東北数学教育学会年報
1999. 3. 31　第30号

部分分数分解について

秋田工業高等専門学校　　工　藤　　幹

1．はじめに

第４学年のあるクラスで，ラプラス変換を用いて微分方程式を解く方法を指導していた際に，有理関数を部分分数に分解をすることのできない学生が以外に多いのに驚いた。現在使用している教科書[1]によると，部分分数分解を始めに学ぶのは，第１学年の始めのほうで，恒等式の項目においてである。

［例１］次の式が恒等式となるように，定数ａ，ｂ，ｃの値を求めよ。 $2x/(x-1)(x^2+1)=a/(x-1)+(bx+c)/(x^2+1)$

時間的な制約もあってか，教科書では，分解された形を示して係数を求める方法を述べている。すなわち，ここではなぜそのように分解されるのかについては説明されていない。恒等式の意味を理解するのにはそれで十分というわけである。もちろん，教師が指導しなければならない。その次にまとまって現れるのは，第２学年後半に有理関数の積分を学ぶときである[2]。

［例２］①次の等式が成り立つように定数ａ，ｂ，ｃの値を定めよ。$1/x(x-1)^2= a/x + b/(x-1) + c/(x-1)^2$

②不定積分 $\int 1/x(x-1)^2dx$ を求めよ。

ここでも，なぜこのように分解されるのかについての記述はない。部分分数分解ができなければ，有理関数の積分の計算ができないわけである。すなわち，積分を学ぶときまでには，部分分数分解を十分に指導しておくべきであると考える次第である。それも，こういうときはこういう形でという指導の仕方では，そのときに出来ても，時間がたつと忘れてしまうということになりかねない。やはり，なぜそういう形で出来るのかという理由をしっかり理解させるべきであると思う。

いろいろな教科書を調べてみても，部分分数分解についての系統だった指導法についての記述は見受けられなかった（最後に載せる参考文献参照）。

以上の考えから，ここでは，先に述べたクラスの学生に部分分数

分解がどの程度のできるのかを調査し，それから理解不十分である理由を類推し，さらに，具体的な指導方法についての私見を述べる。

2．調査および結果

まず，クラス３９名に，記名で，次の５つの有理関数について部分分数分解を計算してもらった。時間は５０分。手元にある本，ノート類は何を見てもよいことにした。

① $(3x+1)/(x-1)(x+2)$

② $(2x^2+7x+2)/(x+1)(x+2)$

③ $(x^2+x-3)/(x+1)^3$

④ $(x^3-x^2+5)/(x^2+x+1)^2$

⑤ $(x^2-2x-1)/(x-2)(x+2)^2$

各問題において，分母を既に因数分解された形で与えたのは，部分分数に分解する箇所に的を絞ったためである（中には因数分解がまともに出来ない者もいる。分母を因数分解することができるという前提で）。結果は次のとおりである。以下においては，正解の割合を「正解率」，求め方は正しいが，途中の計算ミスなどで正しい答が得られなかった場合を「不完全解率」，これら以外（無答も含めて）の割合を「誤答率」ということにする。

［①について］正解率５１％，不完全解率３０％，誤答率１９％
［②について］正解率１１％，不完全解率２２％，誤答率６８％
［③について］正解率２４％，不完全解率２７％，誤答率４９％
［④について］正解率１１％，不完全解率１１％，誤答率７８％
［⑤について］正解率１６％，不完全解率２７％，誤答率５７％

この誤答率のデータから，まず部分分数分解という事柄自体がよく理解されていないことが読み取れる。①のような最も単純な問題以外については，厳しい数字である。解答用紙回収後に，複数の正解例を示し，「その求め方で良いという理由を理解しているつもりであるかどうか」を，挙手により全員に意識表示させたところ，

「理解しているつもりである」

と答えた者の割合は，各問題に対して，それぞれ，

①３８％，②３％，③８％，④０％，⑤８％

であった。この数字は，「意味は分からないが，どういう場合にはどのように置く」といった形式的な暗記学習で済ませている学生が

多いことを示しているのではないかと思う。このような学生は，習った当時はテストの点数は良いかもしれないが，忘れてしまうことも速く，時間が経ってから，いざ実際的な問題に応用しようとしたときにそれが出来ないということになりかねない。また，正解率と不完全解率の数字から，学生の計算力の低下が読み取れる。

3．指導方法について

以上の考察から，部分分数分解についての指導法として，次のような方法を考えた。

(1)代数学の基本定理

今回の調査問題から省いた部分ではあるが，分母を因数分解することについても，まず理解しておいて欲しいことがらとして，$P(x)$を実数係数のn次の整式としたときに，「$P(x)$は高々2次の実数係数の整式の積として表される」という事実である。これは，次のように説明すればよい。

まず，代数学の基本定理から，「方程式$P(x)=0$は少なくとも1つ解αをもつ」（これは「後日，複素関数論（本校においては第4学年；応用解析）を学ぶとき『複素数の関数の積分』という項目で証明される」と説明:参考文献[10]）。この事実と次の事柄から，納得が得られると思う。

(i)解αが実数の場合には，因数定理により，$P(x)$は$(x-\alpha)$を因数にもつ。

(ii)解αが複素数の場合には，$\alpha=p+qi$（p,q：実数，i：虚数単位）と置くと，共役複素数$\beta=p-qi$も$P(x)=0$の解である。この事実は例えば，$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$にたいして実際に計算させて納得させればよい。そして，α,βが共に解なのであるから$P(x)$は

$(x-\alpha)(x-\beta)$，すなわち，2次式 $x^2-2px+p^2+q^2$を因数にもつ。したがって，(i)と(ii)より，

$$P(x)=\delta\,\Pi\,(x+\alpha_m)^k(x^2+\beta_n x+\gamma_n)^h$$

のように因数分解される。ここで，α_m，β_n，γ_n，δは実数で，$k=k(m)$と$h=h(n)$は自然数で$k+h=n$，Πはmとnについての積を表す。

(2)分子は分母より低次数にすること

分子が分母より低次数でない場合には，分子を分母で割ることにより，分数式の分子を（次数が低いという意味で）より簡単な形に変えることができるということを，例えば②のような問題で確認させる。このとき，大切なことは，{整式（割り算をした場合の商)} + {余りが分子である分数式} となることをよく理解させることである。

(3)問題①に対して

$(3x+1)/(x-1)(x+2)=A/(x-1)+B/(x+2)$として定数AとBを求めるのが基本であるが，分母を払って$3x+1=A(x+2)+B(x-1)$とし，恒等式の考え方から両辺の係数を比較して求める方法（学生の大半はこの方法であった）と，両辺のxに適当な値（ここでは，$x=1$と$x=-2$）を代入して求める方法がある（この方法で求めたのは1割位の者）。後者は元の問題の分母を0とするような値であるので，この方法でも良いことについて若干の説明が必要である。また，後者の方法で数値の代入後に数値の計算をせずに，A，Bを表現してみることにより，最も簡単な方法である，

$$(\text{与式}) = [(3x+1)/(x+2)]_{x=1}/(x-1) + [(3x+1)/(x-1)]_{x=-2}/(x+2)$$

の成り立つことがわかり，この方法は暗算でA，Bを求めることができる便利な方法である。

(4)問題③に対して

$$(x^2+x-3)/(x+1)^3 = A/(x+1)+B/(x+1)^2+C/(x+1)^3$$

とおいて，定数A，B，Cを求めるのであるが，この置き方に至る過程が大切であり，また，その過程をたどることで分解が簡単にできてしまう。すなわち，$x+1=t$, i.e. $x=t-1$とおくと，与式は

$$\{(t-1)^2+(t-1)-3\}/t^3 = \{1/t\}-\{1/t^2\}-\{3/t^3\} = \{1/(x+1)\}-\{1/(x+1)^2\}-\{3/(x+1)^3\}$$

となり，A，B，Cを用いないでも分解ができてしまうのである。これと，同様なのが次の場合である。

(5)問題④に対して

$$(x^3-x^2+5)/(x^2+x+1)^2$$
$$=(Ax+B)/(x^2+x+1)+(Cx+D)/(x^2+x+1)^2$$

とおいてA, B, C, Dを求めるのが一般的であるが，なぜこのように置けるのか理解している学生は少ない。右辺第1式は分母が2次だから，分子は高々1次であるということはよい。しかし，第2式の分子も1次式でよいというのはなぜか。学生が疑問に思う点はここである。この疑問を解消し，しかも，その経過をたどることによって分解ができてしまうというのが，次に述べる方法である。

分数というのは割り算を表現したものであるから，いま，(x^3-x^2+5)を(x^2+x+1)で割ってみると，商が$x-2$で余りが$x+7$である。したがって，

$$(x^3-x^2+5)=(x^2+x+1)(x-2)+(x+7)$$

が成り立つ。ゆえに，

$$(x^3-x^2+5)/(x^2+x+1)^2$$
$$=(x-2)/(x^2+x+1)+(x+7)/(x^2+x+1)^2$$

とたちどころに分解が完了するわけである。余りは割る式より次数が低いというのが，前述した$Cx+D$でよいという理由になっている。この問題より難しい問題として，

$$(x^5+2x^4-x)/(x^2+x+1)^3$$

を部分分数に分解してみる。

(x^5+2x^4-x)を(x^2+x+1)で割ると，商が x^3+x^2-2x+1で余りが-1である。この商を再び(x^2+x+1)で割ると，商がxで余りが$-3x+1$である。このことは，

$$(x^5+2x^4-x)$$
$$=(x^2+x+1)(x^3+x^2-2x+1)+(x-1)$$
$$=(x^2+x+1)^2x+(x^2+x+1)(-3x+1)+(x-1)$$

であることを示しており，結局，

$$x^2+x+1\ \big)\ \overline{x^5+2x^4\qquad -x}$$
$$x^2+x+1\ \big)\ \overline{x^3+x^2-2x+1}\ \cdots\ -1$$
$$x\ \cdots\ -3x+1$$

$$x/(x^2+x+1)\ +\ (-3x+1)/(x^2+x+1)^2\ -1/(x^2+x+1)^3$$

のように分解できるということを示している。

(6)問題⑤に対して

分子は分母より低い次数であることから，部分分数分解された形は $A/(x-1)+(Dx+E)/(x+1)^2$ ；A, D, Eは定数である。さらに，この第2式は③で指導したことから，$B/(x+1)+C/(x+1)^2$ の形となり，結局，初めから $A/(x-1)+B/(x+1)+C/(x+1)^2$ ；A, B, Cは定数と置けば良いことが容易に理解されるものと思われる。

4．おわりに　　一度学んだ事柄が，時間が経ってしまうと，教科書を見直しても，分からないというのは，忘れてしまったというよりは，学んだときにしっかりと理解をしていなかった。公式に当てはめるだけで，その公式のもつ意味を十分に理解していなかったといえるのではないか。時間的な制約もあって，すべての事柄を十分に理解することはなかなか難しいことではある。しかしながら，これだけは，きちんと理解しておかなければ，後で応用するときに困るというものもある。そういうところを指導者はきちんと見分ける必要がある。その1つの例として，部分分数分解をとりあげ，その指導法について述べてみた。考え方そのものが，解法であるならば，一度理解してしまえば，時間が経ってもそう簡単に忘れるものではない，仮に忘れてしまっていたとしても，自分のものになっていれば，もう一度見直すとすぐ思い出すものであると思う。

［参考文献］

［1］基礎数学，［2］微分積分Ｉ：田河生長他著，大日本図書
［3］高専の数学１・２・３：田代嘉宏他編，森北出版
［4］工科の数学　基礎数学，［5］微分積分：田代嘉宏著，森北出版
［6］基礎の数学：寺田文行編，サイエンス社
［7］基礎の数学，［8］微分積分：矢野健太郎他著，裳華房
［9］基礎数学：森繁雄他著，東京書籍
［10］解析学概論（新版）：矢野健太郎他著，裳華房

On decomposition into partial fractions

Miki Kudo

Decomposition into partial fractions is used for integralcalculus, Laplace transformaition and so on.
In this paper, we discribe the systematized way of guidance for decomposition into partial fractions.