東北数学教育学会年報
1998. 3. 31 第29号

翻　訳

設計科学としての数学教育学

湊　三郎（秋田大学教育学部）
進藤　健悟，小山　光春，志鎌　正人，畠山　俊昭，N.Rungtiwa
（秋田大学大学院教育学研究科数学教育専修所属）

以下は Wittmann,E,Ch.(1995) による数学教育学の形成，およびそれと連動する数学科教員養成とを目指した論文 Mathematics Education as a 'Design Science',Educational Studies in Mathematics,29:355-374　の翻訳である。数学教育学をどう捉えるかには様々な立場があるにせよ，Wittmannの所説は如何なる立場の者にも参照されるべき程度に達していると我々は考え，訳出したものである。

概要

数学教育学は数学、心理学、教育学、その他の領域との密接な関連なしでは形成することができない。然しながら、他の十分に成熟した学問の基準、方法、研究内容を採用することは数学教育学の応用的性質を確立し難くするという危険性がある。数学教育学の特定の位置や他からの自立性を保つためには、設計科学として数学教育学を考える必要性があることをこの論文で示したい。

1988年ドイツ数学教育学者第22回年会に提出した一論文において、H．バウエルスフェルトは数学教育学形成の見通しと期待に関するある見解を示した。彼の意図は，学会員に今後何をするのか、何ができ、何をすべきかという批判的反省を引き起こさせることであった(Bauersfeld,1988)。70年代前半には、ヨーロッパのドイツ語圏において数学教育学の役割と性格とについての将来構想に関する議論が生き生きと語られたものであった(cf.,Krygowska,

1972, 他に*Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* の74/3 の特集号におけるBigalke, Griesel, Wittmann, Freudenthal, Otte, Dress and Tietz の諸論文)。それ以後バルシャイト(1983)、ビガルケ(1985)、ヴィンター(1986)の論文を除けば、大きな視野に立った形で考察されることはなかったのである。研究の基本的方向を再度明確にするには時間が経過し過ぎており、バウエルスフェルトの見解が現在においても適切であるとは言い得ない。

最近になって数学教育学の性格と役割についてのよりよい理解を得ようとする関心が再び大きくなり、例えば、1992年に着手されたICMI-Studyによる「数学教育学における研究とは何か、そしてその結果とは」(cf., Balacheff et al., 1992)に示されるように、かなりの国際的広がりをもつに至った。

以下の考察は数学教育学の現状の批判的分析と数学教育学の特性の捉え方の双方を意図している。バウエルスフェルトと同様、筆者は我々の専門職について発語思考のようなかたちで、全く個人的な立場から簡明にそれらを提示する。

1　数学教育学の核心部分とその関連領域

数学教育学の課題は、これを一般的に述べると、その前提、目標、社会的状況を含むすべての学校段階における数学の指導の探求と開発とである。他の教科の教育学と同様、数学教育学は他の学問領域の境界線をまたぐことが要求され、しかも数学、一般教育学、教授学、心理学、科学史等々を含む相当に広範な分野で得られる結果やその研究方法に依存する。ただし、数学の指導に関する科学的知見は、これらの諸分野で得られる結果を単に組み合わせることによって獲得できるのではなく、むしろ、数学の指導と学習に関する様々な見解を一体化し、総合的図式に統合し、その上でそれを構成的な方法で実践へと変換する一つの明確な教育学的方法を先立って仮定しておかなければならない。

この課題のもつ特殊性は、一方では数学教育学と関連する諸学問との截然とした関係と、もう一方では学校教育の観点から見た実践への近さと理論的遠さとの間の平衡関係を要求している。バウエルスフェルト(1988:p. 15) はこのことを数学教育学の二つの文化として述べている。諸学問分野の様々な見解をどう統合できるか、それと同時に理論と実践とにどう重きを置き両者間にある緊張関係をどう扱うかということは、予め解決されているものではない。このことが、数学教育学の観念が広く共有されるものとなるための困難さの理由である。

研究と開発とが核心部分において結合されており、かつ、実践の改善が数学教育学の進展に何らかの形で結びつくという二つの条件のもとでのみ、数

学教育学の課題の特殊性がはじめて見えてくるというのが私の見解である。
ここで言う核心部分とは、特に次のことがらを含む多様な成分から成り立つところである。
・数学的活動と数学的思考の分析
・局所的理論(例えば、数学化、問題解決、証明、計算技能等)の開発
・教材化の可能性のある数学的内容の探究
・一般目標に照らしての指導内容の吟味と妥当性の検討
・学習を拘束する条件と教授：学習過程の研究
・指導可能な指導単元、一まとまりの指導単元、カリキュラムの開発と評価
・指導計画、指導、観察、授業の分析に関する手法の開発
・数学教育史

核心部分における研究活動は研究者が実践的問題に対する関心と近接性とを有することを要求する。然し、ここで注意が必要である。核心部分が実践指向となると、直接的応用に焦点化しようとする狭い実用主義に導きやすくかえって非生産的になりやすい。関連領域とアイデアを交換し、核心部分にある他分野に源をもつことがらを組織的に探究することをすすめることにより、様々な関連領域と核心部分とを結びつけることで上記の危険を避けることができる。勿論、核心部分と関連領域とは重なり合っており、これらの間の境界を妙に規定することはかえって望ましくない。厳格な分離は必要ないのである。

関連領域は、全体に対して最適に機能することが必要であるが、数学教育学の特殊性は核心部分にあるのであるから、核心部分こそが中心的成分でなければならない。実際、核心部分における進展は、数学教育学の改善を計るための重要な目安となる。この状況は音楽、工学、医学と対比できる。例えば、音楽の作曲や演奏は音楽史、音楽批評、楽理よりも上位にある。工学の場合機械の製造や開発が力学、熱力学、新素材の開発研究の上位にある。医学では、患者の治療が医療社会学、医学史、細胞学に比べてより中心的な課題である。

然し、核心部分と関連領域とを区別することは関連領域が必要な理論を開発しなければならないのだから核心部分が実践的応用に限定されるということを意味しない。実際、指導計画と実践的研究とに関する理論や理論的枠組みを打ち立てることが、核心部分の研究における中心的な活動となる(cf., Freudenthal, 1987)。

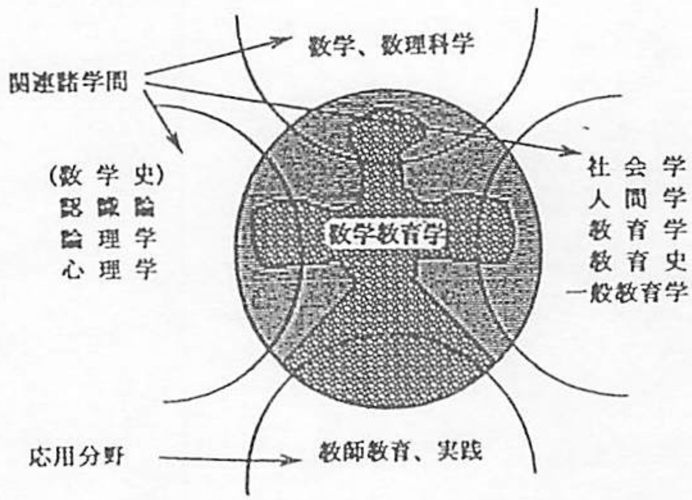
工学、医学、美術と同様に、核心部分と関連領域の立場の違いは、数学教育学における次のことによっても明らかになるだろう。

1　核心部分は様々な学問分野の学際的、統合的視点と構成的な開発を目

指しており、そこで数学教育学者の力量が極めて重要性をもつ部分である。関連領域はそれらの学問から多くを引き出すところである。したがって、数学教育学的な研究、開発は一般に核心部分の要求に応えるための特定の指向性をもつ。関連領域での理論的研究は核心部分と結合し、そこで特定の意味をもつ場合に限り、数学教育学的に意味のある研究となる。特に、例えば、バウエルスフェルトが挙げた研究問題は、核心部分から要求される十分具体的で生産的方法で取り扱うことができるものである。

2　実践に向けた教師教育は核心部分に基づいて行われなければならない。関連領域は実践的提案や応用をいっそう深く理解するために欠くことができない。然し、教師教育は核心部分と結合している場合に限って関連領域が重要性を発揮するものである。

核心部分が中心的位置にあることは数学教育学の応用的立場を専ら表明するものである。核心部分の強調は関連領域の重要性を軽んじるものではなくまた核心部分からの分離を表すものでもない。図1は、核心部分、関連領域それらの間の積極的な相互作用を示しており、数学教育学の全体像を表現しかつ数学教育学者が自己の関心のもとにある特定の学問分野とは別に誰もが共通にもつべき責務を表している。



図．数学教育学に関する核心部分 と関連領域

数学の本性を人間の根元的、本性的認識活動としての数学的活動としてみる。ここで数学とは、その典型が理学部数学科に所属する数学者の専門的研

究活動にみられる専門的数学の内容、方法をその多様性の一つとして含みはするが、内容、方法ともにより広範な社会的現象としての数学的なものを意味する。この広い意味をもち，活動として捉えられる数学的なものを大文字でMATHEMATICS(日本語では，数学的なもの）と記し，その一部分である専門的数学と区別する。数学的なものは，専門的数学の他，科学，工学，経済学計算機数学，統計学，産業，商業，工芸，美術，日常生活などの場でそれぞれの意味をもちながら慣用に従って使用され，必要に応じて開発されるものを含む。

専門的数学は数学的なものの基本的要素であって，数学的なものが表す広範な意味が成り立つためには数学者の専門的研究活動は欠かすことができない。然し，専門的数学が、広い意味での科学的、社会的な根元に関して、観念についても、これらとの間の相互交渉においても大きく依存していることもまた真である。専門的数学は数学的なものの基本的要素であることは確かであり、数学的活動という広範な意味づけは数学の専門的研究者の仕事なくしては成り立たない。然し、専門的数学はより広い科学的、社会的起源に由来する観念やそれとの間の相互交渉に多くを負っているということも等しく真である。専門的数学の排他的王国性は主張し難い。専門的数学ではない数学的なものに言及せずに、数学教育学に関係する適切な研究分野を構成することは不可能である。特に、指導単元、一連の指導単元のまとまり、さらに教育課程の設計は数学的なものに根ざさなければならない。その結果として、数学教育学者は数学的なものとの間の交渉を必要とし、専門的研究生活の主要な部分を児童、生徒、教員志望学生の数学的なものに関する真正の活動を支援し、観察し、分析することに捧げなければならない。人間と数学的なものとの魅力的な出会いを組織し、観察することは、専門家としての数学教育学者の真の核心であり、教師との専門的な意見交換の自然な文脈の中で行われるのである。

数学的なものの一つの部分としての専門的数学の視点は他の諸学問領域の視点と調和を取るべきであるとの見方を数学教育学者は明確に認識しなければならない。数学教育史はこれまでの数学教育が専門的数学にあまりにも密接に追随したことの誤りを明快に示している。誤りの一つは、専門的数学の外ではほとんど意味をなさない専門的内容や言語を教育内容として選ぶことがあったことである。数学教育現代化の誤りをその例として挙げることができよう。もう一つは、専門的数学の教育・研究において、既に切り捨てられてしまっている教育的に重要な数学的なものの部分が固有の関心を失っていることである。この第二の誤りの最もよい例が初等幾何である。

数学教育は専門的数学を教育心理学的に転換し教材として使用することによって得られるものではないことを数学教育学者は知るべきである(cf., Freudenthal 1986）。そうではなくて、学校教育というものを、数学的なものがもっている広範な社会的文脈の中で前数学的な人間的能力の開発として捉えるべきである(cf.,Schweiger,1994:p.299,Dorfler,1994,さらに,D'Ambrosio,1986の民族数学の概念)。この考え方によってのみ、小学校から高等学校までの数学指導の統一性を打ち立てることができ、教師教育と呼ばれるに相応しい教育学部数学科の課程をつくることができるのである。

2　数学教育学の発展の現状における一つの基本的問題 -核心部分の欠落-

数学教育学における教授：学習の問題の研究への取り組みには研究に関する方法と基準とを含む科学的枠組みが必要である。若い学問である数学教育学は様々な方向からの相当な圧力下にある。規準の確立方法は、数学教育学の位置が何なのかということ自体と同様に論争点であり、かつ同様に様々な形で提案することができる。

自然科学や人文科学の方法や基準を採用することも一つの魅惑的なやり方ではある。あえて言わせてもらえば、世界中の大多数の数学教育学者はこのやり方をとっている。自分の学問的背景と関心とに従って関連領域の科学者たちから認められ支持される研究方法や基準は核心部分における問題よりは関連学問領域の近隣にある問題の方により容易に適用できる。従って大方の数学教育学的研究は、数学、心理学、教授学、社会学、数学史等に執着している。こうして、数学教育学的研究の全体視野に立つ出発点、例えば社会的文脈における数学的活動といったものは個々の要素に分解され、核心部分における特有の課題が見落とされる。私の考えでは、これは数学教育学の大きな発展を妨げる現状における大問題である。この問題は数学教育学に限った問題ではなく、クリフォードとガスリー(1988:p.3)が述べるように、教科教育における普遍的な問題なのである。

とりわけ優れた研究力があると言われる大学では既存の学問的、政策的雰囲気の中で保守的な考えが充満し、教育学部の存在を否定してきた。教育学部は大学の基準や同僚研究者が要求する学問的水準を満足することは少なく、研究者たちからも疎遠になるのである。教育学部の研究者が学問的研究に向かえば向かう程、彼等が奉仕しなければならぬ学校教育から遠ざかってしまう。核心部分から離れ、関連領域へと向かう動きは次のような独断と結びつくことによってやはり問題である。関連学問の枠組みや規準を借りる場合、その学問の研究の枠組みや規準がその学問にしか適用できないことがある。この立場は数学教育学の中心的課題に盲目になり核心部分において行われる研究の構成的遂行を組織的に低く評価することにつながる。時には、核心部

分でさえ科学的地位を否定されることがある。数学教育学から数学の研究へと逃げてしまった数学教育学者たちは、数学教育学の教育的視点を台無しにしてしまう (H.Meschkowski)。同じように、心理学や教育学などの関連領域における研究活動も数学的視点を欠落させることになる。このような傾向は数学教育学の科学的地位を公然と批判する関連領域からの声によって強化される。その結果として、我々は過去において存在理由がないとされる帰納主義の世界へと不合理にも引き入れられる(cf.,Bigalke,1985;Winter,1985)。60年代後半に、数学教育がこのような極端な位置を正に克服しようと努力していたということは何とも皮肉なことである。緊急に必要とされることは、数学教育学の核心部分を正当化する方法論的枠組みである。

3　生命体生成的“設計科学”としての数学教育学

関連学問の規準を数学教育の科学的規準として取り上げることは、前述のように賢明なことではない。数学教育学の課題が、関連学問の方法と結びつく限りにおいて、またその範囲内において取り扱われる傾向をもつからである。その結果、核心部分はそれ自身の存在権利をもつ科学的研究分野としては認められないことになるのである。

科学の伝統的構造についての固定観念を捨て、核心部分の固有の性格、すなわち数学の指導の構成的展開と探求とに注目するならば、幸いなことに、明るい未来がある。数学教育学は設計科学という広範な分野の中に位置づけることができる(cf.,Wittmann,1975)。この設計科学の科学的性格はノーベル賞受賞者H・サイモンが自然科学のもつ科学的性格を明確化することによって得られたものである。以下に示すサイモン(1970:pp.55-58)の論文からの引用は設計科学が学界において抵抗を受けたことをも述べている。設計科学としての数学教育学はより広い文脈の中に位置づけられ、合理的評価を得やすい状況に至っている。

> 歴史的、伝統的に言って自然の事物を教えること、即ち如何なるものであり、如何に作用するのか、が自然科学の課題であった。人間が作るもの，即ち人工物を教えること、どのように作ったらよいか、どんな性質があるか、どう設計したらよいか・・・、が工学部の課題であった。
>
> 作り上げることとしての設計は、すべての専門職業的訓練の核である。それが科学と専門職業とをはっきりと区別するところである。工学部は、農学部、商学部、教育学部、法学部、医学部と同様に設計の過程に中心的関心がある。
>
> 専門的職業活動における設計の主たる役割に照らせば、今世紀において自然科学が工学部の専門教育から物作りの科学を追い出したことは、

皮肉なことである。工学部は生物科学という科学の学部になり、商学部は有限数学の学部になってしまった。物作りの科学から離れて自然科学へ向かう動きが、他の専門的職業分野よりも工学、商学、医学において広くかつ急速に行われたのは、私が指摘した通りであるが、法学、新聞学、図書館学などでも決してなかったわけではない。

このような広範な現象には、根本的な原因がある。その原因は、学的敬意に照らせば明白である。職業に関する専門学部はますます総合大学の教養的雰囲気の中に吸収され、その吸収にあこがれている。一般的に決められている規準に従うと、学的敬意は知的側面に強く、分析的で、形式化かつ教授可能な教育内容を要求する。過去には、全体とは言えぬとしても、設計や人工物に関する科学は知的側面は弱く、直観的で、非形式的かつ料理本的であると考えられてきた。固体物理学を研究している大学の人が機械の設計や販売計画を教えたりすることに身を落とすことがあろうか。答は既に明らかである。彼は、そんなことはしたくないのである。

古い形の専門的職業に関する学部は、大学に相応しい知的水準で専門的設計を教育する方法を知らなかった。新しい学部は専門的職業の核となる技術の訓練の責任をほとんど捨てている。

専門的職業に関する学部が、設計の過程に関して知的側面が強く、分析的で、部分的に形式化され、部分的には実証的で教授可能な内容からなる科学としての設計科学を見出すならば専門職業的責任を再び見出すだろう。

このような設計科学は存在の可能性があるだけではなく、今日現に創出されつつあることを示すのがこの章の論題である。

筆者の考えでは、設計科学の枠組みというのは、その職責を満たすための確実な見通しを約束すること、数学教育学者たちの揺るぎない自己概念を作り上げることに開かれている数学教育学にも当てはまる。この枠組みは、第2節で述べられている立場を保証する。何故なら数学教育学の核心部分は様々に異なる教育的生態系に適用可能な探求と同時に、人間が作るものとして指導単元、一連の指導単元、カリキュラムの構成を専ら行うところだからである。この構成の質は、研究者の理論に裏打ちされた構想力、設計者の独創性と組織的な評価に依存しており、これらは、いずれも設計科学に典型的なものである。設計科学としての数学教育学の概念が教師の仕事にどのように反映されるかは例えばクラークとインガーの論文(1987:pp. 97-99) に示されており、彼等は教育を設計の専門職だと捉えている。

関連学問領域から設計科学として数学教育学を明確に、構造的に述べるこ

とは、数学教育学の特定の性格、他の学問からの相対的な自立を明確にすることにつながる。数学教育学は数学や心理学、教育学の付録ではない。他の設計科学がその関連学問領域の付録ではないのと同じ理由による。

関連学問領域を手本として数学教育学を組織しようとする試みは的外れである。何故なら、概念的、実践的な革新に対して数学教育学における創造的設計の重要性が支配しているのを見落とすからである。

研究の枠組みや規準に関して言えば、核心部分で研究している数学教育学者は核心部分において既に達成され利用可能なものから出発すべきである。過去２５年の間、核心部分において作られた理論的枠組みを含めて、将来の方向にうまく合致するような規準が開発されてきたことは何の疑いもない。フロイデンタールが示唆しオランダの数学教育学者たちが念入りに作り上げた開発的研究がその典型的な例である(cf.,Freudenthal,1991:pp.160-161; and Gravemeijer,1994)。勿論、数学教育学の核心部分における問題に相応しい限りにおいてその関連学問領域から研究方法や規準を採用することは悪くない。

設計科学として数学教育学を見ることへの異議は次のような単純な理由から生じる。設計科学は今日有害な影響が現れてきている機械論的枠組みに伝統的に従っており、今でも広く使われている枠組みであることである。確かにこの枠組みは教育に対して有害である。然しながら、現在私たちは設計科学に関する新しいパラダイムの生成に立会っており、設計科学を生命体の生成の観念に基づいて、生命体を念頭に置いた複雑系、自己組織性をもつものとして提示している(Malik,1986)。設計科学の研究者がこの知の枠組みの総体の採用へのためらいがあったとしても、この枠組みが数学教育学の近年の発達に一致していれば、数学教育学者はそれに従わない理由はどこにもない。子どもと教師、理論家と実践家の関係における生成的生命体としての見方は伝統的な見方と非常にかけ離れている。知識は教師から受け身の生徒へ伝達された結果としてではもはやなく，他の生徒や教師との社会的相互作用において学ぶ、生産的成果として考えられる。従って、数学教育学者によって開発されるすべての教材は相互作用的な取り組みを許すものとして構成されなければならない。特に、数学教育学者は教師や生徒に彼等自身の選択性に関する自由を与えなければならない。このようにして開発された教材の柔軟的な使用法を促進し、刺激するために、教師は教材の単なる受容者としてではなく研究者や開発の協力者として考えられ、そのために訓練されなければならない(cf.,Schupp,1979;Schwab,1983,1983;Fischer/Malle,1983,他に *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*(4/91and5/91)のBrown/Cooney, Seeger/Steinbring,Voigt,他による論文)。その結果、教師教育も新しい質を得るのである。この革新に沿った重要な一つの方向に、シェーン(1987)によ

って開発された反省的協力者の考えに基づいた取り組みがある。

4　指導単元の設計と実証的研究

設計科学として数学教育学を発展させるためには、一方では指導単元の設計法と、他方では実践研究を互いにいかにして関係づけられるかという，方法を見出すことが重要である。次に述べるような実証的研究、特に指導単元を中心に据えた実証的研究の取り組みを提案する。

過去の数学教育研究において指導単元、特に広い意味のカリキュラムに注意が向けられてきたことは否定できない。実際、60年代後半から70年代前半にかけてカリキュラム開発は特別に重要な地位を占めていた。然し、指導単元の設計に研究の焦点が向けられたことはなかったことに注意しておきたい。指導単元は理論的観念を探求したり、提案する際の付属的な例として扱われるにすぎなかった。よい指導単元の多くは教師向けの雑誌には掲載されるが、研究誌には掲載されることはなく、学会で注目されることはほとんどなかった。この現象を次のように説明することができる。研究とは対比的に授業の設計は学校の教師や教科書の執筆者によってなされる二流の仕事と考えられてきた。言い換えると、サイモンが言うように、学的敬意に抗して授業設計に身をやつし、学校の教師と同レベルに立ちたいという人がいるだろうか。答えは明らかである。誰もそのようにはなりたくないのである。

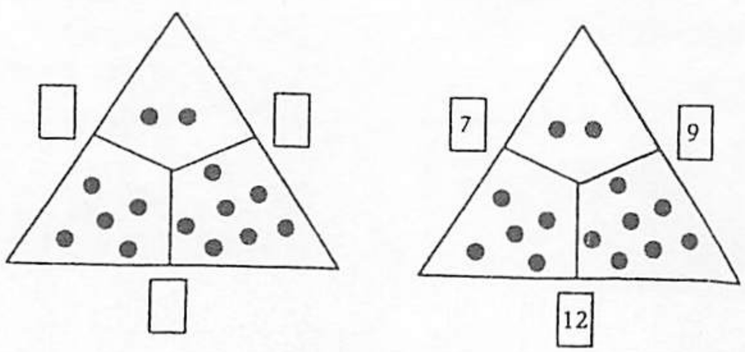
指導単元に対するこのような基本的に間違った考え方を克服するためには我々は次のことを認識しなければならない。それは、設計の本来的性格によって、すべての設計の領域は、アマチュアから初心者、多少の技術者、経験豊富な人、創造的な発明家に至るまでの幅広い能力や経験の範囲があるということである。典型的な場合、大規模な設計の多くは専門的研究・開発機関で行われる。設計科学としての数学教育学もこの例外ではない。然し教師が設計に取り組むからと言って、数学教育学者がこの課題について取り組むのをやめることは許されることではない。逆に、指導単元、特にカリキュラムの設計は非常に困難な仕事であり、その分野の専門家によって行われるべきものである。たとえ教師が専門家によって作られた設計の枠組みの中で重要な貢献をしたとしても、この課題を教師だけに任せられてよいことには決してならない。とりわけ、教師が研究チームと密接に連携している場合でもである。また、指導単元をある特定の学校の状況に適合させるためには、小さいながら設計を必要とする。然し、教師というものは作曲家と言うよりは指揮者、脚本家と言うよりは舞台監督に例えられる。このような理由で、教師が自分自身のカリキュラムを作るために教育センターに集まることは強く躊躇せざるを得ないのである。

様々な目的と様々な学年段階に合わせて開発された指導単元の中でどれが最高の質をもつ指導単元かを明確に記すことは難しい。質の高い指導単元には次のような特徴があると言ってよいだろう。

1．数学教育の中心的目的、内容、原理が盛られていること
2．豊かな数学的活動を誘発すること
3．柔軟性をもち、それぞれの学級の状況に合わせてとりあげることができること
4．学習や指導に関する数学的、心理学的、教育学的観点を全体として内包し、幅広い実践的研究の可能性を本来的に所有していること

質の高い指導単元はその名称をもって呼ばれている。アリスター・マッキントッシュとダグラス・カーダリングのアリスモゴン、マリオン・ウオルターのミラーカード、オランダのウイスコバ研究会によるジャイアント・エグバート、ゲルト・ウオルターの一年間の時間数などを例に挙げることができる。他の例と指導単元の役割についての組織的な議論はヴィットマン(1984)が述べている。

話を明確にするために以下に指導単元の例を挙げよう。小学校のプロジェクト「数学2000」の中で次のようなアリスモゴンの組が第１学年で使われた。三角形の中心から各辺の中心点へ向けて三本の線を引き、三角形を３つの領域に分ける。領域の中に括弧をおいたり、数を書く。ルールは二つの隣接した領域の中の数を足してその和を対応する辺の箱の中に書くというものである。



図．アリスモゴン

様々な問題が考えられる。三角形の内部に数を入れたときには外部の数は加法によって求められる。内部と外部の数が１，２個ずつしか与えられていないときは、未知数は加法や減法によって求められる。外部に３つの数がある場合、内部の数は直接的には求めることはできない。外部の数が変われば

解も変わるが、解は一意的である。然し、分数や負の数を使わなければならないこともあり得る。

アリスモゴンの背景となる数学はかなり高度である。内部の3つの数は外部の3つの数と同様にベクトルを構成する。隣接した数の加法は実数上の三次元ベクトル空間を定義する。対応する行列は正則である。この構造をマッキントッシュとカーダリング(1975)が示したように、奇数次のn次元ベクトル空間に一般化できる。

基にする指導法は、数学的文脈から自然に浮かび上がってくる連続した課題や問題によって成り立っている。教師用の指導書は次のように構成されているだろう。

1. 例を使ってルールを紹介し、そのルールが理解されたか確認しましょう。
2. 内部の数が与えられている例をいくつか提示しましょう。
3. 穴あきで内部と外部の数が与えられている例をいくつか提示しましょう。
4. 外部の数が与えられている例をいくつか提示しましょう。
5. この類の他の問題を提示しましょう。

明らかなことだが指導単元は本質的にいろいろな考え方に向けて開かれている。固定されているのは鍵になる問題だけである。。それぞれのエピソードで、先生は問題に取り組んでいる子どもの考えを追っていかなければならない。この教師の役割は決まった内容を教えるという伝統的な見方とは違う。指導単元は、鍵になる問いだけが定められていて、子どもの思考を追っていく臨床的インタビューと基本的に類似している。

指導単元と臨床的インタビューの構造上の類似性は、指導単元の実証的研究に子供の認知発達に関するピアジェ的研究方法の採用を示唆する。その結果、指導単元が研究手段としてだけでなく研究の対象としても捉えられる臨床的指導実践の概念に達する。

	教　具	方　法
ピアジェ心理学	構造化された学習課題の集まり	臨床的インタビュー
数学教育学	指導単元	臨床的指導実践 実験

図. ピアジェ心理学と数学教育学の研究方法論的対比

これらの実践から得られたデータは、多様に活用される。データは教授：学習過程について、学びの個人的社会的成果、子どもの生産的思考、子どもにとっての困難性について私たちに何かしらを語りかけてくる。これらは、単元の評価、効果的な教授：学習の改訂のための手助けとなる。

ピアジェの実践は他の多くの研究者たちによって繰り返し行われてきた。多くの研究は心理学的研究の範囲を越えたところをねらっている。例えば、保存実験のように専門的研究方向を確立しているものもある。ピアジェの実験や彼が観察で得た子どもの思考法は彼の理論より長く生き続けており、多くのものが現在においても認められている。このことは誇張ではない。同じように、臨床的指導実験は繰り返し行われ、様々な方法で行われる。これらの資料を比較することから指導と学習に関する基本形を同定することができ、それぞれの指導単元に関する十分に基礎づけられた個々の知識を導くことができる。数学教育学に関する日本の研究から多くを学ぶことができる(cf., Becker and Miwa, 1989)。

このような研究活動を行うに際して、今日の質的方法は効果的に活用できる。特に、授業場面や教育技術といったことに関連してフランスの数学教育学者たちが開発した方法がある(cf. Brousseau, 1986;Artigue and Perrin-Glorian, 1991;Arsac et al., 1992)。研究結果の再生可能性については、社会科学の研究から示唆を受けることができる。ノーベル賞受賞者のフレデリック・フォン・ハイエック、彼は経済学者であるが、研究結果の再生可能性が得られるという説得力のある指摘を行っている。特定な資料を越えた一般的な型を直接示そうとしても、高次に複雑な社会現象についての実証的研究は、個々のデータを越えた一般的な型を明らかにする方向で研究が行われるならば研究結果の再生可能性が得られる。教授：学習の結果が生徒や教師に依存していることを認めることは、ある特定の指導単元の数学的内容と関連する型というものの存在を否定することにはならない(cf., also, Kilpatrick, 1993:pp27-29 and Sierpinska, 1993:pp. 69-71) 。勿論あらゆる状況や場面に生じる型のすべてを期待するべきではない。教育的生態系に依存して異なった型が存在することは全く当然なことである。ここで、よく知られているピアジェのインタビューは内容依存的型が繰り返し生じていることを示しているが，この型があらゆる子どもにあてはまるものではないという事実を思い起こすべきである。

指導単元を中心に置く研究は，いくつかの理由で有効である。第一に研究が指導内容と一致している(cf., the postulate of "relatedness" in Kilpatrick, 1993:p. 30) 。第二に，臨床的教育実験から得られた知識は局所的である。ここで私たちは研究結果を一般化するのに以前よりもより注意深くなければならない。将来においては，教授：学習の広い範囲を含む理論が

出てくるに違いない。然し、個々の指導単元の多様性というものを細部にわたって研究し、初めてそのような理論ができあがるのである。イギリスの数学者グラハム・ヒグマンは50年代に群論の研究について、群論の発達はそれぞれの群に関する知識に、第一義的に依存している、ということを述べた。80年代には有限単純群の分類という驚異的な結果が彼の理論の正当性を示した。数学の研究と同様に、多くの指導単元の詳細な実践的研究は数学教育学に対する有用性を証明するだろう。

第三に、教授実験に関連する理論には意味があり、応用可能である。然し私たちは教授：学習の固有の複雑さのために、研究から得られたデータや理論は、ある特定の指導単元を使用するに際して完全な情報を提供するものではないことに気付くべきである。教師だけがクラスの特定の状況を決定する立場にある。従って、そこにはこれまで述べられているような研究者と教師との間の明確な区別はないのである。だから、教師は規模の小さい研究を行う為の基礎的能力をある程度備えていなければならない。教師教育に関する筆者の経験によれば、教員志望学生に臨床的インタビューの手法を導入することがこの目的にとっては優れている。

私の考えでは、数学教育学における最も重要な研究結果というのは、理論的原理に基づいて注意深く設計され、実証的に研究された指導単元の集合である。これらの指導単元は教師教育の主要な部分を構成していなければならない。大学を卒業したての教師は指導の基準となるような指導単元の一そろいは鞄の中に持っていなければならない。我々の企画したプロジェクト2000の経験によれば、このような指導単元は数学教育革新のための効果的な手段であり、理論と実践との溝を埋めるのに適したものである。

この節の結論として、次のことを再び強調することは重要である。指導単元を設計することと、指導単元を中心に置く実証的研究のみが、核心部分、関連領域、関連諸学問、これらの構成要素の相互作用の中で成功する。特に広い意味での数学、即ち数学的なものと強く結びついていることが必要である。

5　数学教育学の将来

一般的に述べれば、科学的基礎の上に複雑系を知的方法で扱うことは、人間生活の全般においては当然のことだろう。関連学問領域から提供される方法というものはしばしば不十分である。リーデル(1988)は、伝統的な第一哲学が完全なる記述と演繹とを目指しており、自己限定的(Fisher, 1980) という理由の故に複雑系への適用には失敗するのだから、より文脈依存的で、実践的かつ形式性の低い第二哲学が必要であると最近述べている。このことは、

いかなる科学にも厳しい反省を迫る信号であり、数学教育学は長い目で見ればそれらの諸科学から恩恵をこうむることになるだろう。社会は少なくとも人的資源の開発が新しい技術や新しい市場戦略といったものの発達と同様に経済的発展にとって重要であることを認識しなければならないのである。

目下のところ大学における教科教育学は厳しい立場に立たされている。教師教育プログラムに関する学問をすべての学校段階で作り上げることに対して関連諸学問の中の専門分野は抵抗を続けるだろう。大学の歴史は、確立された学問の研究者が無理解を示したり、新しく出現した学問に対して公平でない振る舞いをしたりする多くの例を示してきた。19世紀末期の、工学部に対する古い大学の抵抗、今世紀初めの応用数学者に対する純粋数学者の抵抗、１９５０年代の大学の教育学の講座開設に対するドイツ哲学界の抵抗はその中のいくつかにすぎない。専門家たちにとって正に学問の境界における新しい発展を理解し承認することは不可能とは言えないまでも、明らかに困難なのである。

大学における数学教育学の立場を強化し、研究財団から資金を得るために数学教育学者は社会の支持を必要とする。この視点から数学教育学と学校との関係は基本的な役割を果たす。実践の改善のための教育学的研究の利用と必要性を、教師、指導主事、行政担当官、親、一般の人たちに納得のいくように示されなければならない。これは、核心部分からのみ達成できる。すなわち、中心的課題に焦点を置くことや設計、実証的研究、教師教育を組織だてることによってなされるのである。

同じような方向で、社会-学校-教育委員会-教職員組合-教師教育-設計、研究開発に関わる人たちのネットワークを構築する可能性があり、このとき、数学教育学の核心部分はそれに適した場所を自然に見出すであろう。言い換えれば構成要素すべてを含んだ生命体的努力を組織化することである。

これは、クリフォードとガスリーが一般的に教育学部に与えた助言と一致する(cf.,Clifford/Guthrie,1988:pp.349-350)。

> 教育学部の主要な使命は、教科教育学研究者の研究、教育課程の研究と社会的制度としての学校教育の研究とを通しての教育の向上である。ジョン・ベストが見ているように、教育学部が直面する課題は政治学部の政治学専門家が行っているものとは全く異質なものである。政治学専門家はその学問建築に関心を持ち、彼等は地方団体の事務職員、市の専門職、国会議員を育てることやその目的のための研究を行うことには何ら義務を負っていない。然し教育学部がその責任を遂行するためには教育学部の研究者は第一義的に教育の専門家でなければならず、単なる理論研究者であってはならない。教育学部の最大の利点が様々な学問領域

から専門的問題を探ることができる、ということだけでは不十分である。実際、専門的実践に有効な力は発揮せずに半世紀をも過してきたのである。

REFERENCES

Arsac, G. *et al.*: 1992, 'Teacher's role and reproducibility of didactical situations', *Educational Studies in Mathematics* **23**, 5–29.

Artigue, M. and M.-J. Perrin-Glorian: 1991, 'Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality', *For The Learning of Mathematics* **11**, 13–18.

Balacheff, N. *et al.*: 1992, 'What is Research in Mathematics Education and What are Its Results?, *ICMI Bulletin* No. 33, December 1992, 17–23.

Bauersfeld, H.: 1988, 'Quo Vadis?: Zu den Perspektiven der Fachdidaktik', *Mathematica Didactica* **11**, 3–24.

Becker, J.P. and Miwa, T.: 1989, *Proceedings of the U.S.-Japan Seminar on Mathematical Problem Solving*. ERIC Clearinghouse for Science and Mathematics (ED 304 3/5), Columbus, Ohio.

Bigalke, H.-G.: 1985, 'Beträge zur wissenschaftstheoretischen Diskussion der Mathematikdidaktik', in: Bönsch, M./Schäffner, L., *Theorie und Praxis. Schriftenreihe aus dem FB Erziehungswissenschaften I der Universität Hannover*.

Brousseau, G.: 1986, *Fondéments et méthodes de la didactique des mathématiques*. Thèse d'État, Bordeaux.

Clark, Ch.M. and Yinger, R.J.: 1987, 'Teacher Planning', in: Calderhead, J. (ed.), *Exploring Teachers' Thinking*, London.

Clifford, G.J. and Guthrie, J.W.: 1988, *Ed School, A Brief for Professional Education*, Chicago and London.

D'Ambrosio, U.: 1986, 'Socio-Cultural Bases for Mathematical Education', in: Carss, M. (ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education*, Birkhäuser, Boston, 1–6.

Dörfler, W.: 1994, 'The gulf between mathematics and mathematics education', ICMI-Study *What is Research in Mathematics Education and What are its Results?*, Washington, May 8–11.

Fischer, R.: 1980, 'Zur Ideologie der Selbstbeschränkung im Mathematikstudium', in: *Mathematikunterricht an Universitäten. Zweiter Teil. Zeitschrift für Hochschuldidaktik*, Wien, Sonderheft S3, 32–72.

Fischer, R. and Malle, G.: 1983, *Mensch und Mathematik*, Mannheim.

Freudenthal, H.: 1986, 'Review of Yves Chevallard, La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné', *Educational Studies in Mathematics* **17**, 323–327.

Freudenthal, H.: 1987, 'Theoriebildung zum Mathematikunterricht', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **3**, 96–103.

Freudenthal, H.: 1991, *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gravemeijer, K.: 1994, 'Educational Development and Developmental Research', *Journal of Research in Mathematics Education* (to appear in JRME).

Jackson, Ph.A.: 1968, *Life in Classrooms*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Kilpatrick, J.: 1993, 'Beyond Face Value: Assessing Research in Mathematics Education', in: Nissen, G. and Blomhøj, M. (eds.), *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*, Roskilde University Denmark, 15-34.

Krygowska, A.Z.: 1972, 'Mathematik-didaktische Forschung an der Padagogischen Hochschule Krakau', *Beiträge zum Mathematikunterricht 1971*, Schroedel Hannover, 117–125.

Malik, F.: 1986, *Strategie des Managements komplexer Systeme*, Haupt, Bern

McIntosh, A. and Quadling, D.: 1975, 'Arithmogons', *Mathematics Teaching* No. 70, 18–23.

Riedel, M.: 1988, *Für eine zweite Philosophie*, Suhrkamp, Frankfurt a.M.

Schön, D.: 1987, *Educating the Reflective Practitioner*, San Francisco and London.

Schupp, H.: 1979, 'Evaluation eines Curriculums', *Der Mathematikunterricht* 25, 22–42.

Schwab, J.: 1983, 'The Practical 4: Something for Curriculum Professors to Do', *Curriculum Inquiry* **13**, 239–265.

Schweiger, F.: 1994, 'Mathematics is a Language', in: Robitaille, D.F. *et al.* (eds.), *Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education Québec 1992*, Les Presses de l'Université Laval, Sainte Foy, 197–309.

Sierpinska, A.: 1993, 'Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics', in: Nissen, G. and Blomhøj, M. (eds.), *Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics*, Roskilde University Denmark, 35–74.

Simon, H.A.: 1970, *The Sciences of the Artificial*, MIT-Press, Cambridge/Mass.

Thommen, J.-P.: 1983, *Die Lehre von der Unternehmensführung*, Bern und Stuttgart.

Von Hayek, F.A.: 1956, 'The Theory of Complex Phenomena', in: Von Hayek, F.A., *Studies in Philosophy, Politics, Economics*, London - Chicago - Toronto 1967, 22–42.

Winter, H.: 1986, 'Was heißt und zu welchem Ende studiert man Mathematikdidaktik?', in: Schanze, H., *Lehrerbildung in Aachen - Geschichte, Entwicklungen, Perspektiven*, Aachen, 174–194.

Winter, H.: 1985, 'Reduktionistische Ansätze in der Mathematikdidaktik', *Der Mathematikunterricht* 31, 75–88.

Wittmann, E.Ch.: 1974, 'Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissenschaft', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 3, 119–121.

Wittmann, E.Ch.: 1984, 'Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education', *Educational Studies in Mathematics* 15, 25–36.

Wittmann, E.Ch.: 1985, 'Clinical Interviews embedded in the "philosophy of teaching units" – A means of developing teachers' attitudes and skills', in: Christiansen, B. (ed.), *Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education*, Mini-Conference at ICME 5, Adelaide 1984, Copenhagen: Royal Danish School of Education, Dept. of Mathematics, 1985, 18–31.

ABSTRACT.Mathematics education (didactics of mathematics) cannot grow without close relationships to mathematics,psychology,pedagogy and other areas.However,there is the risk that by adopting standards,methods and research contexts from other well-established disciplines,the applied nature of mathematics education may be undermined.In order to preserve the specific status and the relative autonomy of mathematics education,the suggestion to conceive of mathematics education as a 'design science'is made.