

## 四角柱、四角錐の切断と花瓶の製作

山形大学 森川幾太郎

概要 四角柱と四角錐とそれぞれを平面により切断した図形の展開図作りとそれを利用した形作りに関する提案を行う。対象は中学生である。

キーワード 立体図形、切断、展開図、

## 1 はじめに

小学校や中学校での立体図形に関わる学習課題の一つは面の平行、垂直関係である。中学校に直方体の平面による切断に関する学習が導入されて20年余経つが、その指導目標は依然として空間的直観力育成にあり<sup>1)</sup>、各種切断図形が生成される原因を面の平行や垂直との関係づけて考察する学習へとは発展させない。

一方、立体図形の学習では投影図などを用いた課題解決型の学習や立体の製作を課題にした学習を行えば、その学習は、単なる直観力の育成にとどまらず、例え簡略なものであろうと論理が必要になり、立体図形をより構造的に理解する力を育む学習となる。

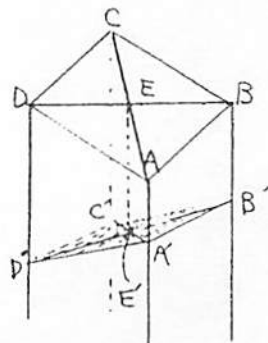
私はいままで次のような投影図を取り入れた課題解決型授業に関する提案を行った。それらでは、いずれも空間内の面や線の位置関係に関する知識（ここには生徒にはつきりと意識化させてはいないが三垂線の定理も含む）をもとに、それぞれの課題の解決を目標に、数学としては投影図に関わる性質の学習が展開される<sup>2)</sup>。

- (1) 山道の長さ
- (2) 寄せ棟屋根組立のための伝統工法の数学的解析
- (3) (ピンホールカメラをモデルに)写真から地図をつくる

今回の提案は、直接的には四角錐や四角柱の平面によって切断した図形の展開図作成とそれを活用した立体図形の製作を目的にする展開のための試案である。この学習では、上記学習課題と同様、空間内の位置関係や投影図に関わる知識が前提となる。なお、今回の提案には、三垂線の定理に関わる学習課題も含めた。

## 2 問題にすること

四角柱や四角錐を平面で切断した図形の展開図を作成するとき問題になるのは、それぞれの図形と第4の辺と切断平面との交点の確定である。この一般的方法を導くことが本稿の目的である。



## 3 平行6面体の平面による切断図形

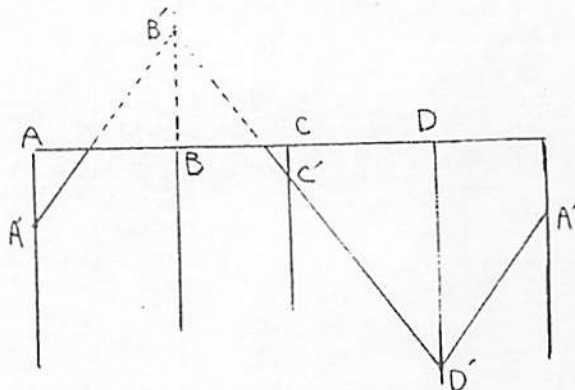
まず、一般の平行6面体の場合から考える。

平行6面体 $ABCD-EFGH$ を平面 $\alpha$ で切断し、切断面と縦方向の各辺との交点を $A', B', C', D'$ とする。図1で、平行6面体の縦方向の向い合う辺は平行であることから、 $AA'C'C$ と $BB'D'D$ は台形。また、 $ABCD, A'B'C'D'$ はともに平行四辺形であるので、それぞれの四角形の対角線の交点 $E$ および $E'$ はそれぞれの対角線の中点である。したがって、中点連結定理から

$$\frac{1}{2}(AA' + CC') = EE' = \frac{1}{2}(BB' + DD') \rightarrow DD' = AA' + CC' - BB' \quad (*1)$$

が導かれる。

切口に5角形ができる場合



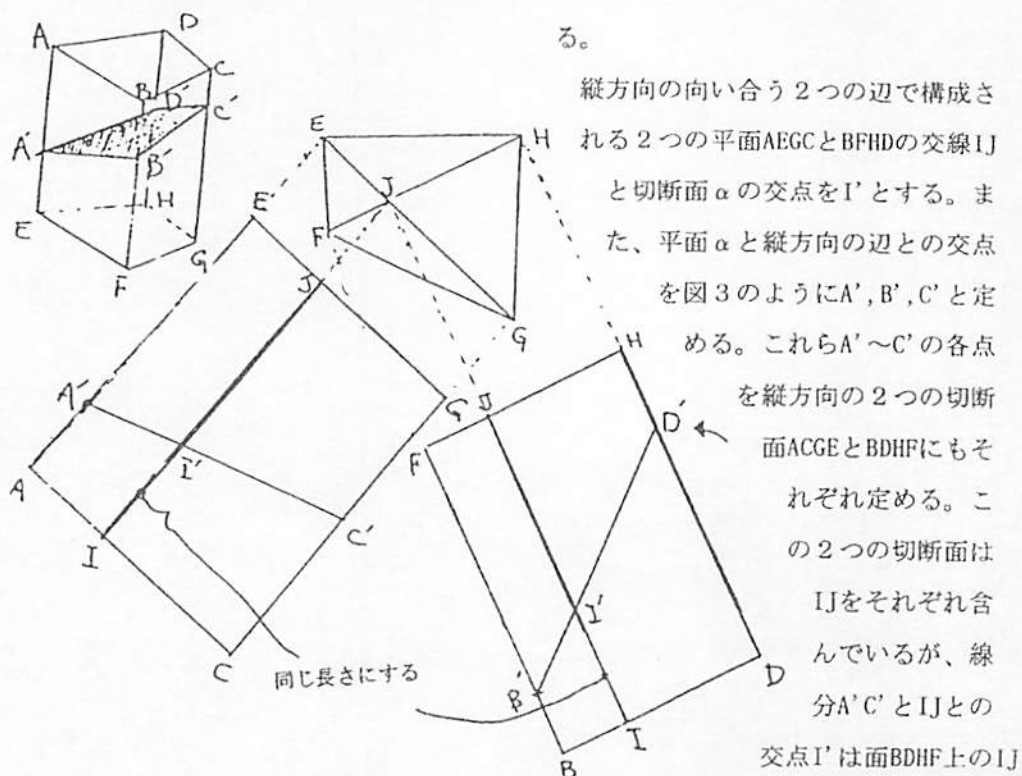
この(\*1)は、 $AA', BB', CC'$ の少なくとも一つが負、つまり上面 $ABCD$ の位置が下に下がり、 $A' \sim D'$ のうちのいくつかがこの面より上部にある、の場合にも成立する。ちなみに、図2の場合は切断面

にできる図形は5角形である。以上見たように、平行6面体を平面で切断したとき、その切口にできる形は基本的には平行4辺形(長方形やひし形になる場合も含む)であるが、切断平面と平行6面体の上面や各側面、さらには下面との位置関係によってその一部が切り取られ、結果として切口に5角形や台形、3角形(2等辺3角形も含む)、そして6角形ができることが説明できる。

図2参照。ここでは、展開図の製作を容易にするために、縦方向の各辺は鉛直である、とした。

## 4 底面が一般四角形である柱体の場合

次に、底面が一般四角形の柱体の場合について考える。この場合も平面による切断図形の展開図の製作を簡単にするために縦方向の辺 $AE, BF$ 等は底面に垂直であるとす



る。

縦方向の向い合う2つの辺で構成される2つの平面AEGCとBFHDの交線IJと切断面 $\alpha$ の交点をI'とする。また、平面 $\alpha$ と縦方向の辺との交点を図3のようにA', B', C'と定める。これらA' ~ C'の各点を縦方向の2つの切断面ACGEとBDHFにもそれぞれ定める。この2つの切断面はIJをそれぞれ含んでいるが、線分A'C'とIJとの

交点I'は面BDHF上のIJ

でも同一点であることに留意して、面BDHF上に表示する。そして、この切断面で、直線B'I'と辺DHの交点としてD'が確定する。なお、図3で平面EFGHは平面図である。

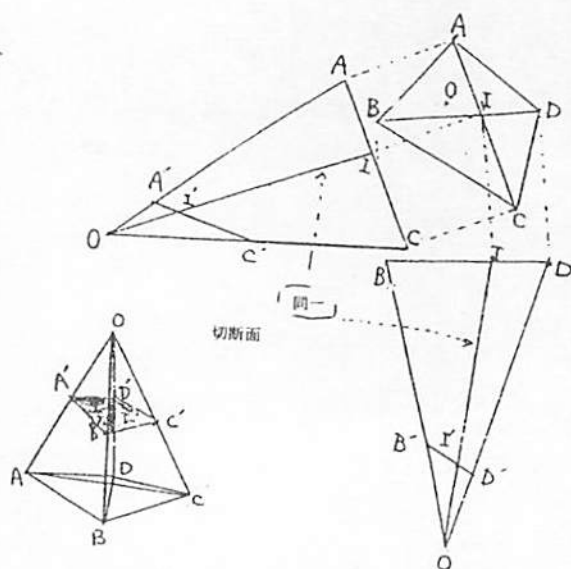
縦の各辺と切断面との交点が確定したので、これを使って切断図形の展開図を描くことができる。

### 5 底面が一般四角形の錐の場合

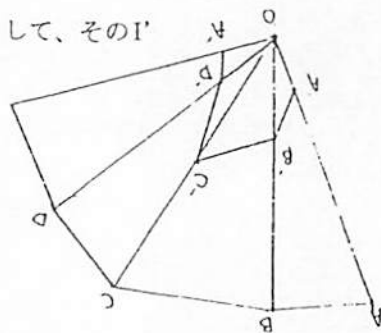
この項では、図4のように、頂点の位置にとくに条件を設けず、一般の場合について考える。

第4辺と切断平面との交点D'の作図法は、[3]の場合と同じである。すなわち、2つの切断面OACとOBD、およびこの2平面の交線OIをそれぞれ図4のように定める。そして、

切断面 $\alpha$ と四角錐の縦方向の交点、A', B', C'を定め、そのそれぞれを切断面上に表示

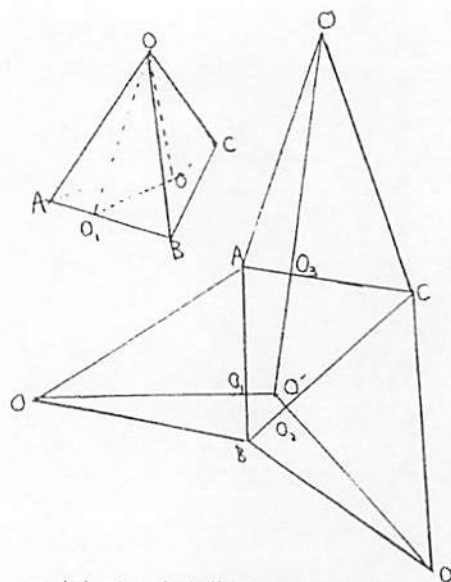


する。切断面OAC上で $\alpha$ とOIとの交点I'を求める。そして、そのI'を切断面OBD上にも表示し、それを用いて図4のように、D'を作図する。こうして、切断面と縦方向の4つの辺との交点が確定するのでこれらを使って切断図形の展開図を描く。なお、四角錐自体の展開図を作成するとき、三垂線の定理も用いるとより正確度の高い展開図を作成することができる。すなわち、



錐の頂部Oの底面へ垂直に投影した像をO'  
とすると、展開図において直線OO'は四角  
錐の底面の各辺と直交する(\*\*2)。

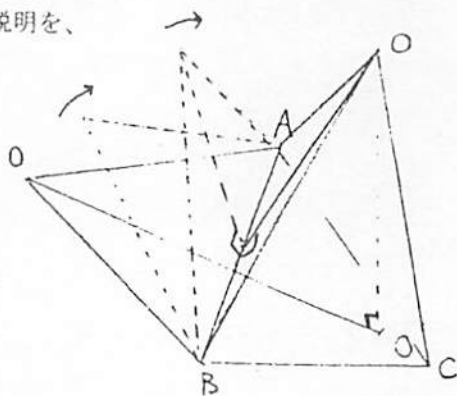
このように、\*\*2の形式であるが、三垂線の定理を三角錐や四角錐の展開図の作図と関係させて指導することが考えられる。その指導手順例をひとつ示しておこう。



- ① 三角錐の展開図を右図のように描く
- ② その展開図で、側面を表す各面において頂点から側面と底面の共有線を表す辺に垂線を下ろす。
- ③ ②において引いた3本の垂線が一点O'において交わることを作図から確かめる。
- ④ ①のように作成した展開図から三角錐をつくり、その頂点OとO'を結んだ線は、②で引いた各線に対して垂直になることを調べる。このとき、三平方の定理の利用も考えられる。

⑤ \*\*2を中心にした、三垂線の定理に関わる説明を、

- 1) 錐の頂点から底面への正射影と面と直線の垂直に関する定義
- 2) 面が交わる2直線によって決定すること
- 3) 下記展開図において側面を表す面は、錐において側面をその面と底面の共有辺のまわりに回転して得られることを根拠にして行う。



## 6 花瓶をつくる

「3」と「5」で学んだ学習の総合課題として次のような学習を行う。

四角錐と四角柱のそれぞれを平面によって切断して作った形を上下にきっちりと組み合わせ、その中に空缶を入れ花瓶にしてみよう。

この組み合わせ図形の中に空缶を入れる、ということから、

○四角柱、四角錐はともに底面に対し直立し、

○組み合わせた図形の上面も下面も正方形で、さらにその2面は平行

を満たし、作図の都合からもうひとつの条件

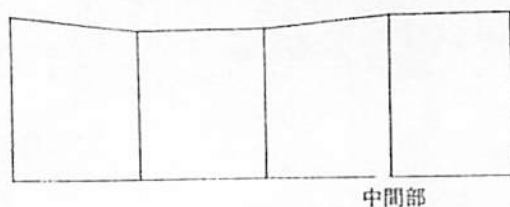
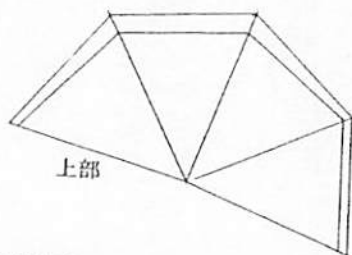
○四角柱と四角錐をつなぎ合わせるための切断面にできる四角形の一組は底面に平行

も満たす、とする。(図9の投影図参照。なお、この図形では、下部にもスカートとして、直立する四角錐をいれた)

この投影図から、

- ① スカートにあたる最下部の四角錐の底面に平行な平面によって切断した四角錐台の展開図
- ② 中間部の四角柱の上部を一組の切断線が底面に平行になるように平面で切断した図形の展開図
- ③ 上部の直立する四角錐を上②と同じ平面で切断した図形の展開図

をそれぞれ作る。そして、それらを組み合わせることで花瓶の外形ができる。



(図9では、下部部分の展開図は省略した。)

## 7 発展(1)

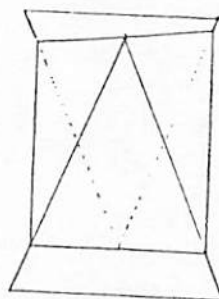
学習課題[3]と[6]は投影図を使うことで、より一般化した状態で次のような手順でその展開図を作図することができる。

## 1) 四角錐の平面による切断図形

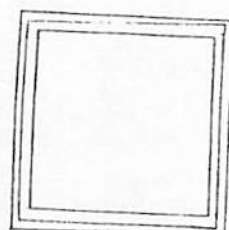
底面は一般4角形ABCD、頂点Oの四角錐で、2つの切断面OACとOBDの交線をOIとする。

この四角錐を平面 $\alpha$ で切断してできる図形の投影図は次の手順で作図できる。

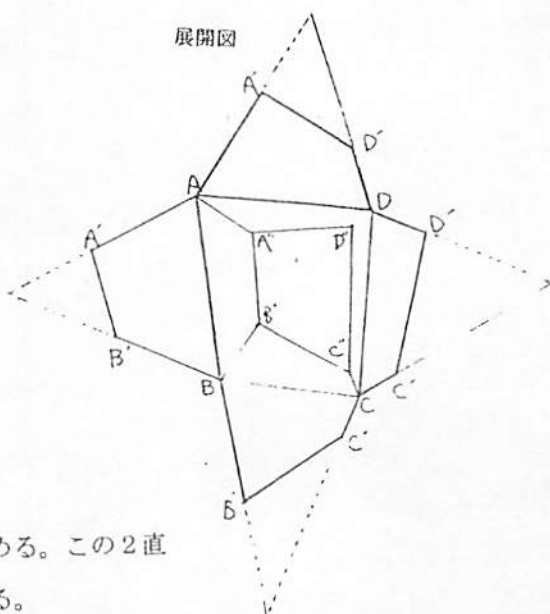
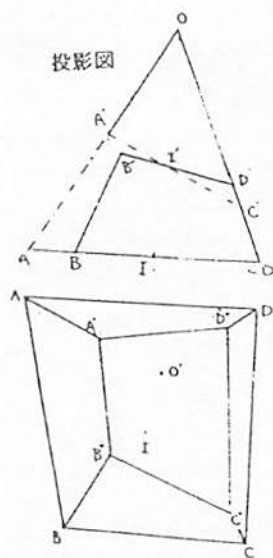
- ① 四角錐の側面図を描く。その側面図において、OIと $\alpha$ の交点I'を定める。



側面図



平面図



②  $I'$  を通る 2 直線  $A'C'$  と  $B'D'$  を定める。この 2 直線によって定まる平面が  $\alpha$  である。

③ 側面図に定められた  $A' \sim D'$  の各点を平面図に投影する。これらの点を順に結ぶことで、四角錐を平面  $\alpha$  で切断してできる立体の平面図が作られる。

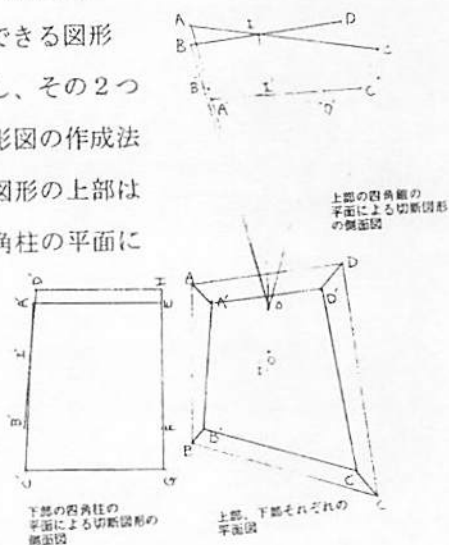
平面  $\alpha$  で切断された四角錐の展開図は、平面図に表示された頂点  $O$  の像  $O'$  と  $A' \sim D'$  の各点の像  $A'' \sim D''$  と三垂線の定理を使うことで作図される。

2) 四角柱と四角錐とをきっちり組み合わせてできる図形  
四角柱と四角錐のそれぞれを同一の面で切断し、その 2 つの図形をきっちり組み合わせてできる図形の投影図の作成法についてひとこと触れておく。この組み合わせ図形の上部は四角錐の平面による切断したもので、下部は四角柱の平面により切断した図形とする。なお、この四角錐は底面に直立しているものとする。

注：四角錐の直立性は仮定しない。またそれぞれの底面を形作る四角形は一般四角形とする。

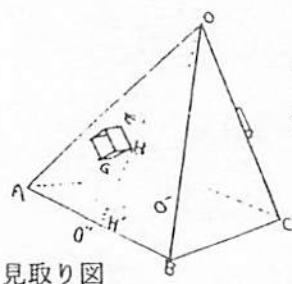
上部の四角錐に関する投影図は上記の方法で

作成される。その側面図で、縦方向の辺と切断面との交点  $A' \sim D'$  の各点から底面に垂線を引くことで、下部部分の四角柱の側面図が得られる。なお、図 11 では、四角錐の



側面図は上部に切り離して書き表した。

### 8 発展(2)-2つの図形の組み合わせとしての相貫体

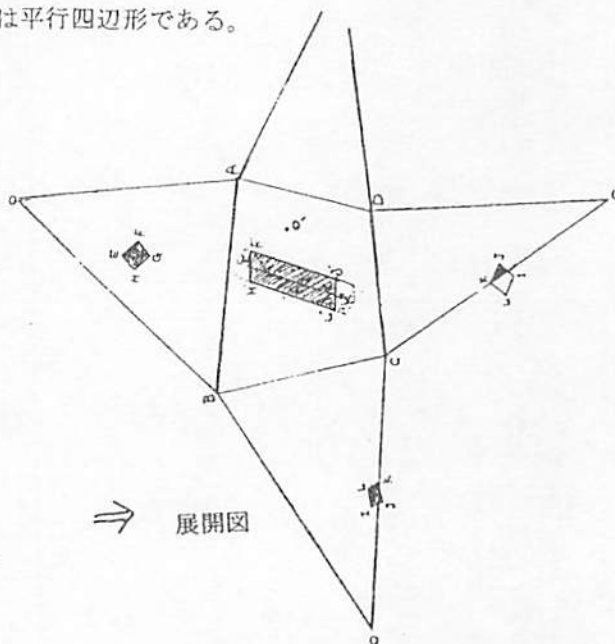
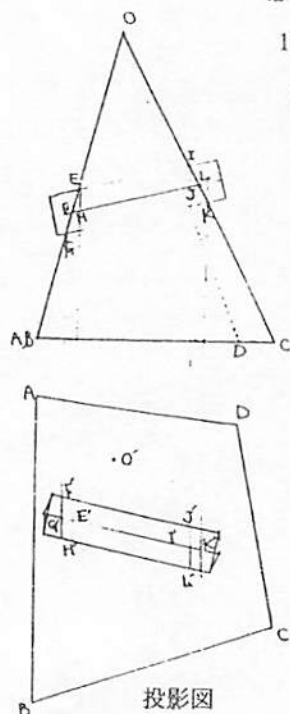


四角錐の向かい合う2つの面に直方体を突き抜くようにした相貫体に関する側面図と平面図を図12のように与える。

注：この投影図からわかるように、直方体は底面に平行、とは限っていない。ただし、直方体の一組の向かい合う辺で構成される平面は底面に対し垂直である、とする。

投影図から、この相貫体に関する展開図を以下の項目に注意して作成する。

- 1) 直方体と四角錐の面が交わってできる4角形EFGHとIJKLは平行四辺形である。



- 2) 平面図上に表示された $E' \sim G'$ と $I' \sim K'$ に対応する $E \sim G$ および $I \sim K$ の各点を面OABとOCDのそれぞれに作図するとき、3垂線の定理も活用する。また、これらの各点が正しく作図されているかどうかの確認のために三平方の定理の利用も考えられる。

注：隣り合う2面を直方体が貫く相貫体も同様に投影図から作成することができる。

#### 参考文献

- 1) 最近目にした外国文献、例えば、

Jan Van Den Brink "Different Aspects in Designing Mathematics Education",  
Educational Studies in Mathematics, vol. 24, no. 1, 1993, pp. 35-64

Rina Hershcowitz et al. "Space and Shape", Alan J. Bishop et al eds., "Inter-  
national Handbook of Mathematics Education", Kluwer Academic Publishers  
, 1996, pp. 161-204

でも、空間図形の学習での直観力育成が強調されている。

2) これらの提案やこれら提案に基づく実践は、次のものに見ることができる；

門田剛年「山道の長さをはかろう」、横地清、菊池乙夫編著「中学校数学の総合学習と課題学習」学校図書、1990、pp. 68-78

Morikawa Ikutaro "Construct a frame of roof of Japanese traditional house",  
Journal of Cultural history of Mathematics, vol. 3, no. 2, 1993, pp. 25-18

森川幾太郎「写真から地図をつくる」、数学教育実践研究会「実践研究no. 9」、1996、pp. 29-38 (この プランは、1995年大阪教育大学附  
属天王寺中学校において柳本哲氏が実践して下さった。この授業での生徒の状況は、数学教育実践研究会「実践研究no. 10」、1997、  
pp. 15-22、に報告されている。また、このプランの小学生で学習できるように改訂したものは、森川幾太郎「相似比」、岩崎書店、1995に示し  
た。)

### Developments of the "cut" solids and a cover of a vase

Morikawa Ikutaro (Yamagata Univ.)

In this paper, I would like to propose following two things;

- 1) Method to draw the developments to a "cut pyramid" and a "cut box";  
These "cut" solids are get by cross sected by an inclined crosssection  $\alpha$  which meet four right or inclined vertical sides of each solid. To draw the development of each "cut" solid, we use following ideas;
  - a. the plane is determind by three points. So, the fourth point included in the plane is determined by the three points to determine the plane.
  - b. to determine the fourth point which is the common points of the fourth vertical sides of the solid and crosssection  $\alpha$ , we use the common point I of the plane  $\alpha$  and two crosssections  $\beta$  and  $\gamma$  which are determine the pair of the opposite vertical sides of the solid.
  - c. We determine four points on the four vertical sides of the solid respectively. Then we connect these points by segments to get developement of the "cut" solid.
- 2) We combine these "cut" solids skillfully to make a cover of a steel can botteled juice or cola. We use it as a vase.