東北数学教育学会年報
1999. 3. 31　第30号

大学数学系学生の $\varepsilon-\delta$ 式論法の理解について（２）

山形大学講師・岩手大学名誉教授　佐伯　卓也

要約　筆者の同じ名の論文では $\varepsilon-\delta$ 式論法により，関数の“連続”と“一様連続”の違いをどれだけ理解できるかのデータを集めるために研究を進めた。今度は $\varepsilon-\delta$ 式論法を用いるが，関数列の“収束”と“一様収束”の違いの理解に焦点化して行った。結果は前の結果に比べても一応評価できる結果を得た。

キーワード　大学数学教育，教師教育，$\varepsilon-\delta$ 式論法，関数列，一様収束

1　はしがき

理科系特に数学系の大学数学教育では微分積分学の講義の中で $\varepsilon-\delta$ 式論法をどう扱うかの問題に取り組んだ第２報である。第１報の時の経験を生かして授業（解析学Ⅱで内容は微分積分学の続きで，広義積分から無限級数を扱った）を行い，期末試験時に $\varepsilon-\delta$ 式論法の課題を入れて調査した。内容は無限級数の中で，関数列としてそれがある種の極限関数に“収束する”概念と“一様収束する”概念の違いについて理解させ，テストで正解が出るか否かの形でなされた。学生にとっては，まず無限級数という概念に不慣れなこと，$\varepsilon-\delta$ 式論法に不慣れなことがあって，あまり結果を期待しなかったが，一様収束については，予想に反して，まずまずの結果であった。この経験を踏まえて，今後とも $\varepsilon-\delta$ 式論法の教授の仕方について取り組まなければならない，と考えると同時に，数学系学生には $\varepsilon-\delta$ 式論法はいつどのように扱うかが課題になる。

動物学者のK．ローレンツは快いものを手に入れ，不快なものを避けることがあまりに成功し過ぎることは人間とって本当は危険なことであると言う。それは人間の進歩の糸口がそこで断たれるからである。（井口，1998）。$\varepsilon-\delta$ 式論法のような難解なものも半ば強制的に学習させる意義はここに存するように感じている。

1998年12月19日の新聞の１面トップの記事に，校内暴力2万3600件，中高は倍増過去最多，学校の荒廃深刻に，とあった。これは敗戦後の日本の教育の総決算を象徴していると批判するのは容易い。しかし，これをいかにして治めて暴力のない秩序のある学校にし，今後の日本の社会に寄与していくかを考える時，世の教育に携わる人間は，歴史に学び教育の根本を哲学的に追求していく必要を痛感する。

2　先行研究と研究目的

Dorier (1996) によれば，ε - δ 式論法は大学レベルの数学教育の観点から，ベクトル空間，群論とならび，現代解析学全般の統一化，一般化概念としてメタ理論に導くツールと言うか，キーワードと言うか，それによりいろいろな解析学の理論を纏めて，古い有能感 (competence) や知識の要素の再構築 (reorganization) を導くものとして位置付けた。

佐伯 (1998a) は教育学部2年次学生を対象に，微積分の講義の終わりに，関数の連続と一様連続の違いの授業の知識について調査をした結果，定義については半数ぐらいは理解していたが，応用問題（実例について示す）は正解は5％程であった。

本稿の研究目的は日本の大学数学系学生の関数についての ε - δ 式論法の理解の調査に次いで，関数列についての一様性の理解と ε - δ 式論法とその使用の程度を知るためためのデータを得ようとすることにある。

3　方法

使用した教科書は岡安他 (1988) の微分積分学入門である。対象学生 (Ssと略す) は山形大学教育学部の2年次主体の学生で，申告は数学科学生の27名(男子16名；女子11名)であった。しかし，2月の期末テスト時では24名(男子14名，女子10名)であった。

授業は毎週1回90分で行った。岡安他の教科書の該当する部分は5．級数のところである。そこでの収束はn部分和の数列の収束・発散で定義するごく普通の方法である。さらにべき級数が区間Ｉで一様収束するとは $\lim \varepsilon_n=0$ である数列 $\{\varepsilon_n\}$ が存在して $|\Sigma_{k=n}^{\infty} a_k x^k| \leqq \varepsilon_n$ がすべてのnとすべての $x \in I$ に対して成り立つこととして定義している。この教科書には補遺があって，関数列 $\{f_n(x)\}$ の記述があり，関数f(x)の区間Ｉでのノルム $\|f\|_I=\sup_{x\ I}|f(x)|$ で導入し，

$$\|f_n-f\|_I \to 0 \quad (n \to \infty)$$

であるとき関数列 $\{f_n(x)\}$ は関数f(x)にＩで一様収束するという，と記述してある。筆者はこれらの記述を全面的に改め，田島 (1943) の記述にならい，ε - δ 式論法を用いて述べた。その要点は，まず関数列の収束の部分は

…，$f_n(x)$ が $[a, b]$ で収束しその極限関数を $f(x)$ とすれば，$\alpha \in [a, b]$ に対し

$$f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha), \cdots \to f(\alpha)$$

であるから，任意の正数 ε に対して適当に N をとれば

$$n \geqq N \text{ なるすべての } n \text{ について } |f(\alpha)-f_n(\alpha)| < \varepsilon$$

を得る。しかし，α と異なる β に対しては一応

$$f_1(\beta), f_2(\beta), f_3(\beta), \cdots \to f(\beta)$$

であるが，これを ε - δ 式論法で述べれば，任意の正数 ε に対して適当に N' をとれば

$n \geqq N'$ なるすべての n について $|f(\beta)-f_n(\beta)|<\varepsilon$

となり，この場合の N' は N と一致しない。つまり N のとりかたは ε のとりかたの外に点 α のとりかたにも関係することに注目しなければならない。…

一様収束の部分は次の通りである。

これが，α のとりかたに関係しないというのが，一様収束なのである。

定義 任意の正数 ε に対し，[a, b] のいかなる x をとっても

$n \geqq N$ ならばつねに $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$

となるような番号 N が，ε のみに関係し x には無関係に決められれば，$f_n(x)$ は [a, b] において f(x) に一様収束 (uniform convergence) するという。

実際の授業では，ただの収束と一様収束の違いを数回にわたって強調している。その上，課題

(問)[0, 1]において関数列 $f_n(x)=x^n$ の極限関数を求め一様収束か否かを判定せよ。

を出題して学生に演習させて説明をしている。

2月6日期末考査をした。該等する設問は次の通りである。

[1] 閉区間 [a, b] で定義された x の関数である $a_k(x)(k=1, 2, \cdots)$ の無限級数

$$a_1(x)+a_2(x)+a_3(x)+\cdots\cdots+a_n(x)+\cdots$$

が極限関数 s(x) に「収束する」ことを ε - δ 式論法を用いて定義し，次に s(x) に「一様収束する」ことを ε - δ 式論法で定義し，その違いを明確に示せ。(注意：ε - δ 式論法を用いないときは正しくとも減点する)

と言うものであった。次の節で結果を示す。

4 結果

Ssは男女が交じっているが，集計は男女を区別しないことにする。表1で応答数とそのサンプル数に対する%を示す。応答のカテゴリーは研究目的に従って ε - δ 式論法の使用状況を見るため，関数列の収束する，一様収束するともに，ε - δ 式論法の使用，使用しない，に分けた。テストは教科書・ノート類持ち込み可なので，一様収束のところは ε - δ 式論法で書くことが出来ている。注目したことは，番号Nが ε だけに関係し，$x \in I$ の取り方には無関係である，ということで正解になったのが殆どすべてであった。しかし収束と一様収束の違いは解答者が少なかったのは，問題の見落としか，その外の事情によると考えられる。区別のところで

表1　問題［1］の応答数と人数に対する％

		正答	誤答	合計
	ε－δ使用なし	9(37.5)	0(0)	9(37.5)
収束する	ε－δ使用	8(33.3)	1(4.2)	9(37.5)
	その他	0(0)	6(25.0)	6(25.0)
	解答なし			0(0)
	小計	17(70.8)	7(29.2)	
	ε－δ使用なし	0(0)	0(0)	0(0)
一様収束する	ε－δ使用	16(66.7)	3(12.5)	19(79.2)
	その他	0(0)	5(20.8)	5(20.8)
	解答なし			0(0)
	小計	16(66.7)	8(33.3)	
収束と	ε－δ使用なし	0(0)	0(0)	0(0)
一様収束	ε－δ使用	4(16.7)	1(4.2)	5(20.8)
の違い	解答なし			19(79.2)
	小計	4(16.7)	1(4.2)	

もう一度区間Ｉの点の取り方には無関係にＮがεだけにかかわって取れるとしたものは，ε－δ式論法利用の正解としているのだが，これが４名だけであった。前の研究でも，関数の連続と一様連続の違いを指摘した解答も少なかったが，それと一脈相通じるものがあるようだ。

4　考察

本稿の研究でもε－δ式論法を学生に理解させることはなかなか大変であるが，一部には完全に近い形で理解している学生がいる上，井口の言うように，人間の文明を危険にさらしたくないなら，このε－δ式論法の教授法に挑戦し続ける意味があるものと考えられる。

今度の教育課程の改定に関して平林（1998）の発言を見ておく。私（平林）は，これまでの教育的努力が，ガラガラと音を立てて崩れているように感ずる。これまでの，もっとよい数学をもっと多く学ばせようという意気込みは，今や殆ど見られない。最近の教育課程の「答申」なるものはその最もよい証拠である。「子どもに難しいことは一切やめる」というのが，教育課程作成の基本原理であるかのように見える。「軽減」「削除」「削減」そして後の学年への「移行」が「教育課程改正」の作業のすべてであるように見える，としている。特にε－δ式論法は工学系では，数学嫌いになると言う理由で初めにはやらずに後回しにする扱いが多く見

られることは，今回の教育課程改正に見られる思想と同じである。しかも，大学ではかなり前から言われていることである。

しかし高校数学教師も養成する数学系の諸学科では，微分積分の本物の数学を教授すると言う建前から，やはり $\varepsilon-\delta$ 式論法による極限や連続の導入は避けるわけには行かない。今回の試みはその延長線上で関数列の無限級数で試みたわけである。その結果一様収束を $\varepsilon-\delta$ 式論法で記した正解が６６％余りあったことは一様評価できそうである。ただ，単なる収束と一様収束の区別を記した率が少なかったのは，問題を見落としているのかも知れない。一様収束の時Ｎは ε だけに関係し x の取り方には無関係とわざわざ記した正解が大部分であったことから推測されるからである。今後とも $\varepsilon-\delta$ 式論法の教授法に取り組む手掛かりを得たものと言えるだろう。

筆者は，この場合は教師養成と言う立場も含まれると考える。未来教師には少なくとも前に触れたようにローレンツの発言が重みを増してくるように見える。元来生物，特に動物は困難と戦い，それを克服する新しい機能を作り，それを適応するようにして進化して来たと言われている。日本でもわずか50年程前は敗戦の貧困時代を経て，あっと言う間に今や物質文明を謳歌している。ここで確かに「快いものを手に入れ，不快なものを等避けることに成功した」ように見える。しかし今回の教育課程の改正に見るような，日本人の進歩の糸口を失わせるような，哲学のない考え方を，少なくとも教員養成の過程で未来教師に体験させたいと願って $\varepsilon-\delta$ 式論法のような骨のある教材を大学で行っているのである。

ところで，このような題材で学生によりよく理解させる方法について得られた結果から考えてみる。普通の講義でいくら詳しく丁寧に行っても１００％理解させるのには限界があることも本研究の結果分かる。これを個人的レベルで丁寧にやれば効果があがるかも知れないが実際は実現が難しい。

さらにこの解決にためには，公田（1996b）が示唆しているように，コンピュータ・電卓の使用により，学生に強い動機付けを与えるとともに映像によってイメージを明確に捕らえさせることが考えられる。例えば，関数列の一様収束を，全区間どこでもある番号Ｎがとれて，それから先は全部極限関数から ε の距離に入ることを，映像として学生一人一人に作らせることができたらもっと楽に成功するかも知れない。

参　考　文　献

Dorier, J-L (1995) Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics, Educ. Studies in Math., 29, 175-197

井口　潔（1998）生物学的教育改革論（１），啐啄，５，7-8

平林一栄（1998）数学教育史の教育哲学的背景，第３１回数学教育論文発表会「テーマ別研究部会」発表集録，159-160　および補足資料

公田　藏（1996）大学の数学教育の諸問題，数学教育学会 大学の数学教育研究会特別紀要，43-45

岡安隆照・吉野　崇・高橋豊文・武本英夫（1988）『微分積分学入門』，裳華房，東京

佐伯卓也（1998）大学数学系学生の $\varepsilon - \delta$ 式論法の理解について，東北数学教育学会第３回初夏研究集会発表資料

田島一郎（1943）『数学解析入門』，考へ方研究社，東京

On the Understanding about Reasoning by Method in University Students of Mathmatics Course (2nd Report)

SAEKI, Takuya

Lecturer, Yamagata University ; Professor Emeritus, Iwate University

(Abstracted)

In our previous paper with the same title, we have studied to collect datas which students have understood about differences between "continous" function and "uniformly continuous one by use of the $\varepsilon - \delta$ reasoning method how much.

In the present paper, we challenged the case of sequences of functions with the $\varepsilon - \delta$ method. We have obtained fairly satisfactory results.