東北数学教育学会年報
1998. 3. 31 第29号

高校1年生を対象にした*Mathematica*を活用した数学の授業

山形大学　守屋誠司　　山形県立寒河江高等学校　長澤義博

１９９７年度実施

Abstract

高校1年生を対象として、フェルマーの原理だけを前提として空気中の光の速さ（今回は速度（ベクトル量）でなく速さ（スカラー量）で統一する）との比較として水中の光の速さを求める授業である。数学にありがちな机上だけの授業でなく、実験を行いその計測結果を用いて現象を考察し、その考察結果に基づいて計算をし目的の値をもとめていく。勿論数学の授業であるが、内容的には物理との合科授業である。本校では進学を主とする高校としては指導することが珍しい科目である「物理IA」を1学年で指導しており、内容的にその物理の授業内容を補填するものとなっている。また、授業の場で数学をより現実のものに利用するという立場での実践でもある。

さて、三角法や微分法を既知としないため、2次関数とその発展レベルだけを用いる。従って、数値計算やグラフを書くことが重要になる。ここで、登場するのがコンピュータである。但し、理論の理解を軽視しブラックボックスとしてコンピュータを利用するのでなく、時間の節約や正確さを表現できる道具としての利用にするのが原則であると考える。今回の主目的である*Mathematica*の活用研究もその原則に基づいている。

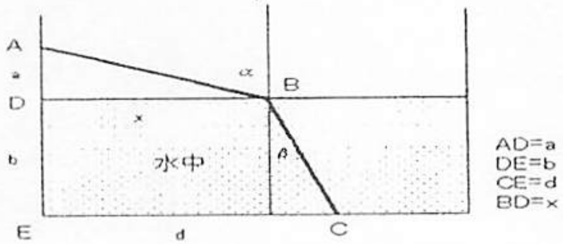
［検索語］*Mathematica*, コンピュータ, フェルマーの原理, 光の速さ, 実験

フェルマーの原理

光は水中で屈折をおこす。この規則性についてはオランダの数学者ウィルブロード・スネルによって1621年に発見された。この規則性に法則として理論面で説明を与えたのがフェルマーである。それは1650年頃のことであり、「最小時間の原理」または「フェルマーの原理」とよばれている。その考えとは「一点から他の点に至る可能なすべての経路のうちで光は最小の時間を要する経路をとる」というものである。

フェルマーの原理とスネルの法則

$$\begin{cases} c = 3.00 \times 10^8 \quad \mathrm{m/s} & \text{空気中の光の速さ、真空中}0^\circ C \\ v = \frac{1}{n}c \quad \mathrm{m/s} & \text{水中の光の速さ　、}n\text{は屈折率} \end{cases}$$



(水槽と光線の軌跡)

空気中ABを光が進むとき要する時間をt_1とすると、$c \cdot t_1 =$ AB より、$t_1 = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{c}$ である。

水中BCを光が進むときに要する時間t_2は、$v \cdot t_2 =$ BC より、$t_2 = \frac{\sqrt{(x-d)^2+b^2}}{v}$ である。

よって、Aから発した光がCに到達するのに要する時間$t(= f(x)) = t_1 + t_2$は、以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{c} + \frac{\sqrt{(x-d)^2+b^2}}{v} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{c} + \frac{n\sqrt{(x-d)^2+b^2}}{c} \\
f'(x) &= \frac{1}{c}\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{n(x-d)}{\sqrt{(x-d)^2+b^2}}\right\} \\
f''(x) &= \frac{1}{c}\left[\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{\{(x-d)^2+b^2\}^{\frac{3}{2}}}\right]
\end{aligned}
$$

開区間$(0,d)$において、$f''(x) > 0$であるので、$f'(x)$は閉区間$[0,d]$で単調増加である。

ここで、$f'(0) = \frac{1}{c}\frac{-nd}{\sqrt{b^2+d^2}} < 0$, $f'(d) = \frac{1}{c}\frac{d}{\sqrt{a^2+d^2}} > 0$ であるから、中間値の定理によって $f'(e) = 0$なる$e \in (0,d)$が唯一存在する。

故に、$t = f(x)$は閉区間$[0,d]$において$x = e$で最小となることが分かる。

このとき、$\frac{e}{\sqrt{e^2+a^2}} = \frac{n(d-e)}{\sqrt{(e-d)^2+b^2}}$ が成り立つ。

図のα , βにおいて$\sin\alpha = \frac{e}{\sqrt{e^2+a^2}}$, $\sin\beta = \frac{d-e}{\sqrt{(e-d)^2+b^2}}$ であるから、

スネルの法則 $\sin\alpha = n\sin\beta$ が成り立つ。

ここで、α , βを計測すれば、$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$から水中の光の速さ$v = \frac{c}{n}$を求めることができる。

授業のテーマ・方針

今回の授業は、高校1年生を対象として、フェルマーの原理だけを前提として、実験から計測を行いそしてコンピュータを用いて空気中との相対速度として水中の光の速さを求

めるものである。

「物理IA」ではフェルマーの原理にふれないで事実として屈折を指導している。また、スネルの原理（高校物理の教科書では「屈折の法則」という）を自然法則として指導し、ただ計算させているのが現状である。蜃気楼現象なども教科書で触れられているが、原理的な説明がないまま、曖昧な形で成り立つ結果として教えられている。今回の数学の授業はこうした物理教育の実状に対する援護となる。

さて、授業展開であるが当然、微分法・三角法の知識を前提とすることはできない。つまり、$n=\frac{e\sqrt{(e-d)^2+b^2}}{(d-e)\sqrt{e^2+a^2}}$を計算して$n$を求めたり、角度を測定してスネルの法則を用いて屈折率nを求めることもできない。

よって、$f(x)$のvを動かすことによって、各vに対して最小値$\min_{0\leq x\leq d}f(x)$を与えるxが計測値eと一致するとき、そのときのvの値を求めるという方針をとる。

ここで、$f(x)$は無理関数の和であり、当然一般論としては高校1年生では処理できない。しかし、放物線は学習しており、平面座標上の距離の最小値の演習によって2次関数に根号がつくことに違和感はない。従って、その関数の和としての無理関数の理解は容易である。さて、その関数のグラフを書くことで最小値が分かる。グラフを書くとは、その原則である「計算して求めた座標点をつなぐ」に従って作業を行うということである。以上の考察から、高校1年生でも関数$f(x)$は処理可能である。

しかし、現実問題としてvを変えるごとに、考察にたるグラフを得るために必要な点$(x_i, f(x_i))$を計算することは時間的に不可能であり、座標点をプロットして正確なグラフをかくことも時間的に難しい。ここで登場するのがコンピュータである。今回は、簡単に任意の定義域についてグラフを書くことができる*Mathematica*を利用してグラフ表示や数値計算を行う。

授業の展開

導入

> 設問1：A地点を出発して川で水を汲んで同じ側のB地点になるべく早く到達するにはどうすればよいか。

> 設問2：A地点から泳いで向こう岸に渡り、そこから走ってC地点になるべく早く到達するにはどうすればよいか。

各設問毎に生徒に考察させ、その後解説を行う。ここでの指導の目的は「最小時間と最短距離が必ずしも一致しないことを理解させることにある。

「設問1」最短距離コースを求めることで解決できることが容易に発想される。Aの直線lに対する対象点Cについて、直線BCと直線lとの交点をDとしたとき、この求めるコースがA-D-Bであることを生徒に求めさせる。

「設問2」最短距離コースを選択することが、求めるコースとなるかを考察させる。そ

の結果として「速さの異なる移動体を連続して移動させる場合は最短距離となる道筋をとらないこと」を理解させる。また、設問1の問題は等速での移動を前提とする場合において、たまたま最短距離コースと最小時間コースが一致しただけであり、最小時間という考え方に統一できることを理解させる。

次の段階として、次の手順で、生徒による考察（討議）を行わせ、その後解説を行った。
（1）光を鏡に当てると入射角と反射角が一致することを水槽の実験でみせる。次に、水に光を当てると屈折することを、実際に実験を行って確認する。
（2）光の性質として「フェルマーの原理」の話をして、この現象について先ほどの設問を利用して考察をさせた。生徒は「光の速さは、空気中と水中では違うのではないか。また、入射角と反射角の計測から水中の方が遅い」という回答をした。
（3）光の速さが 3.00×10^8(m/s) であり、水中に限らず媒質によって光の速さが異なるという事実と、蜃気楼や逃げ水の現象をフェルマーの原理を用いて解説し、その原理の正当性について説明を行った。

展開

水中の光の速さを求めよう。

上記の（1），（2），（3）と設問1，設問2の考察から、実験結果の光の軌跡は最小時間コースとなっていることを理解させる。

その実験結果から空気中の光の速さ c の相対速度として水中の光の速さ v が求められることの概要とこれからの作業手順を説明する。

・光の所用到達時間関数

到達時間に関する関数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{30} + \frac{\sqrt{(x-d)^2+b^2}}{v}$ （$c = 30$ 万 km/s とおく）を導く。細かく座標点を計算し、これをつなぐことでグラフがかけ、最小となる点が分かることを理解させる。

・計測

次に、生徒に a, b, d, e の値を計測させる。
$a = 5$，$b = 14$，$d = 20.8$，$e = 8.4$　が計測された。（単位 cm）
e は水槽の図の線分BDの長さである。a, b, c, d についても水槽の図参照のこと。

・コンピュータ利用

(1) 教員の提示・説明内容

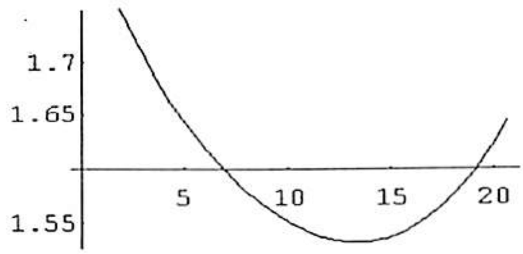
$v = 15, v = 21, v = 27, v = 24$ について、次のような作業をしてみせる。その過程でコンピュータの使用法と作業手順を理解させ、またその結果から v が $21 < v < 24$ の範囲内にあ

ること理解させる。ここで、$f(x)$の最小値を与えるxをe_vとする。

「以下 *Mathematica* による作業手順及び結果と考察」

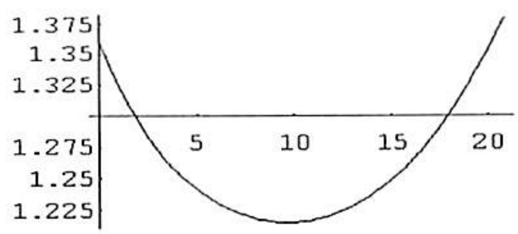
```
f[x_,v_]:=Sqrt[x^2+5^2]/30      + Sqrt[(x-20.8)^2+14^2]/v
```
(関数 $f(x,v)$ の定義式の入力)

(1) `Plot[f[x,15],{x,0,20.8}]`



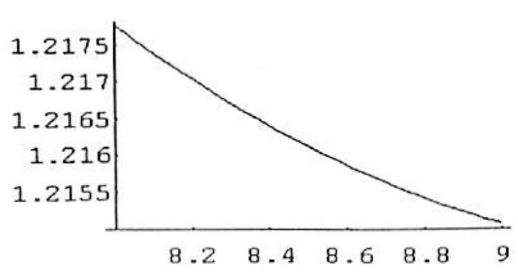
$e_{15} \fallingdotseq 13 > e$ であることが分かる。

(2) `Plot[f[x,21],{x,0,20.8}]`



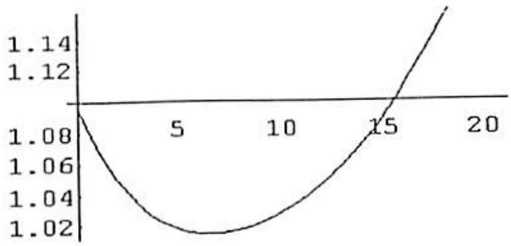
$e_{21} \fallingdotseq 9$ と思えるがはっきりしないので、定義域を絞ってみよう。

(3) `Plot[f[x,21],{x,8,9}]`



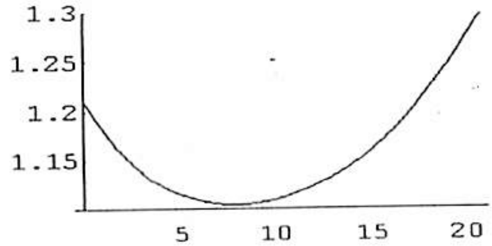
区間を [8, 9] にすることで、$e_{21} > e$ であることが明確になる。

(4) `Plot[f[x,27],{x,0,20.8}]`

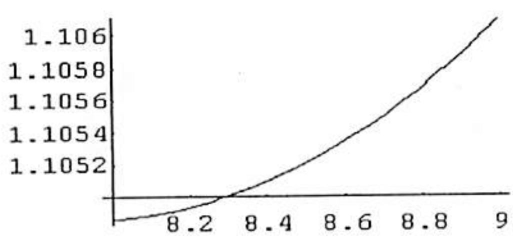


$e_{27} > e$ であることが確認できる。

(5) `Plot[f[x,24],{x,0,20.8}]`



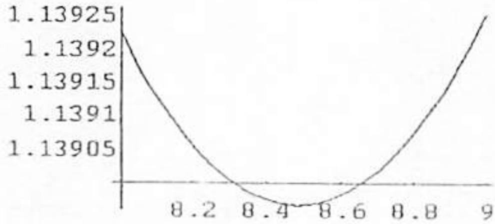
(6) `Plot[f[x,24],{x,0,20.8}]`



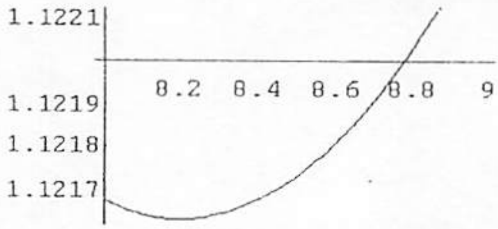
以上の作業から、$e_{15} > e_{21} > e > e_{24} > e_{27}$ であることが確認できた。これより、求める速さ v が $21 < v < 24$ の範囲内にあることが推察できる。

(2) 生徒の作業結果　「さあ、今度は君たちがやってみよう」

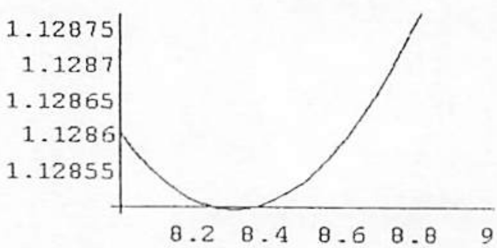
(1) `Plot[f[x,23],{x,8,9}]`



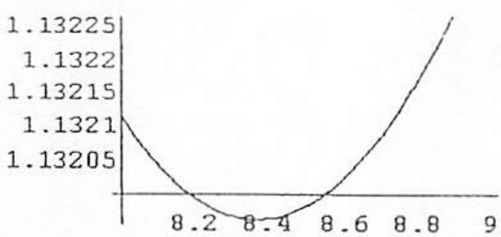
(2) `Plot[f[x,23.5],{x,8,9}]`



(3) `Plot[f[x,23.3],{x,8,9}]`



(4) `Plot[f[x,23.2],{x,8,9}]`



以上の試行錯誤によって、生徒は$v = 23.2$であることを突き止めた。

まとめ

生徒が得たこの結果は、理科年表にある真値（純水20°C、屈折率1.3330）22.5と比較しても、測定誤差や温度等の環境の違いを考慮すれば、十分に「いい数値」(差0.7万km/s, 真値の3パーセント増)であることを知らせた。

次に、コンピュータを用いて次のプログラムで出力した数値計算値をみて最小値の確認を行った。

最後に、*Mathematica*を用いてvを23から24迄0.1刻みで連続的に動かすアニメーションによってグラフの連続的変化を見せて授業を終了した。

(数値計算用プログラム)

```
Do[Print[8+i,"  ",N[f[8+i,23.2]]]   ,{i,0,1,0.1}]
```

(出力結果)

8	1.13211	8.1	1.13204	8.2	1.132	8.3	1.13197
8.4	1.13196	8.5	1.13198	8.6	1.13202	8.7	1.13208
8.8	1.13216	8.9	1.13227	9.	1.13239		

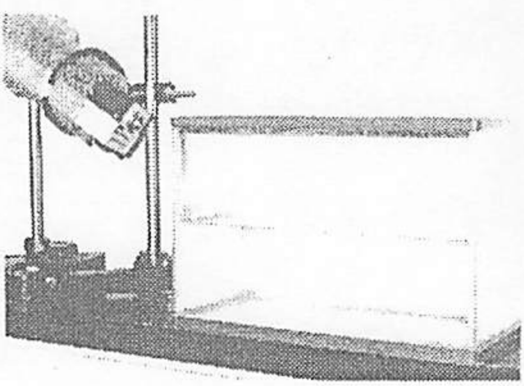
(アニメーション用プログラム)

```
Do[Plot[f[x,v],{x,0,20.8}, PlotRange->{{0,20.8},{1.1,1.4}},
PlotStyle->Hue[1*(v-23)], PlotLabel->"v="<>ToString[v],
AxesLabel->{"x","t"}],{v,23,24,0.1}]
```

(v毎に色を変化させている。)

実験器具

光源には「ヘリウム・ネオンガスレーザー」を用いた。空気中には線香をたき煙を出し、水中には粉末ミルクを溶かし光線の軌跡がよく見えるようにした。



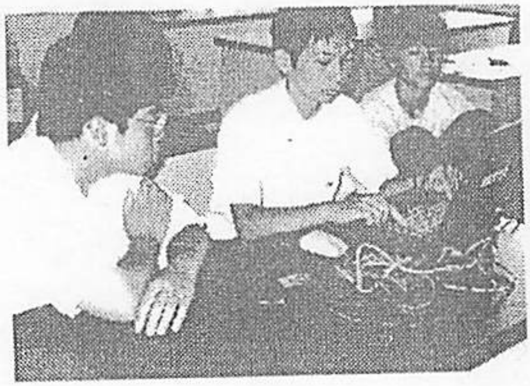
生徒の反応

生徒は、単なる受動的な授業でないことから非常に積極的に取り組んでいた。また、実験を通した授業に対しても大変好意的であった。アンケートの中でも「実験をしたことで、数学の有用性が身近に感じられた。」等の意見が多かった。また、今回の授業で理解が難しいという内容は全くないという感想であった

蜃気楼や逃げ水の現象についても「物理IA」では現象としては説明してあるがフェルマーの原理との関連については解説を行っていない。従って、この数学授業ではじめて物理の授業の意味が理解できたとの感想も多かった。

コンピュータについても関心が高く、コンピュータの操作は初めての生徒もいたが全員が短時間で慣れてしまい全く抵抗感なく容易に使いこなした。

授業終了後、一人一人が非常な関心を示し各生徒がもう一度計測し直してその計測値を元に水中の光の速さを再度もとめているという積極的な生徒の活動状況が見られた。



終わりに

フェルマーの原理を用いて、微積分等を用いず水中の光の速さを求めるというアイディアはRosalie A.Dance氏とJames T.Sandefur氏によるものである。今回はこのアイディアをベースに導入部では生徒の発見的授業を目的とした授業を展開した。展開部では*Mathematica*を用いることでグラフを考察するにより視覚的に理解できるようにし、そして生徒自身がコンピュータを用いて答えを出すことを目的とした。

無理関数など一般には高校1年の範囲外の内容もあったが、生徒の感想にあるように全く生徒には理解困難ということはなかった。このことからも分かるように、様々な内容について頭から指導は無理と決めつけず、指導可能な内容または生徒の状況にあわせた指導方法を研究し実践していかなければならない。それにはコンピュータの利用という分野の研究もその一つの方法として大変期待できると考えられる。

生徒の感想にあった「蜃気楼や逃げ水の現象についての感想」から、これも一つの内容を教科間協力によって理解を深めるよい実例である。このことから教科間においても協力をはかって指導していく必要性を感じ、その研究も行っていきたい。

フェルマーの原理とスネルの法則との関係については、理系の2年生（この証明で用いるレベルの分数関数の微分は2年次に指導予定）または3年生に指導を行いたい。このような授業によって、物理と数学との関係性を示すことができると考える。また、数学は事象を一般化した形式主義（公理主義）によって指導を展開している。その一般化故に、このような現実の問題に実際に応用できることについて、その一端を感じさせたいと考えている。そして、今回の主目的であるコンピュータ利用も、あくまで数学理解の道具としての活用研究である。

また、コンピュータの利用については、生徒の中には使い慣れているものも多く、このような生徒が他の生徒を指導している状況もみられコンピュータ利用については非常にスムーズであった。*Mathematica*を使った経験のある者は皆無であったが、多少の操作の違いに即座に適応し過去の経験を帰納的に用いて*Mathematica*を抵抗なく使っていた。また、コンピュータそのものの使用が初めての生徒にとっても*Mathematica*は、この程度の操作であれば簡単な英単語の意味が理解できる程度で、十分使用可能である。操作が簡単で分かり易い*Mathematica*は数学指導に大変有効であった。

尚、実験器具についても先のRosalie A.Dance氏とJames T.Sandefur氏の方法を参考にした。但し、レーザー光線使用や他細かい点で改良を行い、本校物理科の大楯英順先生のご指導もいただいた。

参考文献

1. Rosalie A.Dance and James T.Sandefur:
   Approaching the Speed of Light with Class,
   THE MATHEMATICS TEACHER Vol.90,No4(April 1997)
2. ファインマン(富山小太郎訳):ファインマン物理学,岩波書店(1994)
3. 大林康二(監修):高校物理IA（本校現1年生使用教科書）,実教出版(1996)
4. 理科年表:国立天文台編,丸善(1990)

Abstract

Mathematics Using *Mathematica* for the First Grade Students of Senior High School

Seiji MORIYA(Yamagata University)
Yoshihiro NAGASAWA(Sagae High School)

This is Math lesson to find the speed of light through the experiment. Only Fermat's principle can be used. This lesson plan is for the first grade students of senior high school.

As only guadrastic function and its expansive level are used,it's important to calculate value and make a graph.

The theme of lesson plan is how *Mathematica* can be used by means of computer.