

## 図形の「合同」をめぐる教材論

板垣 芳雄 宮城教育大学

**概要** 現在、小・中学校で教えられている「図形の合同」の意味と導入法について分析考察し、また、それをユークリッド「原論」の記述と比較して、憂うべき状況にあると断ずる。中国は、「幾何」「解析幾何」を教科名に残しており、国定教科書「幾何」には、「合同」概念の知識構築上からみて欠陥はない。最後に、指導要領の変遷から、わが国の図形教育内容に「構造汚染」をもたらした数学教育観とその時代を探る。

## 0. はじめに

中学1年の教材「図形の移動」の知識が有効に働くような問題解決は中学・高校を通じてない。中学2年で、図形の合同を「移動」を基に定義する方式は、上位層の数学理論の悪しき影響の現れなのであろう。影響は、小学校算数にまで及んでいる。算数では、「合同」概念をあえて教えない方がよい。

この論文では、以上のようなことは表立って言うてはいないが、カリキュラムについての発言を書き加えれば、そういう主張に導くような算数・数学内容の論を展開する。

関連して、ユークリッドの「原論」の「図形の合同」の取り扱い方につき触れ、その取り扱いのところについて、中国の中等学校の幾何の教科書について紹介した。

最後に、わが国の指導内容の変遷の見地から、この教材論を補っておいた。

## 1. 「合同」の指導課程

平面図形の合同については中学2年で指導することになっている。

「平面上に2つの図形があり、一方を移動することによって他方に重ね合わせるができるとき、この2つの図形は合同である。」と教科書は記している。[1]

「合同」を、「移動」概念を基に定義しているのである。「移動」には、平行移動、回転移動、対称移動の3つがある、と中学1年で教える。

定義、定理、証明や、合同条件など、論証に係わることは、2年で初めて出てくる。従って、「移動」は、論理の流れでその一環を構成しているのではなく、作図法などの題材と一緒にされて、操作や直観と結びつくところで、指導されているのである。

だから、教育課程の上からは、単に、合同の知識の準備に、移動の観点について教えているわけではない。だが、指導内容としては、あくまでも1年

で指導する「移動」概念に乗って「合同」を説明する構造になっている。

移動という用語を使っているが、出生地の言葉では、合同変換であろう。「変換」は、高校数学・旧課程「代数・幾何」で指導していた「一次変換」の変換である。合同変換は、平面から平面への、距離を変えない変換、一次変換ということになる。

かくして、平面図形とは、変換が作用する平面に乗っているもの、平面に描かれて存在するものである。平面があつてこそ存在するものである。

「図形の合同」については、早くも、小学校5年の算数で指導している。算数教材の図形は、見えるもの、さわれるものの「かたち」に発する。児童のイメージでは、「かたち」は具象を伴い、具体物を背負った概念と考えられる。教師によって、グラフ用紙に描かれた抽象の「かたち」で合同が説明されているときも、具体物が存在するところは、抽象の「面」でも平面でもなく、生活空間である。

教師が紙に描いて用意したのと同じ三角形を画きなさいと指示すれば、児童は、すきとおる紙を重ねて写し、同じのを画こうとするであろう。すきとおる紙がなければ、与えられた見本を切り抜き、それを型紙に使うと、同じ三角形を画く手がある。

定規やコンパスで辺や角を計って同じのを画かせて、合同条件を学ばせる授業案がある。〔2〕 その場合、数学でいう合同条件を学習させようとしているわけではない。学ぶのは、上手な画き方であり、いろいろな画き方である。画き写す体験と、自他の画き方の客観視で個々に何ごとかを学ぶのである。

そういう算数での「合同」の学習で、図形がその上を移り動く舞台の平面は無用である。平面の目印や目盛りで移動の向きや大きさを測る、そういう舞台の平面を、児童は、意識して、切り抜いた2つの図形がぴったり重なるか重ならないかを考えているわけではないからである。

それに対して、図形の移動は、向きと目盛り、言い換えれば、方角と距離を定めた舞台の平面があつてこそ考えられることである。わが国では、中学1年で、その舞台について指導しているということになる。もちろん、高校数学・旧課程「代数・幾何」の一次変換の作用する舞台の平面の導入指導としてではなく、図形の移動を介して、移動を測る舞台を意識するように仕向けているのである。ともあれ、はじめに記したように、中学1年で教える、その舞台での移動に基づいて、2年で「図形の合同」を定めるようにしているのである。

「合同」を説明する構造が、なんと込み入ったものになっていることか。

高校数学・新課程では、一次変換が省かれたが、憂うべきことに、中学数学には、その合同変換と兄弟分の「移動」が、作図法の問題の衣装をまとうて、1年の教材として存在をアピールするまでになっている。

## 2. 「合同」学習の広がり

「合同」概念の形成の姿について考えてみたい。

2つの図形をぴったり重ねられるとき、つまり、2つを合わせたら同じになるとき、これらの図形は合同であるという。

三角形の①を裏返してから移動して三角形②に重ねられるときも「合同である」というのだろうか、と私は迷ったことが何度かある。平面図形①を裏返すには、①と②の描いてある平面をはみ出して動かさなければならない。平面から切り抜いた図形を持ち上げたりしたら、曲がったり、縮んだりするような感覚がともなう。

平面図形の相互の比較は、舞台の平面の上を静かにすべらせて移動させて比べればよい。そうして比べて十分ではないか。

あるいは、また別の感覚が伴っていたかもしれない。

図形には裏と表がある。表は表、裏は裏で、裏返してまで重ねてみて同じだ、いや違うと言うだろうか。

蛇足かもしれないが、厚さのない座標平面は、裏返したら座標の違う平面になってしまう。

算数の教科書は、「きちんと重ねあわせることができる2つの図形は、合同であるといいます。」と記して、「図形をうら返す」ことも移動に含めて説明している。もちろん、ここでは「移動」に重点はなく、「比べる」のに裏返してもよいといっているのである。

理由は説明されない。あえて、理由をつければ、「合同」を教えるのだから、そうに決まっていると、中学数学の内容と整合するようになっているのである。

それが、児童に興味をもたれるか、どんな問題解決に役立つ知識になるか、小学生の知識形成に相応しいかと問われたらどう答えられるだろうか。

中学の内容と整合するようにはしてあるとはいっても、それは、数学の理論の形式から見ればのことである。学習内容の段階的展開から教材の適切性を考えるとき、一つの理論形式との整合は二義的なことである。

ここで、前節で指導課程として記したことを、学習内容の差異の面から再度思い出したい。

中学1年で、図形の裏返しに当たることは、対称移動として取り上げている。

対称移動は、舞台となる平面を固定して定義される。もはや算数の図形の裏返しとは背景が違っているのである。そこは、教科書では、次のような説明をしている。

「図形を、1つの直線を折り目として折り返す移動」

この「移動」は、もはや、日常語の、ものを移す意味の移動ではない。

### 3. ユークリッドの「原論」では

わざわざ、平面上の図形の対称移動という見方を学習しなくとも、論証のレベルで2つの図形の裏返し合同については理解できる。そして、中学では、図形一般でなく、三角形や四角形についての合同を扱うのだから、なおさらのことである。

三角形の合同条件を理解して、論証でそれを正しく使えるようになるのに、平行移動や対称移動の学習は要らない。

ユークリッドの「原論」全巻がそれを証拠づけている。「原論」に、移動の概念がないことが、数学史の上では批判されることであったが、教育の立場からは、移動の明文化なしに、諸定理が証明されているということこそ銘記されるべきことであろう。

「原論」では、「合同」に当たる用語を用意することなく、また、定義一覧に「線」「面」「平面図形」「直線図形」はあるが、合同や移動のことは入っていない。

中学2年の教科書は、「二等辺三角形の2つの底角は等しい。」を例に、「定理」について解説している。

「原論」では、第1巻の第5命題である。

そして、第4命題は、二辺挟角の定理、SAS定理である。「合同」に当たる用語を使わずに、そこを「原論」ではどう表現しているか、ここは、日本語訳をそのまま引用しておく。[3]

「もし二つの三角形が2辺が2辺にそれぞれ等しく、その等しい2辺にはさまれる角が等しいならば、底辺は底辺に等しく、三角形は三角形に等しく、残りの2角は残りの2角に、すなわち等しい辺が対する角は等しいであろう。」

ついでに、英語訳[4]では、この文で「等しい」とあるところは、すべて等しく「equal」である。

合同定理の前に、「合同」の解説があるのではなく、そもそも解説も定義もなく、このような定理のなかでのみ、合同の「等しい」が出てくるのである。

だから、「合同」を説明する「移動」の概念が「原論」にないのは、当然である。[5]

なお、「原論」は、多様に使っている「等しい」を説明してはいないが、「同じものに等しいものはまた互いに等しい。」などの文言で、いわゆる公理で、その使用環境を規定している。

ともあれ、議論をわが国の中学校数学の教材論に戻し、「移動」を学習させることが、生徒の認識を混乱させ、知識を断片的なものにしているのではないかと危惧されることを、もう少し詳しく例証しておく。

上に述べたように「 $AB = AC$ である二等辺三角形 $ABC$ の底角 $\angle B$ と底角 $\angle C$ が等しい。」という命題と、その証明を中学2年の教科書は記している。

「証明のしくみ」などについて書いてある「平行と合同」の章に続く章で、「(この命題のように)証明されたことがらのうち、よく使われるものを定理という。」とあるところである。証明は、頂角を二等分し、2つになった三角

形について、二辺挟角の合同条件を適用するものによっている。

ところで、 $\triangle ABC$ を裏返し、 $\triangle ACB$ として、 $\triangle ABC$ に重ねれば、2つは、二辺挟角が等しく「合同」になる。算数の「うら返し」合同である。

この方が、頂角の二等分線など引かなくていいだけ簡単そうながら、こう教えていないのは、やはり、「証明」らしくないからであろう。あるいは、「証明」について教えるのに適切ではない。三角形をそれ自身の裏側と重ねて、ぴったり重なるとか、だから「合同」であるということに違和感を覚え、思いつかない“証明”なのではないだろうか。

合同条件を満たすという前に、算数の“合同”の定義から合同になるのである。

ところで、頂角を二等分してする証明を、土俵を変えて、中学の対称移動で考えたら、どうなるだろうか。

頂角の二等分線で三角形を折れば半分になって重なる、これを、さらに、舞台を平面にしていなせよ、頂角の2等分線に関し対称移動すれば、三角形は元の三角形の占めていたところにぴったり重なるように移る。

土俵が変われば表現が変わり、舞台が変われば言葉使いが変わる。言いまわしが一定して変わらないように、土俵と舞台を定めてこそ、指導者の思考も学習者の精神も安定し、「証明」が自然に学ばれる。なのに、指導要領を開くと、角の2等分線の作図法は、中学1年では、点の集合の見方で語るようになっている。土俵がくるくる変わり、教材を結ぶ線が、何と込み入っていることか。

角の二等分線について、「原論」の場合を見れば、作図命題として、命題9として書き、ただし「命題」と称しているわけではないが、二辺挟角の裏返し合同で、「合同」などといわずに説明している。

ついでに、二等辺三角形の両底角についての命題の、「原論」の証明は、頂角の2等分線を引いては行っていないことに思い当たる。上でごちゃごちゃ言ったようなことは生じないように命題群を体系化して、記述してあるのである。

#### 4. 中国の教科書では

中国の教科書「九年義務教育三年制初級中学教科書・幾何」では、角の二等分線の作図法や、その証明（吟味）を、上に「原論」について書いたように説明している。三角形の合同条件も、作図操作を基盤にして解説している。

ただし、ここで資料にしているのは、李淑文〔6〕の研究報告「中国の中等教育数学の幾何の内容について、一日本の教科書との比較の観点で一」である。この節では、まず研究報告のなかの「中日両国の中学教科書にある用語の異同」一覧表に注目する。

表には、漢字表記とともに、取り上げている題材の違いも現れている。表記では、正三角形、二等辺三角形、多角形、二等分線は、中国では、等辺三角形、等腰三角形、多角形、平分線と書く。中国で教えていて日本の教科書

に載っていないものでは、隣角、(対頂角)、補角、余角、同傍内角、優弧、劣弧など。逆に、中国の教科書にないものでは、相似の中心、相似の位置、そして、平行移動、回転移動、対称移動。

中国の教科書では、「移動」の考えは要らないのである。ただし、「中心対称、軸対称」という用語は出ている。それぞれ、次のように説明される。

中心対称： 図形を一つの定点を中心として180度回転して、ほかの図形と重なるとき、これら二つの図形はこの点について対称(の位置にある)、あるいは、中心対称(に位置している)という。

軸対称： 図形を(平面上の)ある直線を折り目として折り返して、ほかの図形と重なるとき、これら二つの図形はこの直線について対称(の位置にある)、あるいは、軸対称(に位置している)という。

意味を汲んで、括弧で補ったのは、わが国では6年の算数で、「対称の軸、線対称(な形)」「対称の中心、点对称(な形)」を教えており、それとの混同をさけるためである。

さて、上記の「中心対称、軸対称」は、三角形の合同条件などの後に出ている。日本の「合同」教育の順序のデザインを、図形→平面→移動→図形の合同、とすれば、中国のは、「移動」がなくて、図形の合同→図形の位置関係、となる。そして、裏返しの位置関係というのではない。

以上のような比較から気付いたことで、「対称移動」の「移動」が分かり難いだけでなく、「対称」という用語も対称図形の「対称」と重なって、「対称移動」の意味を定め難い要因になっているように思われる。

初めに、中国の三角形の合同条件の説明は作図的であると書いた。作図的に導いて、しかも、それを「証明の根拠となることがら」などと言わず、「公理」と呼んでいるのである。

辺角辺公理(SAS)、角边角公理(ASA)、辺辺辺公理(SSS)のように呼んでいる。

「公理」については、「教科書・幾何、第一分冊(1年)」の最後の「命題、定理、証明」の節で説明しているのであるが、面白いことに(感心させられたことに)、説明する前から、「二点を通る直線は一つしかない」などを、公理と呼んでこの言葉を使っていることである。

なお、「合同」は、中国では「全等」といい、合同の数学記号も日本で使っているのと違う。合同条件といういい方もしない。「全等判定」という。

## 5. 指導要領の変遷

平林一榮の発言を借りれば、「・・・今の中学校の論証幾何はやめたらよろしい。あれが一番のできそこないです。どこができそこないかというと、直感的なもの、論証的のものがごちゃごちゃになっていて、その区別をしない。」[7]

そもそも、わが国では、教科の学習で、幾何と呼ぶ共通のモデル・領域がなくなって久しく、高校生卒業生にも「幾何」という語は分からなくなって

いるのである。だから、平林は、「(小学校の)先生になる人には、旧制中学の教科書を、一通り勉強してもらったらいい・・・」と言う。

旧制中学のときの教科書から、どのような経過を経て今日のものになったか、まさしく本論のテーマの「合同」、その合同概念の定着の過程を、佐々木元太郎が綴っている。[8] それによると、「移動」は、昭和18年の要目に「図形の運動」として取り上げられている。ただし、本論で考察したような、小学校の「うら返し」合同、中学校の「平行、対称および回転移動」は1970年代に教育されるようになる。これは、「現代化」と呼ばれる要領改訂時に当たる。1980年代の「問題解決、基本に戻れ」の改訂指導要領の実施でも、この部分は踏襲された。

高校の指導要領について見ると、1970年に「平面幾何の公理的構成」なるものが入り、それは、「運動または移動の公理」も含んだ。1978年改訂で無くなる。以来「公理」という言葉は普通教育で教えられなくなった。

なお、1989年改訂の現行の要領には、新設の数学Aに復活したといわれている「平面幾何」に、中学の「移動」教材を受けて「平面上の変換、合同変換、相似変換」の項があるが、それについての議論はここではしない。

佐々木は、このような変遷についても詳しく記しているのであるが、「合同」教育についての論調は、合同用語の定着を教科内容の進歩発展と考え、私が議論している立場とは異なるところに立っていると思う。だから、例えば、昭和18年の教授要目の“中等数学”教科書について次のように結論付けている。

「中等幾何で用語“合同”を論ずる場合、昭和18年、19年の中等学校の準国定、国定の教科書を除いて考えるべきであろう。」

ところが、私の議論の立場からは、「関係観念」の涵養を目的に数学教科内容の統合を目指した過渡期に作られたこれら教科書の記述は、非常に興味深い。「移動」や「対称移動」を現行のように使って「合同」を教えることへの抵抗感が読みとれるからである。第2節に記した私の迷いを支持しているように考えるので、佐々木の引用から、該当箇所をここに記しておく。

「平面上ニアルニツノ図形ヲソノ平面上デ動カシテ、全ク重ネ合ハセルコトガデキル時、ソレラハ全等デアルトイヒ、対称ノ位置ニオクコトガデキル時、ソレラハ互ニ対称デアルトイフ」

そして、「全等又は互いに対称な二つの図形は合同であるという。」と、合同を説明しているのである。

「対称移動」は別扱いというところが面白いだけでなく、合同を「移動」概念を基に定義していないのである。表現の思考水準は、中国の教科書のそれに近いのである。

## 註

[1] 教育出版「中学数学」による。以下、現行教科書の内容に言及してい

るところ、算数についての引用なども教育出版刊による。

[2] 指導事例「図形の合同」、杉本さとい編、算数科のキーワード第10巻「個を生かす」、54～57、明治図書、1989。

この記事のなかで、はじめに、児童の「三つの辺の長さとおもひの角の大きさを測ってかきました」という数値が提示されていて、それに言い及ばれること無く授業が進んだようであるが、その整数値の三角形は「存在しない」ものであるところが「おもしろい」。

[3] 中村幸四郎他訳、ユークリッド原論、共立出版、1971。

[4] Heath, Thomas L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 2nd ed., Cambridge. 1925(Dover1956).

[5] 古典「ユークリッド原論」のこういう読み方は、私は、他所で見聞きしたことがない。

[6] 東北師範大学講師、宮城教育大学大学院研究生、1996. 10. 1. ～1998. 3.31.

[7] 平林一栄、講演「算数教育で見落とされている問題」、近畿数学教育学会誌、第8号、1～14、1995。

引用は原文のままではなく、そのことよりも、文脈を無視して一部分を写し利用していることをことわっておかねばなるまい。

[8] 佐々木元太郎、「幾何用語“合同”と菊池大麓」補遺、日本数学教育学会誌、第78号—1、2～18、1996。

## "Congruence of Plane Figures" As Taught in the Japanese Curriculum

ITAGAKI Yoshio

Miyagi University of Education

In the 1970's, in implementing the new mathematics curriculum in Japan from Elementary School to High School, subject matter was largely changed. And, as it was not very successful when it comes to actual teaching, the curriculum was reconstructed in the 1980's with "coming back to basics" as its very core, and again, in the 1990's. However, the teaching process of the concept "congruence" has always been the same as in the 1970's.

We discuss the "non-utility of introducing congruence" through translations and reflection, from the psychological and theoretical point of view using Euclid's *Elements* as an example.

Comparing the curriculum to that of China, we may observe that Chinese mathematics text-books take classical process such as figure-constructing, axiomatic, synthetic and intensive-teaching.