東北数学教育学会年報
1999. 3. 31　第30号

反転の考えを使った相似の学習

山形大学教育学部　森川幾太郎

概要　平面をある条件をみたす図形群で埋め尽くすことの探求を主テーマに中学3年生に指導するための試案を述べる。ここには、円の反転に関する変換も相似学習の発展課題として含めた。

検索語　敷き詰め、相似、多角形、反転

1　はじめに

円の反転の教材化についてはCoxetor による提案や Hansen による提案などがある。Coxetor の場合、2項で整理したような円の反転に関する基本的性質をユークリッドの平面に関する基本性質と対比させて導き、さらに2定点を共有する2つの円束についての分類や mid-circles に関する考察を行う。

一方、Hansenn の場合は、ポアンカレーモデルと非ユークリッド距離の定義までを考察する双曲幾何入門としての展開になっている。ここでは、図1として彼の論文か転載した「正七角形」による敷き詰めも扱っている。

この小論では、中学生の相似学習の発展としてHansen の提案にも学び、円弧を組み合わせた図形で平面を埋め尽くす不思議絵を描き出すことを最終目標に展開する。

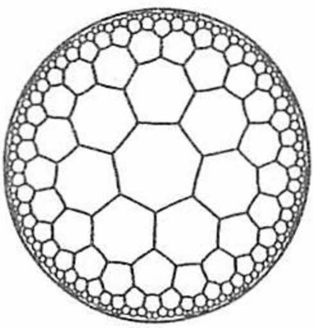


図1

その展開試案案は3項において提案するが、中学生への指導ということもあって、反転円そのものは導入しない。なお、円の反転に関する初等幾何的扱いについては、S.Stahl の著書も参考にした。

2　円の反転とその性質

円の反転について、その定義と試案の中で扱う事柄に関連した性質を中心に、基本となる性質をまとめておく。

定義　点Oを中心に半径 r の円を描く（この円を反転円という)。Oを通る半直線 l 上に2点P、Qを $OP \cdot OQ = r^2$ であるように定めたとき、PとQとは円Oに関して反転の関係にあるという。

性質1　反転円の中心を通らない直線は反転円の中心を通る円に反転される。

2　円周が反転円の中心を通るとき、その円を反転すると、反転円の中心を通

らない直線に変換される。

3 円は、反転円の中心をその円周が通らないとき、円に反転される。

4 反転円と直交する円 C の周上に一点 A を定め、半直線 OA を作る。この直線と円 C とのもうひとつの交点を B とすると、点 A と点 B とは反転の関係にある。

5 円に関する反転では、角の大きさは変わらない。ただし、角の向きは逆になる。

7 複比は変わらない。従って、複比をもとにして定義されたリーマン距離に関しては反転は等長変換である。

3　提案したいこと

平面の敷き詰めを題材にした展開試案を提案する。この提案は、４項で触れる実験授業での結果も踏まえ、中学３年での選択学習を想定して行う。このこともあって、一部、中学生向け学習ノート用の表現も用いることをお許しいただきたい。

ここでの最終目標は、冒頭にも述べたように、相似の考えに翻訳した円に関する反転の導入である。大半は相似に関する考えで指導できるが、一部、「円の接線は接点においてその直径と直交する」も使う。なお、この接線に関する部分を割愛した展開も可能である。

学習課題１　面を敷き詰める形を見つけよう

壁模様とか道路の敷石模様には合同図形が使われて例が多い。平面を埋め尽くす形にはこうした合同図形に限らず、エッシャーの描く絵にあるように、合同でも相似でもないけど、同じ形で埋め尽くすこともできる。曲線で囲まれた場合も含めて、どんな形なら同じ形で平面を埋め尽くすことができるのか、これから考えて行こう。

（1）合同な図形で埋め尽くす場合

３角形や４角形では、点対称移動を連続的に行うことで、与えられた基本となる図形と合同な形で面を埋め尽くすことができる。この理由をいくつかの側面から考察する。

第一の視点… それぞれの図形に関する内角和を調べる。

第二の視点… 合同な平行四辺形は平行移動で重ねることができる

点対称移動を連続２回行うと平行移動になる

三角形や四角形ではそれと合同な形を２枚ないし４枚組み合わせることで、これは運動としてみると点対称移動であるが、平行四辺形が構成される

さて、平行四辺形は対角線を引くことにより再び合同な三角形から構成された図形とみなすことができる。そして、これら対角線群や平行線群を使うことで、合同な五角形の敷き詰め模様や合同な六角形の敷き詰め模様を作れることを見る。

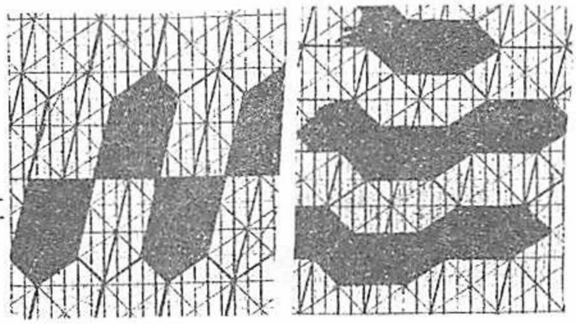


図2

さらに、正多角形で、敷き詰め可能な図形は3，4，5の3種類であることを調べる。その後、これらのそれぞれに線を入れることで合同な形に細分しそれを再構成することで、図3のような合同な5角形による敷き詰め模様ができることを見る。

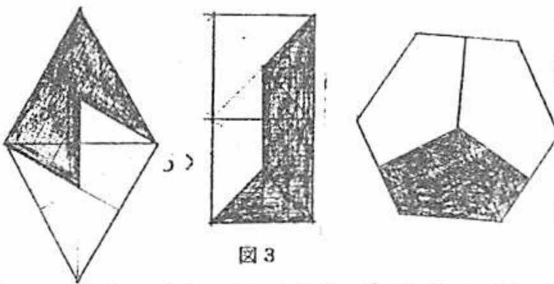


図3

ここで作られた合同な5角形の敷き詰め模様では点対称移動や回転移動が巧みに使われていることに注意させたい。

問題1　7角形や8角形の合同な敷き詰め模様は考えることができるだろうか。調べてみよう。さらに、どんな辺の数の多角形についてもそれと合同な形で敷き詰めが可能であろうか。それも調べてみよう。

（2）相似な形で敷き詰めは可能か

ある三角形と相似な形を次々につくる。これらの相似図形を使って、面を敷き詰めることが可能であろうか。図4のように、三角形を配列すると、それは不可能のように見えるが…。

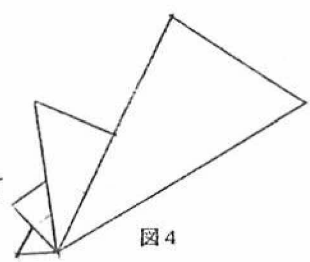


図4

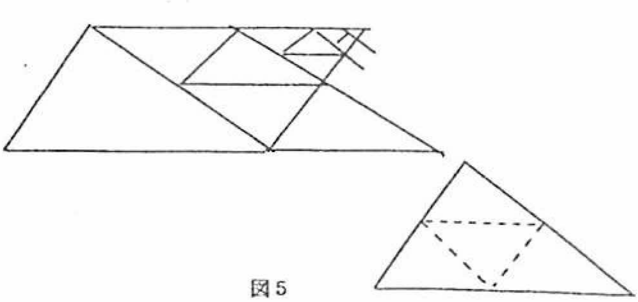


図5

図5のように、基本となる形は相似であるが、その縮小されたものと合同である形を何枚も配列してよい、とすると、相似な形で平面を埋め尽くすことができる。

これは、三角形が平行線で相似な形に細分できること、そして合同な三角形で平

面が敷き詰めが可能である、がその理由である。

学習課題２　相似の考えを発展させる

(1)基礎となる考え

裏返しの相似の図形を作る、という考えを使って、もっと変わった敷き詰め図形を調べることにしよう。

性質１　△ABCの辺AB上に点Dを、また点EをAC上に、

$$AB \cdot AD = AC \cdot AE$$

であるように定めると、△ABCと△ADEとは相似である。

問題２　点ＯとＯを通らない直線 l を定める。点Ｏから直線 l に垂線を引き、l との交点をＡとする。

半直線OA上に点Ｂを

OA·OBの積が10とか20と一定の値である

ように定める。さて、l 上に点Ｐを定め、さらに、半直線OP上に点Ｑを

$$OP \cdot OQ = OA \cdot OB = 一定$$

になるように、その作図法に注意して、定めてみよう

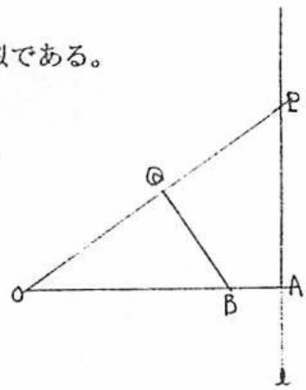


図６

性質２　点ＯとＯを通らない直線 l とを定める。l 上に点Ｐを定め、

$$OP \cdot OQ = 一定$$

である点Ｑを半直線OP上に定める。点Ｐを l 上を自由に移動させると、点Ｑも場所を次々に変えて、点Ｏを通る円を作る

問題３　性質２を実際に確かめ、その後それを証明せよ。また、この円の直径や中心を手早く定める方法を述べよ。

定義　平面上に点Ｏと点Ｐとを定める。点Ｐに対して、 OP·OQ＝一定になるよう半直線OP上に定めた点Ｑのことを「点ＰをＯに関して反転した点」という。

この変換で点Ｐが直線上を移動するときの動きと、それを点Ｏに関して反転させてできた点Ｑの移動の仕方とをいろいろの場合について比べてみよう。

どの場合も、点Ｑの移動の仕方は点Ｐのそれとは逆であることが見出されよう。反転という名の由来はここにある。

性質３　点Ｏをその円周が通る円を一つ定める。この円を点Ｏについて反転すると点Ｏを通らない直線に変換される。

問題４　その円周が点Ｏを通る円を、点Ｏに関して反転させてできる直線を手早く作図する方法を見出そう。

反転では、点 O を通らない直線と点 O を通る円とは互いに変換しあうことできる仲間の図形となっている。これに関するいくつかの練習問題に挑戦しよう。

問題5　点 O といずれも O を通らない2つの直線 l、mとを定める。この2直線を下のそれぞれの場合について、点Oに関して反転してできる図形を描け。

①この2直線が平行のとき　②この2直線が点 A で交わるとき

問題6　点 O とそのどの辺も O を通らない長方形 ABCD を定める。この長方形を点Oに関して反転させたときできる図形を描いてみよう。

問題7　点Oとそのどの辺もOを通らない平行四辺形 ABCD を定める。

この平行四辺形を点 O に関して反転させたときできる図形を描いてみよう。

問題8　問題5～7で、反転してできた円の交点でそれぞれの円に接線を引き、それら接線の作る角の大きさと反転する前に直線が作っていた角の大きさの間の関係を予想してみよう。そして、その予想が正しいことの証明を次の性質4を確かめた後に行ってみよう。

性質4　直線 l を点Oに関して反転させてできた円をCとする。点Oから直線 l に対し垂線を引き、l との交点を A とし、点 A が反転されてできた円 C 上の点をBとする。点Bにおいて引いた円Cの接戦は直線 l と平行である。

問題8から、

いずれの直線も点 O を通らず、直角に交わっている2つの直線を点 O に関して反転させる。反転されてできた、2つの円の交点において引いたそれぞれの円の接線と接線とも直角に交わる

こともわかる。

(2)曲線でできた、しかも同じ形をした形で面を敷き詰める

合同な平行四辺形を点Oに関して反転させてできる図形を描いてみよう。
さらに、円を横に並べた図形も点 O に関して反転させてできた図形を描いてみよう。

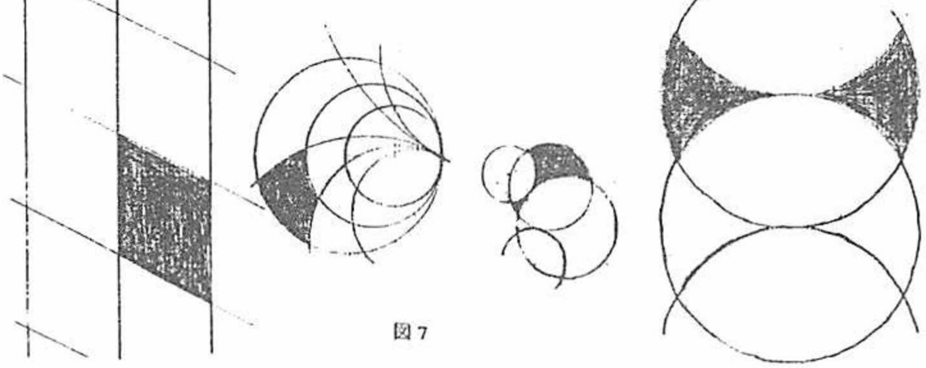


図7

円と直線でできた図形も点Oに関して反転させて見よう。

このように、与えられた図形を点Oに関し反転させることで平面を埋め尽くす曲線図形ができる。

問題9　自分の面の敷き詰め模様を製作してみよう

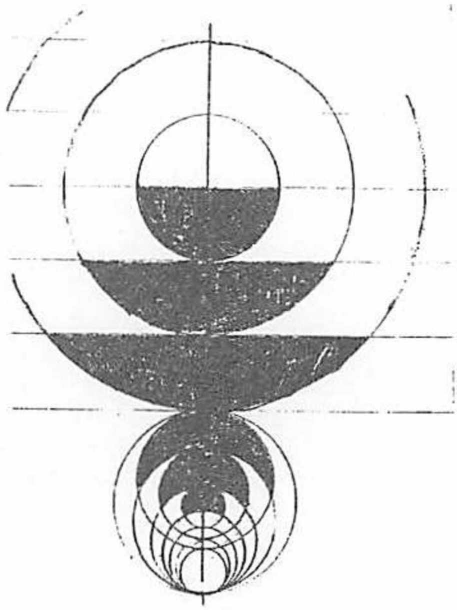


図8

4　授業実践の概要

反転円に関する実験授業を1996年10月、山形大学附属中学校の3年生の選択授業での一テーマとして、同校の田中克先生に扱っていただいた。

以下で報告するこの授業実践の概要は、3項で提案した試案に基づいて行った授業のものではない。この授業は、反転の用語もまた反転円も用いず、作図器と生徒には紹介した、反転器を中心に展開した。なお、この実験授業での最終目標は様々な平面図形の反転図形の作図においた。

ところで、反転器はかなり正確に作ったつもりであったが、自作ということもあって、正確に反転図形を作図する能力には残念ながら欠けた。このため、二時間目の授業で混乱が生じた。このことを中心に以下報告する。

この授業で用いた反転器の製作をはじめその授業記録やその整理などで、当時山形大学学生であった、飯野明史、島貫祐樹の両君にお世話になった。心からこれら各氏に感謝いたしたい。

この指導は全3時間で行われた。各時間毎の学習テーマを簡潔に報告する。

第1時　反転器を用いての様々な図形の変換。特に、直線が円に変換されることの発見。この発見のため、パソコンも用いた。

第2時　反転器の仕組みを調べからこの変換の式表示へ。さらに、直線が円に反転されることの証明。

第3時　長方形による平面敷き詰め模様を反転させてできる図形の作図を始め、各種図形の反転図形の作図を行う

この実験授業に参加した生徒は 10 名である。授業中の生徒の様子を紹介する。

〈1時間目〉

反転器の使用に始めはとまどっていたが次第になれ、反転器によって直線が円に反転されることの予測をほとんどの生徒ができた。その後、コンピュータの画面にこの変換の様子を表示し、この予測の正しいことを確かめた。

この授業中、大半の生徒が、反転器により、合同変換や相似変換と異なって、原図と全く異なった図形が描き出せることに大変な興味を示した。次のような生徒もいた。

○反転器によってできた円をさらに反転させ、直線に戻すことを試みた。

○反転器の仕組み、即ち、反転器の固定点としての点 O と、与えられた図形上を移動する点 P とそれを反転させてできた点 Q とが一直線上にあることを見つけ出す。

〈2時間目〉

1時間目に扱った作図例から、3点 O、P、Q が一直線上にあり、OP･OQ＝一定、という関係にあることを見出させようとした。しかし、この関係式を見出すには反転器の性能が十分ではなく、生徒達は関係式発見のために何回も試行錯誤を繰り返した。このため、この関係式を見出すために思わぬ時間を要した。このため、この時間の主課題である、命題「直線が円に反転される」の証明に十分時間を割くことができなかった。このこともあって、「直線が円に変換」の証明は、授業後行った調査でもはっきり示されるが、生徒には抵抗感が強かった。この原因として、思考時間の不足の他、いくつかあげることができる。

(1) OP･OQ ＝ OA･OB ＝一定、と積の形式で与えられた関係式を OP:OA ＝ OQ:OB の比例式に直すことは、事前調査（参考資料として後に述べる）の結果にも見るように、難しかった。さらに、この比例式に気づいても、この関係を満たす相似な2つの三角形は裏返しであることもこの証明を行うときの障害となる。

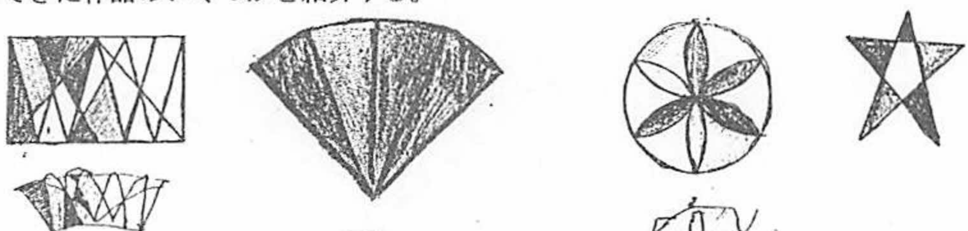
(2) 反転円の中心を通らない直線が円に変換されることは簡単に理解された。しかし、反転されてできた円が反転円の中心を通る、が、「直線が円に変換」の証明を行うときのポイントになることへの理解が十分ではなかった。

(3) そこに、円の決定条件としては、やもうを得ないとはいえ、「中心と半径」の意識が強く、中学3年で学習した「直径とその上に立つ円周角が直角」を円の決定条件として十分に使いこなすまでになっていないことが重なった。即ち、反転円の中心から反転対象としての直線に垂線を下ろし、その足を反転して得た点が直線を反転させてできた円の直径の端点であることが証明のポイント、は彼らに直ぐに理解のできる論理とはならなかった。

〈3時間目〉

この時間の冒頭において、直線を反転してできる円の作図法を工夫させた。前時に行った「直線が円に変換」の証明への理解は高くはないが、方法としての作図法は多くの生徒が見いだせた。

授業では、この作図能力を生かす形で、平面に敷き詰められた長方形群を反転させてできる敷き詰め模様を作図させた。その後、敷き詰めとは離れたが、自分で基本となる図形を定め、それを反転器を用いて反転された図形を作図させた。そうしてできた作品のいくつかを紹介する。



参考文献と参考資料

円の反転の教材化に関連して

Coxeter.H.S.M "Inversive Geometry",*Educational Studies in Mathematics Educations Reidel Pub.*,vol.3.pp.310-321,1970

V.L.Hansen "The dawn of non-Euclidean Geometry",*International Journal of Mathematical Education in science and Technology,Taylor & Francis*,vol.28.no.1,pp.3-23,1997

Saul Stahl "The Poincare Hail-Plane",Jones and Bartlett Publishers,1993

反転器について

聖文社編集部編「曲線・グラフ総覧」、聖文社、1971,p.37

実験授業報告として

飯野明史「中学校３学年『反転のアイデアを利用した授業実践』」,1996 年度山形大学教育学部卒業論文

事前調査から ――――――――――

問題　　△ ABC の辺 BA 上に点 D を、また点 E を辺 BC 上に、BA･BD ＝ BC･BE であるように定めると、△ ABC と△ EBD とが相似であることを証明しなさい。

という問いに対し、証明ができた生徒は３名(被験者は９名)と 1/3 の正答率にとどまった。大半の生徒が、調査にあたって事前に行った予測通り、関係式 BA･BD ＝ BC･BE を比例式や分数表現に変形できないことが主な理由になって、対応辺の比が等しいことを導くことができず、問いに答えられなかった。

また、仮に比例式に変形できても、相似図形が裏返されており、このこともこの証明に取り組むときの障害になったであろう。

円の接線が円の直径に対して垂直であること

円と直線の位置関係は、その共有点の数によって３つの場合に分けられることをまずみる。そして、交わる２円はその中心を結ぶ直線に対して線対称であるので、交わる２円の交点を結ぶ直線は、その２円の中心を結ぶ直線と垂直に交わることに注意する。ここで、この交わる２円の一方を固定し、もう一方の円をその２円の中心を結ぶ直線にそって移動させる。すると、２円の交点を結ぶ直線もその２円の中心を結ぶ直線といつも垂直関係を保ちながら、移動する。

さて、この２円が接する位置まで移動したとき、その 2 円の交点を結んでいた直線はどうなると考えるのが合理的であろうか、という問いかけから、円の接線はその接点において、円の直径と垂直になることを導く。

Tiling a Plane by Various Figurs

MORIKAWA Ikutaro (Faculty of Education Yamagata University)

We can fill a plane by tiling congruent triangles or quadrilaterals on a plane. Especially, parallelograms fill a plane by translating them. And then, we can construct parallelogram by combining two triangles or four quadrilaterals. It is the main reason being able to fill the plane by using congrunent triangles or quadrilaterals.

We divide parallelograms by its diagonals and construct 5-gons by combining these fractions. We may find a plane filled by congruent the 5-gons. In next, we find a plane filled by only three regular polygons; equilateral triangle, square, and regular hexagon We can find new kinds of 5-polygons which are made from dividing these regular polygons by adding few segments.

We have some problems

Can we fill a plane by tiling any congruent polygon like as congruent 5-gon?

Can we tile a plane by any similar figures?

We treat an idea of inversion as a kind of similar to find anothe tiling figures to a plane. So we introduce the idea by focusing a equation $OP \cdot OQ = OA \cdot OB$ (=const.),only. We exclude an inversion circle. In this paper, we introduce some fundamental properties about it such line transforming to a circle which passing through a center of an inversion or conserving mesures of corresponded angles. Especialy, we require pupils to find the method to transform a line to a circle related to this transformation. At last, we demand pupils to draw tiling figures about inversion by using method to draw a circle which are transformed by line.