mathematical model using the graphing calculator as a sight display tool of the mathematical model based on the decision making of the student.