東北数学教育学会年報
1998. 3. 31 第29号

数学的形式の機能に関する考察（その1）

北海道教育大学釧路校 杉山佳彦

1 はじめに

問題解決的な指導においては，そこでの問題解決活動を通じて何らかの新しい知識・手続き等を，学習者自らがつくりだすことが期待されている。そして，その知識・手続きのなかには，たとえば加法九九，乗法九九あるいは長除法のように機械的・形式的にできるようになるまで，訓練を必要とするものもある。一方そのことは，学習者からすれば，当初の手続きを生み出す問題はともかくとしてそれを自動的にできるようになるまで，理由もわからないままに，訓練を強いられることになる。これは，その学習の中での数学的形式の機能が学習者に理解されていないことからくる問題と見える。

教師は加法九九，乗法九九といった手続きはその後の学習にとっての基礎となるものであり，その後の学習で現れるすべての計算はこれらが自動的・形式的な手続きとして修得されていることを前提としていることを理解している。一方，生徒からすれば，現在訓練中の乗法九九，あるいは加法九九がその後の学習にどう結びつくのかはわからないままでいる。

これは，教師が算数・数学の全体の中でのこれら形式的な手続きの位置を把握しているのに対し，生徒は現在当面している全体の中の一部のみを目の当たりにしていることからくる「ずれ」であると思われる。「システム」という用語を用いるならば，教師は算数・数学というシステムで加法九九，乗法九九という下位システムをみているのに対し，生徒は教師からみたときの下位システムがシステム全体にみえている状況とみえるのだ。

この問題は加法九九，乗法九九あるいは長除法を自由に駆使できることのよさであり，あるいはそのような形式に整えることのよさに関わる問題であろう。

本研究は，この一定の形式に整えることのよさ－形式化のよさ－を，その形式化の結果現われる形式がもつ，機能に関わるものとしてとらえ，以下の問題を考察することを目的とする。

（1）学習者にとって，特にその形式の機能が問題となるのはどのような場合か。

（2）そのような場合，どのような対処の方向があるか。

2 本稿の目的

「形式」とよばれるものそれ自体がきわめて多様であるため，本研究では当面の間，記号表現に限定する。これは，数学教育におけるに「形式」に関する問題の典型的な例が記号表現の場合であると思われるからである。これは次のような理由による。哲学の上では形式とは，“内容または質料に対して事物が発生する仕方をいう。この場合，内容との密接な連関のもとに形式を事物構成の骨格とみる立場と，内容とは無関係に単に事物の外部とみなす立場がある。”[注1] 算数・数学の場合明らかに後者の立場であって，記号表現の場合，まさにこの形式にふさわしいと思えるのである[注2]。さて，この記号的表現の役割を中原[注3]は次のように整理している。

数学的情報を簡潔，明確，厳密に表現する。

数学的情報の抽象，一般化を可能にする。

数学的情報に関わる反省的思考を促進する。
数学的情報の形式的処理, 操作の自動化を可能とする。

このうちの, 最後の二つ, 反省的思考の促進と操作の自動化は, 筆者には代数的な記号表現, 典型的には文字式, の学習の結果, 可能になるものと思える。これが正しいのであれば, 文字式の学習の初期においては簡潔, 明確, 厳密な表現を可能にする, あるいは抽象化, 一般化を可能にするという二点が中心になることが期待される。そして, 本稿ではとくにコミュニケーションという記号一般の役割の中で, とくに「数学的情報を簡潔, 明確, 厳密に表現する」役割に注目し, 記号的表現がこのような役割をはたすことができる背景には,「意味を排除する」という機能がある[注4], という点を指摘する。

本稿ではとくに文字を用いた代数的表現を問題にすることから, 個別的な数を用いた式表現, おはじき等による操作的表現を取り立てて区別することはしない。

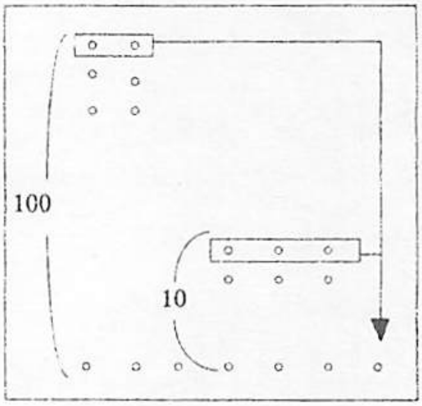
3　九去法について

本節では, 前節でのべた目的のために九去法を事例として取り上げ, これをおはじき等による操作的表現による正当化, 個別的な数を用いた操作による正当化, 文字式を用いた代数的な処理による正当化を比較し, そこから機能の一つ－排除という機能－を指摘する。ついで, このコミュニケーションという場面で前2者から代数的表現に移行するとすれば, そこにはどのような機能が作用していると見えるかを考察する。

命題（九去法）
自然数を9で割ったあまりは, 各位の数の和を9で割ったあまりに等しい。

この命題に対する具体物による操作による正当化を促す場面として, 次のような問題を想定する。

問題
231個のおはじきを各列9個になるように順に並べたときに, 最後の列に何個おはじきが並ぶか。
この問題を割算によることなしに解決するせよ。



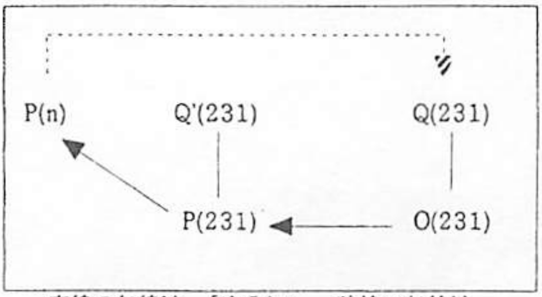
この問題を次の図に示すような方法で解決したとする。この操作に対する数を用いた処理としては, 次のようなものと考えてよい。

$$231 = 2\times100+3\times10+1$$
$$= 2\times99+3\times9+(2+3+1)$$

この二種類の操作をO(231)として一括しよう。その結果, 上述の問題には答えることができたことになる。しかし, この問題の解決のみでは命題の正当化にはならない。これを正当化に関連づけるためにはこの問題とは別な, たとえば「231については命題は正しいか」が必要である。その問題は, たとえば次のようであろう。

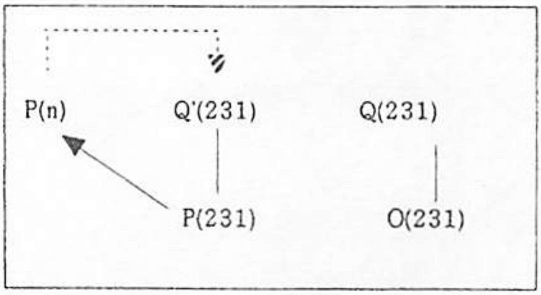
問題'
（231を９で割ったあまり）＝2+3+1である。これは正しいか。

実際のところ，詳細にみた場合はこの問題' と問題とはまったく異なる。しかし，この点はいまはさておく。
問題' に対する答え，「231に対して命題は正しい」をP(231) と表す。すると，命題は，P(n) と表わすことができる。これにたいして，問題を，Q(231)，問題' をQ'(231) とおく。
これらの記号を用いて，ここで想定した命題，問題，操作などの関係を表わせば図のようになる。

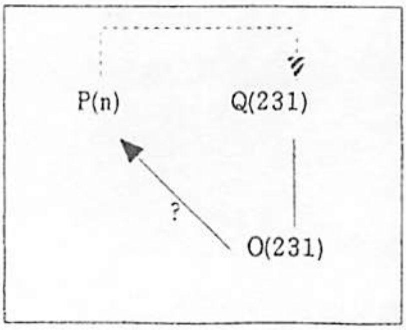


実線の矢線は，「ゆえに」。破線の矢線は命題の問題化。実線は問題とその解答

この図式に現れたもののうち「P(n)」の正当化の文脈で現れるものは，P(231) とO(231) である。そして，これらが P(n) を正当化するものとして作用するとすれば，「231」はいわゆる擬変数として機能することになる。
この図で表された状況を少し分析しておこう。
図には「ゆえに」を表す矢線がふたつある。一つは P(231) から，P(n) にいたるもの，もう一つは O(231) からP(231) にいたるものである。今の場合，このどちらが欠けても，P(n) の正当化にはなり得ない。これは次のようにしてわかる。
case1　O(231)からP(231) にいたる矢線がない場合
この場合，図は次のように変わる。これはO(231) がP(n) に関わりないものとして扱われている状況であるから，図からQ(231)，O(231)を消し去っても同じであると考えてよい。したがって，P(n) を問題の形式に表現を変えたものはQ(231)であることになる。この情況で「P(231) ゆえにP(n)」をみた場合，そこには単純帰納しかみえない。



そして，単純帰納が正当化になり得ないことは当然のことである。
case2　P(231) からP(n) にいたる矢線がない場合
この場合，全く同じ事情でQ'(231)，P(231) が姿を消す。そしてこの状態でもし O(231) からP(n) にいたる矢線が結ばれれば，このO(231) という操作がもつ一般性から，おそらく正当化は終了する。



しかし，これは起こらない。というのは，O(231) がP(n)

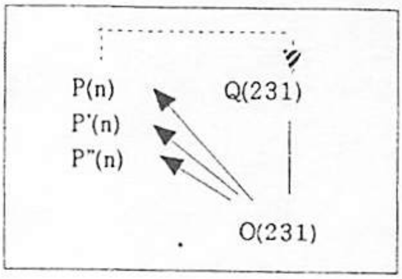
を指す可能性があるのと同様に，たとえば，次のような事例で示唆される命題 P'(n) を指すからである。

(12312 を 9 で割ったあまり)＝(123+1+2 を 9 で割ったあまり)

これをP'(n) と書こう。もちろん，これ以外にも

(12312を 9 で割ったあまり)＝(12+3+1+2を 9 で割ったあまり)

等多くの命題を示唆しうる。つまり，図で示された状況にあったとしても O(231)がP(n) を指し示す必然性はどこにもないのである。これを示すのが右の図である。



もちろん，二人の人間の間での会話という状況でこの場面を考えれば，実際上はこの矢線は結ばれるであろう。しかし，これらだけでは原理的には不可能であると考えてよい。

これは，これらおはじきによる操作あるいは個別的な数計算による限りでは，P(n) の正しさを完全に伝達し得ないことを意味する。

これに対して，文字式による代数的な処理はこのような心配はもはや不要であると考えてよい。そこでは，疑問の余地がないほど明確に，すべてのO(n) が表現されているからである。これが記号表現の長所である簡潔性・明確性・厳密性の背後にある事柄であろう。すなわち，これらの長所は，代数的な記号表現が個別的な数・おはじき等に対する操作が必然的にもつ解釈の多義性・指し示しの曖昧性を排除することができる，という特性に由来するものであるといってよい[注5]。

この点に関連して，次のフッサールの指摘は貴重である。長くなるが引用しよう。

‹‹直接間接の人格的話しかけを必要とせずに伝達を可能にすること，いわば潜在的になった伝達であることが，文字になって記録された言語表現の重要な機能である。・・・文字記号は，純粋に物体的に考察されるならば，そのまま感性的に経験可能であり，そして共同性のうちで相互主観的に経験されうるという不断の可能性のうちにある。しかしそれは言語記号としては，語音と同じように，そのなじまれた意味を呼び起こす。喚起は受動性である。したがって呼びさまされた意味は受動的に与えられるのであり，あたかも闇の中にそれまで沈んでいたすべての能動性が連合的に呼びさまされ，まずは受動的に多少とも明晰な想起として浮かび出るのと似ている。・・受動的に呼びおこされたものが，いわばもとの姿に変換されて，それに対応する意識性へと引き戻されるのである。それは・・すべての人間に本来備わっている蘇生の能力である。・・書き留められた意味形象はいわば沈殿するのである。しかし，それを読む者はそれを再び明証的にし，明証を蘇生させることができる。››[注6]

そして，注として，次のように続ける。

‹‹しかし，このことは決して必然的でもないしまた事実として普通のことでもない。読者はこのことなしにも理解することができるし，理解される当のものを彼自身の能動性なしにともに妥当するという資格で「無造作に」受け取ることができる。この場合，彼は純粋に受動的－受容的にふるまっている。››[注7]

この説明を先ほどの例に重ねれば，次のようになる。我々は代数的式表現によって九去法およびその正しさを理解することができる。それは単に正しい代数的式処理によるから，という

理由によってさえ「無造作に」そして「受動的－受容的に」受け取ることができるほど簡潔・明確・厳密だからである。しかし，それは式表現によって意味形象を「沈澱」させて，手にいれたものであり，その結果，当初の明証性を失う。それを読む者はそれを再び明証にすることはできるが，それは必然的でも普通の事実でもない。[注8] そして，その明証性は，本節の場合，これら Q(231)，Q'(231)，P(231)，O(231) から生じるものであり，絶えず P(n) 以外のP'(n)，P"(n) を生じさせることができるという点で多義的である。したがって，これらから引き起こされる多義性を排除することによって，明証性と引き替えに[注9]，明確さ・厳密さ・簡潔さを手にいれるのであるといえよう。

4　結語

本稿では，数学的形式の機能の一つをその典型的な場合と思われる文字を使用した代数的表現の場合を例として，考察した。

その結果，この種の形式は「多義性の排除」という機能をもつことが指摘できた。また，同時にこの形式に依存した場合と，操作的表現などを利用した場合とを比較・分析することで，操作的表現などの場合にもっていたQ(231)，Q'(231)，P(231)，O(231) をも不要なものとして「沈澱」させてしまうものであることを，フッサールの指摘から，みた。とくにこのフッサールの指摘は，O(231) が P(231) を指し示すことを可能にする「文脈」を提供するQ(231)，Q'(231) をも不要なものとしてしまうことになると理解でき、それによって P(n) は当初のいきいきとした姿をいわばはぎ取られ，文脈とは無関係に伝達可能なものになってしまう。そして，このことによってP(n) は，無造作に，そして受動的－受容的に受け取られるものになる，と思われる。

これらはいずれも簡潔・明確・厳密という記号的表現のよさとうらはらの関係にある事柄であると考えてよいだろう。そして，このようにせざるを得ないのは具体的個別的なものに必然的につきまとう多様性・多義性が，コミュニケーションという目的を妨げる場合であることになろう。

参考・引用文献及び注

注１　哲学事典，平凡社，1992

注２　この点については，中原忠夫，「算数・数学教育における構成主義的アプローチの研究」，平成７年，聖文社，pp.251-271。そこでは，記号表現の対象性，操作性，形式性が指摘されている。また，この記号的表現に関わる理解－記号的理解－に対して，次のように指摘している。‹‹記号的理解を達成するのは，・・二つの記号体系（筆者注；学習しようとしている当該の記号体系，たとえば代数的文字表現の体系と，各自が所有している既存の記号体系，たとえば言語的表現，操作的表現など）に関わる同化作用であり，それだけのエネルギーを要する理解なのである。›› (p.266)

注３　同上書

注４　上掲書　注２

注５　式指導の上で注目される「式を読む」活動は式表現からO(n) を読みとることと理解できる。その場合，Q(n)，Q'(n) は不可欠である。

注６　エドムント・フッサール，ジャック・デリダ序説，「幾何学の起源」，田島節夫，矢島忠夫，鈴木修一訳，青土社，1980，pp.272-273

注７ 同上書，p.273

注８　注４でふれた「式を読む」はここでいう「明証性」を蘇生させる試みであるといってよい。

注９　この明証性は，たとえば中原が指摘する操作的表現の動的操作性にかかわる特徴としてあげた身体性，過程性，反復性，可逆性，多様性から来るものと思われる。上掲書注２，pp. 218-219

Considerations on functions of mathematical forms(1)

Sugiyama,Yoshihiko
Hooked Univ. of Education at Cushier

In this paper, I intend to point out excluding the vagueness of a meaning of concrete operations as function of an algebraic expression, that is a kind of a mathematical form.

Because of having this function, an algebraic expression is a useful tool for our communication. Bu this expression suppress the lively figure of these algebraic one, which appears through concrete operations etc., in order to hold clear, brief and strict.