

論文

T型分岐流路における衝突噴流の線形安定性

足立 高弘*

Linear Stability of Impinging Jet in a Symmetric T-shape Channel

Takahiro ADACHI*

Abstract

We have conducted the linear stability analysis of impinging jet flow in a symmetric T-shape channel by using the spectral element method. The flow field is assumed to be two-dimensional and incompressible. The flow is in a steady-state and symmetric with the centerline of the channel at a relatively small Reynolds number, whereas an asymmetric flow occurs at a critical Reynolds number due to instability. In order to evaluate the critical Reynolds number, the linear stability theory is applied to the complex laminar flow with a stagnation point in the T-shape channel by constituting the generalized eigenvalue problem of matrix form. The critical Reynolds number can be determined by the sign of a linear growth rate of the eigenvalues. It is found that the steady symmetric flow bifurcates to the asymmetric steady one as a result of Pitchfork bifurcation.

1. はじめに

衝突噴流は、局所的な伝熱促進・物質伝達促進を比較的簡便に行う事が出来る方法として実用的に広く応用されている⁽¹⁾。本研究では衝突噴流の一例として、Fig. 1に示すような一つの入口(AH)から流体が流入し、二つの出口(CDとEF)から流出する対称なT型分岐流路を考える。流れはノズルやスリットなどから構成される導入部(AGBH)を通して噴流として空間に噴出し、流れ前方の壁面(DE)に衝突する。このとき、壁面のよどみ点近傍で高い伝熱および物質伝達特性を有するため、衝突噴流は電子機器の冷却、物体表面の汚れや水分の除去・乾燥などの工業上広い分野で用いられている。したがって、その流動特性を明らかにすることは各種関係機器の性能を向上させる上で重要である。

一般に、対称な流路を流れる流れは、レイノルズ数が小さいときは流路中心軸に関して対称な定常流

となる。そのために、数値解析においては対称な流路を流れる流れは対称性を持つと仮定して多くの研究が行われている。例えば、一宮ら⁽²⁾は、T型分岐流路における衝突噴流について流路の半分のみを計算領域として解析を行っている。

しかし、レイノルズ数が大きくなると、対称な流れは不安定になり流れの非線形性のためにより複雑な流れへと遷移していく⁽³⁾。この流れの対称性が破れる限界のレイノルズ数を臨界レイノルズ数と呼ぶ。例えば、平行平板間流路に対称な拡大部を持つ急拡大流路流れや急拡大・急縮小流路流れの場合には、低いレイノルズ数では対称な定常流であり、比較的高いレイノルズ数では非対称な定常流になることが実験および数値解析により数多く報告されている⁽⁴⁾⁻⁽¹⁰⁾。その他にも、最近 Mizushima and Yoshimatsu⁽¹¹⁾はT型分岐流を二つ合わせた平行二円板間を中心から放射状に流れる流れの解の分岐を数値計算と可視化実験により調べ、高いレイノルズ数では流れが非対称になることを示している。

このように、流路の形状が対称的であっても、流路内の流れは必ずしも対称であるとは限らない。このことは、対称流路における衝突噴流の計算におい

* 2004年7月20日受理

秋田大学工学資源学部機械工学科, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering and Resource Science, Akita University.

て、レイノルズ数が小さいときには対称性を課して解析を行うことが出来るが、レイノルズ数が大きくなると対称性の仮定が妥当でなくなり、計算で求めた流れと実際の流れとが一致しなくなることを示唆している。衝突噴流においては、伝熱・物質移動の促進のみならず、ある領域を均一に加熱・冷却あるいは乾燥させるなどの一様性が求められる場合が多い。したがって、流れの対称性が破れて流れが非対称流に遷移する臨界レイノルズ数を明らかにすることは重要である。しかしながら、本研究で扱う T 型分岐流路における流れの遷移について、レイノルズ数の増加と流れの対称性の破れおよびその臨界レイノルズ数に関する詳細は今のところ明らかではない。

そこで、本研究では Fig. 1 に示す対称な T 型分岐流路における流れについて、対称な定常流が不安定になり非対称流に遷移する臨界レイノルズ数を明らかにする。ここでは、温度場や濃度場は扱わずに流れ場のみを扱うこととする。線形安定性理論を用いた固有値解析を行うことで臨界レイノルズ数を求める。計算手法としては高精度な数値解法であるスペクトル・エレメント法を用いる。また、スペクトル・エレメント法と線形安定性理論を用いた固有値解析の計算手法についての解説を行うことも本研究の目的の一つである。

記号の説明

D : 流路深さ

h^* : 流路導入部幅の半値, 代表寸法

h_m : ガウス・ルジャンドル・ロバット点を通るラグランジュ多項式

h'_m : ガウス・ルジャンドル点を通るラグランジュ多項式

L : 流路長さ

L_0 : 流路導入部長さ

N : 展開の打ち切りパラメータ

p : 圧力

Re : レイノルズ数, $Re = U_0^* h^* / \nu^*$

t : 時間

$\mathbf{u} = (u, v)$: 速度ベクトルとその成分

$\mathbf{x} = (x, y)$: 座標ベクトルとその成分

ν^* : 流体の動粘性係数

ρ^* : 流体の密度

λ : 複素線形増幅率

添え字

c : 臨界値

$*$: 有次元量

2. 問題の定式化

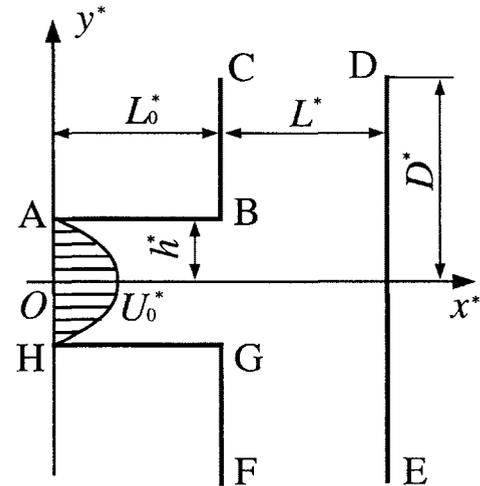


Fig. 1 Geometry and co-ordinate.

Fig. 1 に本研究で取り扱う T 型分岐流路と座標系を示す。図に示すように、流路は 2 次元的であり、幅 $2h^*$ の平行平板からなる導入部 ABGH とそれに垂直な衝突壁流路 BCDEFG とから構成される。座標系は流路中心軸に沿って x^* 軸をとり、流路入口で x^* 軸に垂直に y^* をとる。

この流路形状を規定する無次元パラメータとして、流路の導入部長さ L_0 、流路長さ L および流路深さ D を導入部の流路半値幅 h^* を代表長さとして次式で定義する。

$$L_0 = \frac{L_0^*}{h^*}, \quad L = \frac{L^*}{h^*}, \quad D = \frac{D^*}{h^*}. \quad (1)$$

ここで、アスタリスク * の付いた物理量は次元を有することを意味する。以下では、 $L_0 = 5$, $L = 10$, $D = 100$ とする。

2.1 基礎方程式と境界条件

流路内の流れは 2 次元非圧縮粘性流とする。代表速度として導入部入口の最大流速 U_0 を用いて次式のように物理量の無次元化を行う。

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}^*}{h^*}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}^*}{U_0^*}, \quad t = \frac{t^*}{(h^*/U_0^*)}, \quad p = \frac{p^*}{(\rho^* U_0^{*2})}. \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{u} = (u, v)$ であり、 ρ^* は流体の密度である。ここでも、アスタリスク * の付いた物理量は次元を

有することを意味する。上記の無次元変数を用いると、基礎方程式となる連続の式とナビエ・ストークス方程式は次式ようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (4)$$

ここで、 Re はレイノルズ数であり次式のように定義される。

$$Re = \frac{U_0^* h^*}{\nu^*}. \quad (5)$$

境界条件は流路壁面で滑りなし条件、流路入口で十分発達したポアズイユ流れおよび出口で自由流出条件とする。すなわち、

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{at} \quad \text{ABC, DE, FGH}, \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = (1 - y^2, 0) \quad \text{at} \quad \text{AH}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0, \quad \text{at} \quad \text{CD, EF} \quad (8)$$

となる。

2.2 非線形定常方程式

一般に、レイノルズ数が十分小さいとき、対称な流路内の流れはどのような初期条件から出発しても十分に時間が経過すれば対称な定常流となる。この対称な定常解を (U, P) とする。この定常解を式 (3), (4) に代入すれば、 $\partial/\partial t \sim 0$ となり、定常解に対する基礎式は次式の非線形定常方程式となる。

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (9)$$

$$(\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{U}. \quad (10)$$

境界条件は式 (6)~(8) と同じで、流路壁面で滑りなし条件、流路入口で十分発達したポアズイユ流れおよび出口で自由流出条件とし、次式で与えられる。

$$U = 0 \quad \text{at} \quad \text{ABC, DE, FGH}, \quad (11)$$

$$U = (1 - y^2, 0) \quad \text{at} \quad \text{AH}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \text{at} \quad \text{CD, EF}. \quad (13)$$

2.3 線形安定性解析と線形攪乱方程式

レイノルズ数が大きくなると、式 (9), (10) を解いて得られる対称な非線形定常解は不安定になり非対称な定常流あるいは振動流（非定常流）へと遷移する。ただし、その場合にも不安定となった対称な非

線形定常解は式 (9), (10) の解として存在する。例えば、流路の中心線に関する速度場の対称性

$$U(x, -y) = U(x, y), \quad V(x, -y) = -V(x, y) \quad (14)$$

を考慮することにより、中心線において次式の対称条件

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad V = 0 \quad (15)$$

を課せば対称な解を容易に得ることができる。

さて、対称な定常解が不安定となり非対称な流れに遷移する臨界レイノルズ数を求めるために、ここでは線形安定性理論を導入する。ある時刻 $t = 0$ において、対称な定常解に微小な攪乱 $\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}$ を加える。その後の時刻 t における攪乱の振る舞いを調べるために速度場および圧力場を定常解と攪乱の和として次式のように表す。

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \hat{\mathbf{u}}, \quad p = P + \hat{p}. \quad (16)$$

式 (16) が時刻 t において基礎方程式 (3), (4) に従うことから、式 (16) をこれらの方程式に代入し、定常解の満たす式を考慮し、攪乱について2次以上の項を省略すると次式の線形攪乱方程式が得られる。

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla \hat{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \hat{\mathbf{u}}. \quad (18)$$

式 (17), (18) を適当な境界条件と初期条件のもとに解いて $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p})$ が求められたとき、 $t \rightarrow \infty$ で $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}) \rightarrow 0$ ならば定常解は安定であり、 $(\hat{\mathbf{u}}, \hat{p}) \neq 0$ ならば定常解は不安定であると判定する。

さらに、方程式 (17), (18) の線形性から攪乱の時間依存性を

$$\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}} \exp(\lambda t), \quad \hat{p} = \tilde{p} \exp(\lambda t) \quad (19)$$

と仮定し、式 (19) を式 (17), (18) に代入すると次式が得られる。

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad (20)$$

$$\lambda \tilde{\mathbf{u}} = -(\mathbf{U} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} - (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \tilde{\mathbf{u}}. \quad (21)$$

ここで、 λ は複素線形増幅率と呼ばれ、一般には複素数である。式 (20), (21) は、複素線形増幅率 λ を固有値とし、攪乱 $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ をその固有関数とする固有値問題として解くことができる。

定常解の安定性は、 λ の符号によって決定される。 λ の実部を $\text{Re}[\lambda]$ 、虚部を $\text{Im}[\lambda]$ とする。このとき、 $\text{Re}[\lambda] > 0$ なら攪乱は時間の経過とともに成長するので定常解は不安定であり、流れは定常解から離れていき別の解に分岐する。一方、 $\text{Re}[\lambda] < 0$ なら攪乱は時間の経過とともにゼロに減衰するので定常解は安定である。 $\text{Re}[\lambda] = 0$ なら攪乱は増幅も減衰もしないので中立安定であり、そのときのレイノルズ数を臨界レイノルズ数と呼ぶ。また、 $\text{Re}[\lambda] = \text{Im}[\lambda] = 0$ のときには定常解はピッチフォーク分岐、サドル・ノード分岐あるいはトランス・クリティカル分岐を生じ新たな分岐解は定常解になる。一方、 $\text{Re}[\lambda] = 0$ のとき $\text{Im}[\lambda] \neq 0$ ならば、振動数 $f = \text{Im}[\lambda]/2\pi$ を持ったホップ分岐を生じ、新たな解は振動解になる。

境界条件については、式 (16) が式 (6)~(8) を満たすことと、定常解がすでに式 (11)~(13) を満たしていること考慮すると、攪乱の境界条件は次式となる。

$$\tilde{u} = 0 \quad \text{at} \quad \text{ABC, DE, FGH, AH}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = 0, \quad \text{at} \quad \text{CD, EF}. \quad (23)$$

3. 計算方法

数値計算は、スペクトル・エレメント法を用いて行う (12),(13)。スペクトル・エレメント法は、スペクトル法の高い精度と有限要素法の柔軟な領域分割特性や境界条件の取り扱い易さとを併せ持つ計算法である。スペクトル法も有限要素法も、どちらも重み付き残差法の一つとして捕らえることができる。スペクトル法とは、関数展開法とも呼ばれ、解きたい微分方程式の解を性質のよく分かった高次の関数で展開してその展開の係数を求めることによって解を得ようとする方法である。スペクトル法は少ない展開数で高精度な結果を得ることができる計算方法である。ただし、幾何形状が複雑な領域では用いるのが難しい。一方、有限要素法は展開関数として低次 (1次か2次) の関数を用い、計算領域を小さな領域に分けて計算を行なう方法で、幾何形状が複雑な領域でも計算できる。しかし、計算の精度は一般に低い。

スペクトル・エレメント法は、スペクトル法の高い精度と有限要素法の柔軟な領域分割特性や境界条件の取り扱い易さとを併せ持つ計算法であるので、複雑な境界を持つ問題を高精度に取り扱う場合に最も威力を発揮する方法である。例えば、平行平板に周期的な矩形凹凸を設けた流路内の流れなどを高精度

に計算する場合に威力を発揮する (14)。ここでは、高い精度と境界条件の取り扱い易さの点からスペクトル・エレメント法を用いる。

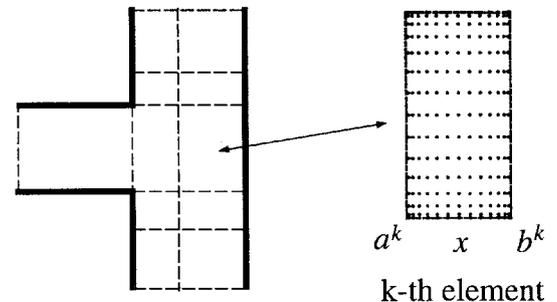


Fig. 2 Spectral elements and distribution of Gauss points.

スペクトル・エレメント法では、Fig. 2 に示すように計算領域をいくつかの矩形要素に分割する。本研究では、図に点線で示すように 11 個の矩形領域に分割する。そして、各々の要素を座標変換によって $[-1,1]$ を定義域とする局所計算座標系に変換する。例えば、Fig. 2 右に示すように第 k 番目の要素が x 方向の長さ $L^k (= b^k - a^k)$ で、区間 $[a^k, b^k]$ とすると、局所計算座標系 \bar{x} への座標変換式は次式となる。

$$\bar{x} = \frac{2}{L^k} (x - a^k) - 1. \quad (24)$$

(y 方向についても同様に座標変換を行う。)

第 k 要素の内部で、速度および圧力を次式のように多項式で近似する。

$$u^k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_{m=0}^N \sum_{n=0}^N u_{mnn}^k h_m(\bar{x}) h_n(\bar{y}), \quad (25)$$

$$p^k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{N-2} \sum_{n=0}^{N-2} p_{mnn}^k h'_m(\bar{x}) h'_n(\bar{y}), \quad (26)$$

$$(k = 1, \dots, 11).$$

ここで、 h_n は $(N+1)$ 個のガウス・ルジャンドル・ロバット点の内で N 個の点を通る N 次の多項式であり、 h'_n は $(N-1)$ 個のガウス・ルジャンドル点の内で $(N-2)$ 個の点を通る $(N-2)$ 次の多項式である。すなわち、 $(P+1)$ 個のゼロ点 $x_q (q = 0, \dots, P)$ の中で、 x_p で 1、それ以外の点 $x_q (p \neq q)$ でゼロとなる

第 P 次のラグランジュ多項式を $h_p(x)$ とすると

$$h_p(x) = \prod_{(q=0, q \neq p)}^P \frac{(x - x_q)}{(x_p - x_q)} \quad (27)$$

となる。また、定義より

$$h_p(x_q) = \delta_{pq} \quad (28)$$

が成り立つ。ここで、 δ_{pq} はクロネッカーのデルタである。なお、ガウス・ルジャンドル点とはルジャンドル多項式のゼロ点であり、ガウス・ルジャンドル・ロバット点とはガウス・ルジャンドル点に端点 ± 1 を加えた点のことを言う。

展開式 (25) および (26) を式 (9), (10) に代入して弱形式を作りガレルキン法を用いると、展開係数である節点値ベクトル (U_{mn}^k, P_{mn}^k) に関する第 k 番目の要素における代数方程式が得られる。それらを $k = 1, \dots, 11$ まで加えあわせれば全体の代数方程式が得られる。この代数方程式をニュートン・ラフソン法を用いて解くことにより非線形定常解が得られる。ガレルキン法における数値積分の際には、展開関数に応じてガウス・ルジャンドル積分あるいはガウス・ロバット・ルジャンドル積分を用いる。

さらに、展開式 (25) および (26) を式 (20), (21) に代入して弱形式を作りガレルキン法を用いると、展開係数である節点値ベクトル $(\tilde{u}_{mn}^k, \tilde{p}_{mn}^k)$ に関する第 k 番目の要素における代数方程式が得られる。それらを $k = 1, \dots, 11$ まで加えあわせれば全体の代数方程式が行列の形で

$$\lambda Aa = Ba \quad (29)$$

のように得られる。式 (29) を λ を固有値とする行列の固有値問題として QR 法により数値的に解くことにより、固有値 λ とその固有ベクトル $(\tilde{u}_{mn}^k, \tilde{p}_{mn}^k)$ を求める。

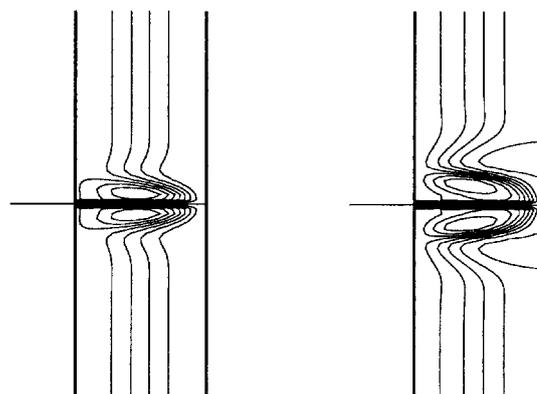
4. 結果

T型分岐流路における流れの遷移の一例として、本研究では流路形状パラメータ $L_0 = 5$, $L = 10$, $D = 100$ を取り上げる。また、展開式 (25) および (26) における展開の打ち切りパラメータを $N = 16$ とした場合の結果を以下に示す。

4.1 非線形定常解

一般に、レイノルズ数が十分に小さいとき、対称な流路を流れる流れはどのような初期条件を与えて

も十分時間が経過すると対称な定常流となる。Fig. 3(a) に、初期条件として $(U, P) = (0, 0)$ として計算を行った場合の $Re = 20$ における定常解の流線を示す。導入部幅に比べて流路深さ D が大きいので導入部の内部の様子はほとんどわからないが、流れは流路の中心軸に関して対称となっている。導入部を出た流れは、衝突平板の影響を受けない自由噴流領域から衝突噴流領域を通過し壁に衝突した後、壁面噴流領域に至り、平板に沿って流れる。Fig. 3(b) に同様にして求めた $Re = 50$ の場合の流線を示す。中心線を挟んで形成されるはく離渦が成長している。また、壁面噴流領域では壁面からののはく離が生じていることがわかる。この場合にも流れは流路の中心軸に関して対称である。



(a) $Re = 20$

(b) $Re = 50$

Fig. 3 Streamlines of the steady symmetric solutions.

次に、初期条件として非対称な条件を用いて計算を行った場合の結果を示す。まず、T型流路の長さ L を中心軸に関して非対称に設定し予備計算を行う。この場合にも初期条件は $(U, P) = (0, 0)$ とする。そのとき得られる解は非対称な解であり、その解を初期条件として対称なT型流路に対して定常解を求める。Fig. 4 は、そのようにして求められた $Re = 50$ の場合の定常解の流線である。流路は対称であるにもかかわらず、流れは中心軸に関して若干非対称となっていることがわかる。このとき、中心軸に関して上側と下側とでは流量が異なっている。一方、 $Re = 20$ に対して、このような方法を用いても非対称な解は得られない。したがって、対称な定常流から非対称

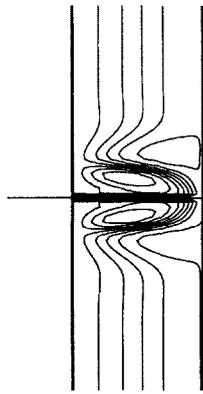


Fig. 4 Streamline of the steady asymmetric solution ($Re = 50$).

な定常流に分岐する臨界レイノルズ数は $Re = 20$ と 50 の間に存在すると考えられる。

4.2 線形安定性

前節で得られた対称な定常解の線形安定性を調べる。方程式 (20), (21) を境界条件 (22), (23) のもとで解くことにより固有値 λ と固有関数が得られる。複素線形増幅率 λ とその固有関数は無限個存在し、それぞれの固有値と固有関数に対応する攪乱を攪乱のモードと呼ぶ。この中で、複素線形増幅率の実部 $Re[\lambda]$ が最も大きなモードを最大増幅モードと呼ぶ⁽³⁾。この最大増幅モードの実部の符号が負から正へと入れ替わると攪乱が増幅することになり定常解は不安定と判定される。

Fig. 5 に、固有値計算を行って得られた最大増幅モードの固有値の実部とレイノルズ数との関係を示す。図に見られるように、線形増幅率は $Re_c \sim 32.3$ を境に正負の符号が入れ替わっている。すなわち、 $Re < 32.3$ では対称な定常流が安定に存在する。一方、 $Re > 32.3$ では対称な定常流は不安定である。この場合、臨界点において複素線形増幅率の虚部 $Im[\lambda]=0$ となっている。定常解が式 (14) で表される流路の中心線に関する鏡面对称性を有しているため、臨界点で生じる分岐はピッチフォーク分岐によるものであり、分岐後の流れは非対称な定常流となる⁽³⁾。なお、臨界レイノルズの値は、打ち切りパラメータを $N = 17$ に変更しても $Re_c \sim 32.9$ となり、その相対誤差は 2% 以内に収まることを確認している。

最後に、臨界レイノルズ数 $Re_c \sim 32.3$ における

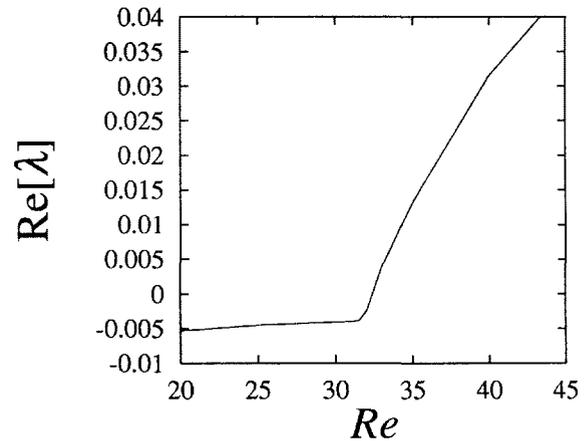


Fig. 5 The linear growth rate of the most unstable mode.

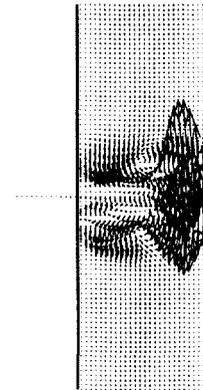


Fig. 6 Velocity fields of the most unstable mode.

攪乱の速度場を Fig. 6 に示す。このような速度場が攪乱となり、対称な定常流を不安定化させる。対称な定常流に、この攪乱の定数倍が追加された流れが、Fig. 4 に見られるような不安定性の結果見られる非対称な定常流になる。

5. まとめと今後の展望

対称な T 型分岐流路における流れについて、対称な定常流が不安定になり非対称流に遷移する臨界レイノルズ数をスペクトル・エレメント法と線形安定性理論を用いた固有値解析を行うことによって明らかにした。本研究では、T 型分岐流路の一例として $L_0 = 5, L = 10, D = 100$ の場合を取り上げ、臨界レイノルズ数 $Re_c \sim 32.3$ を得た。臨界点では、ピッチフォーク分岐が生じており、解は対称性を失い非対称な定常流に遷移することがわかった。

臨界レイノルズ数よりも大きなレイノルズ数においては、対称な定常流は不安定であり非対称な定常流が安定に存在するようになる。本研究では取り扱わなかったが、流れが非対称な場合には、温度や濃度などの輸送に関しても非対称性が生じる。このことは、衝突壁面において加熱・冷却ムラ等の工学的問題が生じることを意味する。今後は、温度や濃度の輸送を取り扱い、流路の形状を変えて（例えば、 $L \rightarrow \infty$ では流れは自由噴流に近づき、 $L \rightarrow 0$ では衝突噴流の効果が大きくなる）計算を行うことが課題である。また、今回は、流れは定常解および攪乱のどちらも2次元流と仮定した。今後は、3次元攪乱の計算を行う予定でいる。

参考文献

- (1) 社河内, 噴流工学, 森北出版 (2004).
- (2) 一宮・他2名, 熱工学講演会論文集, No. 01-9, (2001), 445-446.
- (3) 水島・藤村, 流れの安定性, 朝倉書店, (2003).
- (4) F. Durst, W. Cherdron, and J. H. Whitelaw, *J. Fluid Mech.*, **64**(1974), 111-128.
- (5) F. Durst, W. Cherdron, and J. H. Whitelaw, *J. Fluid Mech.*, **84**(1978), 13-31.
- (6) R. M. Fearn, T. Mullin, and K. A. Cliffe, *J. Fluid Mech.*, **211**(1990), 595-608.
- (7) 中西・他2名, 機論 (B), **61**-589(1995), 3182-3189.
- (8) J. Mizushima, H. Okamoto and H. Yamaguchi, *Phys. Fluids*, **8** (1996), pp. 2933-2942.
- (9) F. Battaglia, S. J. Tavener, A. K. Kulkarni and C. L. Merkle, *AIAA Journal*, **35** (1997), pp. 99-105.
- (10) D. Drikakis, *Phys. Fluids*, **9** (1997), pp. 76-87.
- (11) J. Mizushima and K. Yoshimatsu *J. Phys. Soc. Jpn.*, (2003), pp. 3028-3031.
- (12) A. T. Patera, *J. Comput. Phys.*, **54**, (1984), 468-488.
- (13) G. E. Karniadakis and S. J. Sherwin, *Spectral/hp Element Methods for CFD*, Oxford University Press, (1999).
- (14) T. Adachi and H. Uehara, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **41**, (2003), 601-613.