東北数学教育学会年報

1970　　第1号

目　次

東北数学教育学会
山形市小白川町1－4－12
山形大学教育学部内

巻頭言

数学教育現代化運動が起こってから10年あまり、時あたかも1970年代を迎えるにあたって、わが東北数学教育学会が、ここにその年報第1号を世に送ることができることは、まことに喜ばしいことであります。

さりとはいえ、数学教育の基礎的科学的研究は、まだその緒についたばかりであり、幾多の未解決の問題、未開拓の分野をかかえております。私たち会員はそれに向かって、ともにたずさえて研究の地歩を進めるべくこの学会を結成したのでありました。幸にして同志30名ばかりを得て、論文2編を含む充実した年報を編集することができましたのは、ひとえに学兄諸賢の御熱意によるものと世話人一同感謝しております。

目下、大学・高専を中心にして「数学教育学」の確立につき種々の議論がかわされております。本会も、東北の仲間の意志を反映して、この新しい学問領域の確立に力を入れたいものと考えます。

東北の後進性も少しずつ解消しているようでありますが、数学教育においては、なお関東、関西に比べると若干のひけ目を感じないでもありません。本会がこの後進性を解除するのに大きな力となりますことを期待致しております。

終わりに、会員諸学兄の絶大な御支援、御協力により本会がいよいよさかんになり、本年報もますます立派なものになりますことを願ってやみません。

一言、会員の総意を代表し、年報の発刊を祝し、巻頭の御挨拶を申し上げます。

1970年4月　　東北数学教育学会
世話人一同

東北数学教育学会会則

第1条（名称） 本会は「東北数学教育学会」と称する。

第2条（目的） 本会は、数学教育の基礎的科学的研究に寄与することを目的とする。

第3条（会員） 本会は、本会の目的に賛同する下記の者を会員とする。

(1) 教員養成大学・学部の数学科教官

(2) 数学教育に関心をもつ(1)以外の大学短期大学、および工業高等専門学校の数学科教官

第4条（事業） 本会は、その目的にしたがって、次の事業を行なう。

(1) 総会（年1回）

(2) 研究会開催（年1回以上）

(3) 年報発行（研究論文、雑報、書評、その他を掲載）、会員に配付。

(4) その他。

第5条（世話人） 本会に、世話人若干名をおく。世話人は、総会において選出し、任期は1か年とする。世話人は、本会の事業の企画運営にあたる。

第6条（会計） 本会は、各会員の醵出する年額500円の会費により、会計をまかなう。

（付則） 本会則は、昭和43年10月17日より実施する。

米沢市及び周辺の和算について

千喜良英二

—はじめに—

米沢市及び周辺の和算といえば、それは旧上杉藩の和算ということになる。上杉藩における和算家の系譜，個々の和算家の業績等については、調査の結果をすでに若干発表した。(1)

本稿では、§1で上杉藩の和算の概要を、§2で現存する若干の資料について述べよう。

§1 概説

いままで入手し得た資料からみるかぎり、上杉藩の和算は、元禄の頃、江戸詰めの藩士によって中西流が、同じく寛政の頃関流が伝えられたと見てよいであろう。時代区分，流派等の観点からこれを図示すれば，おおよそ次のようになろうか。

元禄	寛政	天保	明治
中西流	関流移入	関流（城下町） 中西流（周辺）	
1690頃	1800頃	1840頃	1900頃

小林家文書(2)の「中西流算者系図」には次のように書いてある。

祖　中西文左衛門正好

江府之住。天和二壬戌年春分ノ日算数勘講記畢ス。

乃傳来タリ。

直傳　當藩　山田長左衛門忠興

号正卯。享保二十年乙卯七月二十六日卒。在元禄年中於江府以御入料算術稽古而中西流之傳受與儀爾レヨリ以来兵術ヲ傳ヘ世ニ是羽陽中西流算術之元師タリ。

また「想定加倍数傳」(3)の跋文にも

山田正卯先師於武江ニ傳ヘ中西流之算法ヲ、以来羽陽算好之者学ヒ之ヲ。

とある。更に現存の中西流の免許を見ると、みな例外なく、山田の系譜に属している。

以上から　現時点では、山田長左衛門忠興を上杉藩における記録上の最初の和算家と見たい。(4)

山田は、藩士先祖書及び勤書(5)によれば、家督と同時に江戸の藩邸で22年間御納戸役をつとめた。寛文9年(1669)から元禄4年(1691)までである。この間に中西正好に師事したのであろう。

山田から出発して、系譜の大きな流れを追ってゆくと、6伝の黒井半四郎忠寄が現われる。彼は優秀の弟子多くを擁し、藩における中西流和算家の中心的存在であった。しかしやがて、藤田貞資一派の関流が入ってくる。寛政の頃である。

黒井は明和2年(1765)中西流の免許を受けたが、現存関流も学び、死去1年前の寛政10年(1798)に藤田貞資から伏題までの免許を受けている。(6)　時代は、藩の和算の主流が中西流から関流にかわりつつある過渡期であった。

黒井の弟子、小林三平衛紀道は天明7年(1787)中西流免許を受けたが、後には関流に専念した。小林は寛政9年(1797)から同12年(1800)まで江戸の藩邸で御納戸役をつとめ、この間藩命により和算の研究をしている。藤田貞資に師事したのである。この頃、黒井も藤田に師事していたから、小林は嘗ての中西流の師黒井と、関流に関しては同門になったわけである。

間もなく黒井が没し、小林が藩の和算家の中心的存在になると共に、主流ははっきりと、関流に変るのである。

「算法反正鈔」の跋文に次のように書いてある。(7)

龍川江都屈指之算家、父雄山亦算家之巨擘。紀道師事之以傳其蘊奥即関夫子之五傳而為我藩之嚆矢。

小林紀道を、上杉藩における関流の祖と見てもよいであろう。

このほかに、藤田貞資、嘉言父子に師事した穴沢久蔵長秀、また、藤田貞升及び小林紀道の両者に師事した小林甚兵衛直清も見逃せない。この2人は親交があり、それぞれ多くの弟子に教えた。

以上の時期を、関流移入時代(約40年)として特に取上げておきたい。

しかし、城下町米沢の周辺では、黒井の系譜に属する中西流和算家の活躍があったのである。現在の地名で言えば、米沢市成島町、東置賜郡高畠町及び川西町、長井市伊佐沢、西置賜郡白鷹町及び小国町等で、中西流関係の資料が発見されている。

次に和算家の身分を見ると、資料から見る限り、下級武士と富農が多く、町人は皆無である。武士たちは藩の勘定役や代官所の諸役について、村々の肝煎等の富農と共に、行政組織の末端で、藩の産業、財政等に直接結びつく仕事としていた。実績をあげた武士たちは次第に登用されて、藩の中堅として活躍するようになる。

例外も少しはあった。例えば既に述べた穴沢長秀は，「五十騎組」(8) に属する中級武士で，家督を継ぐ前に江戸で和算の研究をし，家督を継ぐと同時に藩校の学館定詰となりエリート教育を受ける。その後小姓として藩主一族の側近に仕えるが，若くして「不調法の儀あり」ということで隠居を命じられる。そして隠居後，自由な立場で和算の研究，教授に専念するのである。

§2 現存する若干の資料について

ここでは めぼしい和算書と算額の若干について述べる。

(1) 四角問答 (9)

これは明暦4年(1658) に中村与左衛門が著したものである。3巻本であろうとは従来から推定されていたが，これを確認する資料がなかった。上，下2巻は知られていたが，中巻が不明だったのである。

昭和43年9月9日，米沢市李山中三角の長谷部直助氏宅で四角問答の写本が発見された。これは梨本述右衛門という藩士の書いたものである。これの内容と，既に知られている上，下2巻と比較すると，明らかに中巻と思われる部分が見られるのである。今のところ，これが四角問答の中巻の内容を推定する唯一の資料である。梨本述右衛門なる人物及び書いた時期がはっきりしないが，これらについては更に検討を加えたい。

(2) 求積及び括要算法 (10)

これらは米沢市内の古物商から入手した。いずれも「穴沢蔵書」と書いてある。既述の穴沢長秀が所持していたものである。

平山諦氏の鑑定によれば，「求積」は関流宗統2代松永良弼

の自筆である。朱の訂正も松永で，関孝和の原本を見て直接松永が書いたものであろうという。かつこれには藤田貞資の印も押してある。穴沢は藤田に師事していたから，この関係で結局穴沢に伝わったものであろう。

「括要算法」には，朱による松永良弼の，また墨による藤田貞資の書きこみのあるのが珍らしい。松永の朱書は，刊本の誤謬を正し不備を補ったものであろうという。松永がまさしく，関の言わんとするところをとらえこれを理解したと断ずる資料として本書は貴重である。

(3) 算額 (11)

米沢地方に揚げられた算額で判明しているものは現在14面である。この中で6面が現存している。

記録上一番古いものは，安永8年(1779)，西置賜郡白鷹町高玉の円福寺観音堂に，東高玉村の肝煎別部庄助が揚げたものである。現存するものでは，文政8年(1825)，同観音堂に別部の孫弟子たちが揚げたものが一番古い。いずれも中西流で，すでに述べた里見半四郎忠寄の系譜に属する。

前者は，西置賜郡白鷹町横田尻の小林篤男氏宅に伝わる写本「算法通率続数記」(12)にその内容が記されている。同書の一問の術文のあとに「寛政五，正月横越邑定付／横目／好ミ別部庄助盛重解」と書いてある。これからも，当時の藩の役人と肝煎の別部の和算上の交友が偲ばれて面白い。

一番新らしいものは，明治18年(1885) 東置賜郡川西町西大塚の八幡神社に揚げられたものである。これは関流である。

以上米沢市及び周辺の和算の大事を述べたが，これが単なる事実関係の記述のみに終らぬよう，大方の叱声を受けつつ，今後

も和算が現代に持ち得る意味を考えてゆきたい。

―― 文献・註 ――

(1)「戎島八幡神社の算額について」日本数学史研究5巻1号。
「上杉藩における和算家の系譜について」米沢女子短期大学紀要第2号。
「上杉藩の若干の和算家について」同上紀要第3号
「円福寺観音堂の算額について」同上紀要第4号
(2) 和算家小林喜兵衛直清の子孫小林仁氏（東京都在住）が米沢市立図書館に寄贈したもの。
(3) 享保20年（1735）藩士青山都道の著書。写本が2冊現存する。
(4) §2 (1)の梨本山右衛門が山田より古いのではないかとも考えられるが、目下確証はない。
(5) 米沢市立図書館蔵。
(6) 黒井の血統をひく山田ヘル氏（仙台市在住）の好意によりこれらの免許の巻物を、他の資料と共に筆者が所持している。
(7) 元治元年（1864）藩士今井直方の著書。5巻。今井は明治32年（1899）まで著書を出した。
(8) 上杉景勝の直臣の子孫で編成された。のちには功績のある下級藩士が、一代限り組入れられたこともある。
(9) 昭和44年4月、本書を謄写復刻した。巻末に若干の解説を加えた。
(10) 近く平山諦、松岡元久氏等により関孝和全集が刊行される。これに本書の記述がある。
(11) 平山・松岡編「山形の算額」（昭和41年発行）及び松岡・千喜良編「山形の算額（続）・山形県算家名鑑」（昭和43年富士短期大学出版部発行）参照。その後の調査で5面（4面が現存）が発見された。

微分積分学の早期導入の教授理論と実証的研究について

三塚正臣

目　次

I 序　論

高専において微分積分学の占る位置は大きく，その発展としての微分方程式，フーリエ解析，ラプラス変換，ベクトル解析などがある。
高専における数学の教育課程は，発足以来16年後の今日，課題性をもつ。
数学教育的立場からみた数学的内容と専門学科との関連的内容がある。特に下学年は専門学科の内容は少ないが，数学と関連が深い教科群が多い。文部省「教育課程の標準」には数学の目標の一つとして「数学が論理的，体系的にくみたてられている過程を理解させ，数学の基本的な考え方を修得させること，また論理的な思考の必要性を理解させ，さらにより進んだ数学の考え方や処理のしかたを生み出す能力を養うこと」「数学における基本的な知識の修得とこれを的確に活用する能力をのばすこと」などをあげている。
このことは，「論理的に思考すること」つまり厳密な論理の展開とその方法的な考察，また数学的な内容，事実に対する理解，吟味ならびに数学的概念の理解ということを十分にふまえていかなければならないことを示すものであろう。
さらに専門学科との有機的な関連を考慮すると，工学の基礎的内容を理解させる為の必要な数学的知識や計算技術を修得させることもたいせつである。その数学的内容の基礎となるものは　分積分学であり，その内容とともに学習させる時期を考慮する必要がある。
このような数学教育的立場から考えると，1年においては厳密な理論の展開の基礎ならびに数学的概念の素地という立場から，可能な限り早く数学的概念の基礎となる微分積分の概念の素地を理解させ考察させる必要性があるのではないかと思う。

本論文の目的は微分積分学を早期に教授する教授理論の究明と，微分積分学を早期に教授した実証的研究について論究を試みることである。導入時期は高専1年時12月から2年4月6時間である。

II．微分積分学の早期導入と教授理論

1．教授理論の背景

微分積分学を早期に導入するにさいしてはこれまでの微分積分学の内容を単に時期を早めて導入しただけでは数学としての知的発達を阻害することになる。また数学的な考え方を促進させるためにも，思考や理解の発達段階に即応した理論展開をすることがたいせつである。

ブルーナーは「教育の過程」においてまとめていっていることばに「学問的な正しさを保持していかなる数学的原理もどんな発達段階のこどもにも学ばせることができる[1]」といっている。
あるいは「どんな科学的な内容でも，そのなんらかの知性的な形において，どんな発達段階のどんなこどもにも学ばせることができる」という仮説を定立している。
またブルーナーは，「教育の過程」においてspiral方式[2]について述べているが，微分積分学の早期導入においてもこの理論が成立するのではないかと思う。

学習過程においては，根深い理解として教材を把握することも必要であり，思考力をすぐれたいきた能力を形成することも必要である。そのためには問題意識をもち，事実を認知し仮説をたてていく主体的活動が要求される[3]。数学の学習過程においても重視しなければならないことである。

2．教授理論

微分積分学の内容は，数学的知識や計算的技術的な内容と理論的内容にわかれるが，早期の導入過程においては，微分積分学の教授上の基本的概念としての諸概念や価値があると思われる素地としての少数の重要な定理や数学的原理を中心として論理性を失わないで[4]，1年の微分積分学のcurriculumを編成しなければならない。

るように教授すべきである。かくして理論追求の素地がつくられると思う。

理論展開の素地をつくる立場とともに定積分を求める定理の証明過程に役立たせる為にRolleの定理，平均値の定理をとりあげた。平均値の定理は応用面もひろく，その成立過程を重視しその方法をRolleの定理との関連において確立させる。

以上微分学における内容をもとにして，教授理論を究明したが，このような教授理論は積分学においても同様に成立する。

積分学においては，まず不定積分を微分の逆としての立場から定義したが，微分計算と不定積分の定義によって，積分の基本公式を導き出し，例を用いて置換積分法，部分積分法の必要性に着目させる。さらに被積分関数の形によって有理関数の積分，簡単な無理関数の積分などの必要性，あるいは，これらの積分をおこなうときに置換の方法が有効であることを置換積分法との関連において考究させるならば，理解も可能になってくるのではあるまいか。積分学における第一のspiralの内容としてもこれらのことは教授可能と思われるが，超越関数の積分については，$f(x)$を有理関数として$\int f(x)e^{x}dx$，$\int f(x)\sin x\,dx$，$\int f(x)\cos x\,dx$などは$\int e^{x}dx$，$\int \sin x\,dx$，$\int \cos x\,dx$などに帰着させることができるので，概念の定着という立場から体制化の段階として取りあつかってよいのではないか。定積分の場合もこれに倣っていくことができよう。面積との関連において定積分を定義したが，一方$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i-x_{i-1})$の存在を仮定し，定積分を定義させ，微分における平均値の定理を適用して$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b)-F(a)$を学習させたが，これを発見的学習という立場からみたとき，$f(x)=F'(x)$とみることや$F(x_i)-F(x_{i-1})$に平均値の定理を適用するならば，成立するのではなかろうかと解決の仮説をたてること，また解決に必要な資料は何であり，解決の過程において役立った資料の適否をどのように吟味していったらよいかなどもか

らせる。この定理によって定積分の性質や，定積分の置換積分法，面積，体積の問題をとりあげ，転移力をみることもできよう。

以上第一学年において微分積分学を導入するときの教授理論を微分積分学の内容と関連させながら理論構成を試みてみた。

これまでの微分積分学の早期導入の教授理論をまとめてみると次のようになると思う。

(1) 微分積分学の基礎概念としての諸概念や価値があると思われる少数の重要な定理や事項，数学的な原理を数学的な厳密性を失わないで素地としての立場からcurriculumを編成する。このような第一のspiralの内容に積み重ねて第二のspiralの内容を考え，概念の深化をはかる。

(2) exampleを与え，学習のねらいを明確にして，学習の必要感を喚起し，解決していく過程を重視しながら内部の構造化をはかる。このさい，学生の思考様式とよく一致させ，関連学習で相まって理解，深化をはかる。

(3) 思考経験を基盤として，思考の統一化をはかり，発見的学習をおこなう。そのために解決に可能な路線を想定しながら漠然とした路線を限定し，これに役立つ情報をつぎつぎに段取りよくとりいれ，組織化をはかって，役に立つ限定条件をみきわめ活用していく。

Ⅲ．導入内容と発展内容との関連構造について

—— 連続性と発展性 ——

1. 極限の概念の構造を第一のspiralの内容においては次のようにとらえた。

数列の極限について[1]

導入内容の数列の極限については例えば「$a_n=\frac{n}{n+1}$において，$n=1,2,3,\cdots\cdots$を限りなく大きくしたときにこの数列は1に近づくが，$\frac{n}{n+1}$と1との差の絶対値がεより小さくなるのは，nがいくらのときからなのか」という内容を提示し，εとして実

これらを第一の sequence とし，2年において同一の基本概念を spiral にくりかえしながら深化させていくならば，概念の構造も明らかに理解させることができ second spiral で練りあげていくならば，第一の spiral の累積の上に立つ身についた数学的能力が形成させるのではないかと思う。[5] このように考えていくと，first Dimension，second Dimension が存在するということになる。

さらに学生の思考様式とよく一致させながら微分積分学の基本概念の理解をはかることが大せつです。学生は何が故にこのような定理が示され，証明するのか疑問をいだく，したがって，第一の spiral の段階においてその定理をとりまく周辺的な見方を理解させ，他の定理との関連あるいは発展性を探索させる。さらに spiral のもつ内部構造を明らかに把握させなければならない。第一の spiral においては少数の重要な概念の理解数学的理論の基盤となるものを究明する必要があり，その為には数学的思考経験が必要になってくる。第2の spiral においては，微分積分学の理論展開にともなう思考行動が必要になってくる。

第一の spiral つまり導入段階においては極限の概念，連続性の概念，連続関数の性質，微分の概念・構造の把握，微分の公式を理解するにあたっては理解過程における認識が必要であり，積分においても同様に，不定積分の意味や性質の把握，諸公式を理解する過程においてもその数学的経験が重視されなければならない。さらに一つの定理が成立するまでの過程とともに，その内部構造を他の定理との関連において多面的に探索しその定理のもつねらいや背景，幾何学的解釈との関連を保ちながらその立場や意味をも明らかにすることが必要がある。

このような教授理論にたって考えてみると第一の spiral の内容として，教材の構造化の第一は極限の概念の構造を明らかにすることであり，このもとに微分の考え方が導入されていく。極限の考え方に立って統一的に構成していくと，変数，無限小の意味，変数の極限，数列の極限，関数の極限，$\frac{\sin x}{x}$ の極限の構造，さらに $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ へと発展させることが出来る。ここにおいて自然対数 e が必要となってくるので，$(1+h)^{\frac{1}{h}}$ について $h=0.1$，0.01，0.001，……に対してこの値は 2.594，2.705，2.717，……というように数表から推測して $h\to 0$ のときの $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は $2.718\cdots$ のあたりに極限値をもつことを把握させ，これを e と定義するというようにして e を導入する。

この極限の考え方が基盤となり微分の概念が導入され，これにもとづいて有理整関数，三角関数，対数関数などの微分が理解される。

微分の考え方が深化してくると関数の微分可能性が論ぜられ，連続性と微分可能性との関係を明らかにすることができよう。さらに微分可能な場合に諸性質や諸公式が導き出されることを理解さすことができる。微分法においては合成関数の微分法によることが多く，例によって合成関数の微分法の必要性を喚起し，その方法を見出させるとよい。さらに，この成立過程ならびに合成関数の微分法を kai として対数微分法が成立してくる。陰関数などにおいても同様であり，関連しているいくつかの役立つ資料をつぎつぎによく段取りをし，限定して，統一的に組織化をはかって活用していくことにより定理などを発見させていく。このような関連づけをおこなって思考経験をなせることによって思考の統一化をはかり，内容を明確に把握させることができるのではなかろうか，概念の形成についてはその構造化をはかるとともに，ねらいを明確に把握させなければならない。

微分学の重要な概念として関数の増加状態，減少状態，極大，極小があるが，増加状態，減少状態，極値の条件はどのような条件か，どのような過程によって成立するのかを重視し自ら発見す

体的に$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{100}$…と与えることによってNが具体的に定まる。
$\varepsilon=\frac{1}{100}$とすると$n>99$となり，$n\geqq100$とするが$N=100$として選べばよいことを理解させる。

$\lim_{n\to\infty}a_n=a$を一般化して考えてみると，数直線上においてaのまわりに任意に小さい限界$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$を選び，この区間が小さければ数列$a_n$のいくつかはこの区間の外側にあるかもしれないが，数列の大きさの方までいったとき，つまりnが十分大きくなって，例えば整数N以上になると$n\geqq N$に対するa_nはすべてこの区間の内部にある。また非常に小さい区間が選ばれたときには，整数Nは非常に大きくならなければならない。区間がどんなに小さくとも極限値aをもつときには，このようなNが存在し，このようなNが見出されればよいことをいえばよい。そこで$\varepsilon=\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \cdots\cdots$と値を与えてやることによって，それにともなってNが次々に具体的に決定され，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$の外部にあるのは$a_1, a_2, a_3 \cdots\cdots a_{N-1}$までであり，内部に入るのは，$a_N, a_{N+1}, a_{N+2} \cdots\cdots$であることをわからせればよい[7]。

このようなことからNのもつ意味も明らかになり，極限の概念に明確な意味をもたせるのではあるまいか。この背景にたって極限値の定義として「正数εを十分に小さい正数として与えたときに自然数Nを適当に定めれば$n\geqq N$のようなすべての自然数nに対して，$|a_n-a|<\varepsilon$が成立つとき，aを$\{a_n\}$の極限値という」というように定義してよいのではないか。このような立場でNを吟味させるとどの項から区間の内部に入るのかなど明らかになると思う。

関数の極限値について[6]

関数の極限値についてもこの考え方を拡張して導入内容において$x\to a$のとき$f(x)\to b$になる意味はまず，$x\to a$というのは，aのまわりに小さい限界を考えて全体の幅が2δである区間を考えたときに，xは$a-\delta<x<a+\delta$であり，δに具体的に数値$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{100}$，$\frac{1}{1000}$，…と与えていくとδはいくらでも小さくなり$a-\delta<x<a+\delta$なるxの値に対する$f(x)$の値は，bを中心とした全体の幅が2εなる小さい限界の内部にあるようにすればよく，このようなxの値に

対して$f(x)$は$f(a)$のまわりに集まって，$f(x)$は$f(a)-\varepsilon$と$f(a)+\varepsilon$との間にあることをいえばよい。

これによって$x\to a$のとき$f(x)$が$f(a)$に近づく過程を明確に理解させることができる。しかもδはεにともなって定まることも理解させることができるのではないか。このような試みによって，極限値の定義として，「εを十分に小さい正数としたとき，これにともなって適当な正数δをえらぶと，$0<|x-a|<\delta$のようなすべてのxについて$|f(x)-b|<\varepsilon$とすることができるときにbを$x\to a$のときの$f(x)$の極限値という」といってよいのではあるまいか。

さらに第一のspiral導入内容として関数の連続の定義を幾何学的解釈にたって「x_1を中心とする幅が2δの垂直な帯内にあるグラフの部分全体がまた$f(x_1)$を中心とする幅が2εの水平な帯内に含まれるような正の数δをみつけることができなくてはならない」というように定義した。またこのようでない場合は関数$f(x)$は不連続になるという定義をおこなった。さらに連続関数の性質，さらに有理整関数，有理関数の極限値，$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$，$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$にまで及んでいった。この第1のspiralの上にたって，極限の第2のspiral（2年における内容）においては，理論の展開として次のようにおこなった。

発展内容の極限値の概念

第1のspiralの内容にたってみると，第2のspiralにおいては理論の展開として，数列の極限の存在を有界単調数列との関係において論じ，数列の収束性を問題とした。これは数学の理論に習熟せしめるためであるがεやδの意味はわかっても，$\lim_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim_{n\to\infty}b_n=b$なるとき$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$，$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab$，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$ $(b\neq0)$をε論法をもって証明させることは困難であった。

数学の理論展開の方法を理解させる一つのモデルとして$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$に関して次のような内容を提出した。即ち「A，Bを正数，nを自然数と考えて不等式$A^{n-1}\{nB-(n-1)A\}\leqq B^n$を証明させ[illegible]に$n+1$，$A=1+\frac{1}{n}$，$B=1+\frac{1}{n+1}$をおくことにより[illegible]$1+\frac{1}{n}$[illegible]

数列は有界減少数列になることから $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ になる」ことを示した。さらに「例として $a_n = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$ を一般項とする数列 $\{a_n\}$ は e に収束する」ことを証明させた。この理論は証明は難かしいが理論展開の一つの方法として論じさせた。第一のspiralにおいては e を具体的計算により求めたが、このような方法によって深化をはかった。

関数の極限については1年でおこなった内容をまとめさせ、極限値の定義を $\varepsilon-\delta$ 論法によって示したが関数の極限の意味が明確に把握されたのではないかと思う。さらに、第2のspiralにおいては $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ の再認から同位の無限小、高位、低位、第n位の無限小、無限大の概念を確立させた。さらに、連続性、連続関数の諸性質を切断の考え方によって理解させようとした。これは微分の基礎となる諸概念を段階的に高め、高度の概念を形成させようとした。この段階になると概念の構造も理解出来、把握することができるようになるのではないか。

2. 微分の導入内容と発展内容.

第一のspiral（1年内容）においては、微分の定義、微分可能性、有理整関数、三角関数、$y=a^x\ (a>0)$ $y=\log x$ の導関数 $f(x), g(x)$ が微分可能なときの二つの関数の和・差積・商の導関数、さらに $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ の微分、さらに合成関数の微分、対数微分、逆関数の微分、媒介変数による微分陰関数の微分などをおこなったのであるが、これから第一のspiralの上に立って深化させた。これによって複雑な関数の微分も可能になる。とくに第2のspiralにおいては微分可能性と連続性の関係、複雑な関数の微分、さらに逆三角関数の微分、双曲線関数ならびにその微分を学習させる。さらに第1のspiralにおいて与えたRolleの定理の証明Lagrangeの平均値の定理の証明を再生させこれを基として Cauchy の平均値の定理・関数の近似値へと発展させる。平均値の定理において第1のspiralにおいては「連続関数 $f(x)$ が $[a, b]$ 内で連続で $f(a)$ と $f(b)$ とが異符号をもつときには、$f(x)=0$ となるような x の値が少なくとも一

つ a と b との間に存在するという」ことを証明し、Rolleの定理を証明し平均値の定理との関連を十分に把握させる。

さらに関数の増減状態極値について述べると第一のspiralにおいては「$f(x)$ がある区間内で連続関数であるとき、$f'(x)>0$ なるときは、x が増すとき $f(x)$ も増加し x が減少するときは y も減少する。このような x に対して $f(x)$ は増加の状態にある。また $f(x)$ が $x=a$ で微分可能で増加の状態にあるならば $f'(a)\geqq 0$, 減少の状態にあるときは $f'(a)\leqq 0$. 故に $f(x)$ が $x=a$ において極値をとるならば $f'(a)=0$ でなければならない。$f'(a)=0$ のときには増加、減少のいずれともいえない。そして極大、極小、極大値、極小値は定義し、「x が増加しつつ a の値をすぎるとき $f'(x)$ が正から負にうつるときには $f(a)$ は極大、$f'(x)$ が負から正にうつるときには $f(a)$ は極小 $f'(x)$ が一定の値をもつときには $f(a)$ は極値でないことを証明させた。さらに $f'(x)=0$ を満足する x の値が一定値として存在しない場合にも極大、極小を求めることができる定理を述べておいたがこれは第2のspiralにおいて深化することとした。

第2のspiral（2年）においてはこれらの定理を深化し、第1のspiralの内容の考え方との関連を把握させながら次のように提示した。

「$f(x)$ は $[a, b]$ において連続で、その内部で微分可能であり、$f'(x)\geqq 0$ であれば $f(x)$ は $[a, b]$ の内部で単調増加である」あるいは、「$f(x)$ が $[a, b]$ で連続で、$f'(x)$ も連続であるとする。もし $f'(c)>0\ (a<c<b)$ ならば $f(x)$ は $x=c$ において増加の状態にある」あるいは「$f(x)$ が $[a, b]$ で連続でその内部の c 以外の点で $f'(x)$ が存在するものとする。もし $f'(x)\geqq 0\ (a<x<c)$, $f'(x)\leqq 0\ (c<x<b)$ ならば $x=c$ は $f(x)$ の極大点である」という諸性質を究明させた。

さらに不定形の極限値を L'Hospital の定理により究明させ 高次導関数の理論にたって、$f^{(n)}(x)$ 或いは $\{f(x)g(x)\}$ について第n次導関数が Leibniz の法則により成立することも理解させた。これによりこのさいの $f^{(n)}(x)$ の値を求めることも、Taylor定理による級数

展開，剰余項の問題，高次導関数を応用しての関数の増加，減少・極大・極小の問題・定理，関数の凹凸，即ち「$f(x)$が$[a,b]$で2回微分可能で$f''(x)\geqq 0$であれば$f(x)$はこの区間で下に凸，$f''(x)\leqq 0$であれば上に凸になる」ことを考えさせ，さらに変曲点の定理として「$f(x)$は第n次導関数まで連続で$f''(c)=f'''(c)=f^{(4)}(c)=\cdots\cdots=f^{(n-1)}(c)=0$，$f^{(n)}(c)\neq 0$かつnが奇数$(\geqq 3)$であるならば$x=c$は変曲点である」ことの証明，さらに方程式への応用，重根，根の限界，根の近似値，不等式の証明問題に拡充させた。これらは第一のspiralの内容を基盤として深化拡充させていくならば教授可能と思われる。

3、積分の導入内容と発展内容

第一のspiralにおいては不定積分の定義，微分法の逆として基本積分の公式を導入した。つづいて関数の和，差の積分，置換積分法，部分積分法，$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$，部分分数による有理関数の積分，簡単な無理関数の積分，超越関数の積分$\int f(x)\sin x\,dx$など，$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$，定積分としての定義，置換積分法，部分積分法面積，体積などを調べさせた。第二のspiralにおいては，置換積分法，部分積分法の複雑な問題，無理関数の積分，とくに$\int f(x,\sqrt[n]{ax+b})dx$，$(a\neq 0)$，n正整数 $ad-bc\neq 0$として$\int f(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$，$\int f(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$，$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{p}{q}}dx$，(m.n.p.q整数)，超越関数の積分$\int\sin^m x\cos^n x\,dx$，で例えば$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{x}}dx$，$\int\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx$，$\int x^3(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}dx$，$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$などを取りあげる。さらに定積分に関する理論として，定積分の定義を厳密におこない，定積分の計算，定積分に関する平均値の定理，定積分の置換積分法，さらに定積分の定義を拡張吟味して，上限，下限の一方または両方が無限大となる場合，被積分関数$f(x)$が下限aまたは上限bにおいて不連続となり他のxの値において連続である場合，被積分関数$f(x)$が区域$[a,b]$内の一つの値$x=c$においてだけ不連続となる場合の積分，無限級数の収束発散との関連についての問題さらに平面図形の面積，立体の体

積へと定積分の応用に発展していく。これらは理論的に展開されるのであるが第一のspiralの上にたって展開される故，理解もはばされるのではないかと思われる。

発展内容は導入内容をすべてまとめて構成した上で，発展拡充，深化させていくものであるから，学生は理論展開においてもまた発展内容においても，理解は困難でない。

Ⅳ. 微分積分学の早期導入の教授内容の限界と導入内容の理解構造について

1. 早期導入の教授内容

早期導入の教授内容においてはさきに述べた通りである。この第一のspiralとして実証的におこなった結果は次の通りである。

まず早期導入の教授内容について述べよう。

(1). 極限と連続

①. 変数と関数．②無限小，無限大の素地 ③.数列の極限の概念，意味．④数列の極限値に関する定理．⑤関数の極限の概念，意味 ⑥関数の極限に関する定理．⑦$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ⑧自然対数eの導入 ⑨$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$，$\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$ ⑩関数の連続，連続関数の性質

(2). 微分法

① 微分係数，導関数の導入 ②，微分係数の幾何学的意味 ③微分係数 ④.整関数の微分，sin，cos，指数関数，対数関数の微分などの基本公式．⑤関数の和.差.積.商の微分．⑥合成関数の微分．⑦対数微分法．⑧逆関数の微分．媒介変数による微分．⑨陰関数の微分，⑩関数の極大極小の第一次指導．関数の増加の状態．極大，極小とその条件，二次関数，三次関数の極大、極小．⑪Rolleの定理と平均値の定理

(3) 定積分

1 不定積分

①不定積分の定義．②不定積分の基本公式 ③逆行積分法 ④置換積分法 ⑤部分積分法．⑥簡単な有理関数の積分．⑦簡単な無理関

数の積分．⑧簡単な超越関数の積分

2.定積分

①定積分の定義　②　定積分に関する性質．③置換積分法

④部分積分法　⑤定積分における平均値の定理

⑥平面図形の面積．立体の体積

2.導入内容の限界と導入内容の理解構造

(1).極限の概念について

数列の極限の概念ならびに関数の極限値については「導入内容と発展内容の関連構造」の項（前章）においてその教授内容を述べておいた。

数列の極限値について，εが具体的に与えられたとき，$|a_n - a| < \varepsilon$ となるのはnが具体的にいくらのときか。数直線上においてaのまわりに任意に小さい限界 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ をえらび，この区間が小さければ数列 a_n のいくつかはこの区間の外側にあるかもしれないが，数列のさきの方までいったとき，つまりnが十分大きくなって，例えば整数N以上になるときn≧Nに対する a_n はすべての区間の内部にある。区間がどんなに小さくとも極限値aをもつときにはεによってこのようなNが存在し，$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ の外部にあるのは $a_1, a_2, a_3 \cdots a_{N-1}$ までであり，内部に入るのは $a_N, a_{N+1}, a_{N+2} \cdots\cdots$ であることをわからせればよい。このことによってNのもつ意味も明確になり，どの項から与えられた区間の内部に入るかは，上位群85%，中位群66%下位群68%の理解度で，全体的には75.5%の理解度であるので十分な理解力といってよいのではないか。

関数の極限値について $x \to a$ の意味，ならびに $f(x) \to b$ の意味を明らかにしたが，aのまわりに小さい限界を考えて全体の幅が2δなる区間を考えたときに，xは $a-\delta < x < a+\delta$ であり，このxの値に対する $f(x)$ の値は，bを中心として全体の幅が2εなる小さい限界の内部にあるようにすればよく，このようなδの

値に対して $f(x)$ は $f(a)$ のまわりに[illegible] $f(x)$ は $f(a)-\varepsilon$ と $f(a)+\varepsilon$ との間にあることをいえばよいが，これによって $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が明確に理解される。これは，[illegible] $\lim_{x \to 3}(2x+1) = 7$ を用いて上の議論を展開し，δを0.01とするとεは0.02となり，$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ でありこのδならば $2x+1$ と7との差の絶対値はεより小さくなることを理解させた。この問題においてεとδとの関係を調べさせたところxを $3 \pm \delta$ と考え，$2(3 \pm \delta) + 1 = 7 \pm 2\delta$ の 7 ± 0.01 から $2\delta = \varepsilon$ なる関係を見出したもの，xの[illegible]部分と[illegible]部分の割合を考え[illegible]として $\delta = 0.005$ と考えたものもあり，これらの関係を把握していたものは全体的に72%であった。これによって関数の極限値の定義として「εを十分に小さい正数としたとき，これにともなって適当な正数δを選ぶと，$0 < |x-a| < \delta$ のようなすべてのxについて $|f(x) - b| < \varepsilon$ とすることができるときにbを $x \to a$ のときの $f(x)$ の極限値という」といってよいであろう。さらに例として $\lim_{x \to \infty} \frac{x+1}{x} = 1$，$\lim_{x \to 1} \frac{1-x^2}{1-x} = 2$ を示し，体制化をはかった。

連続関数の性質は幾何学的解釈にたって直観的に理解させ，これを用いて中間値の定理を探究させた。関数の連続性については幾何学的解釈を示し（前章）$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$（有限確定）ならば $f(x)$ は $x=a$ で連続であり，$f(x)$ の極限値が無限大または不定，あるいは有限確定でもそれが $f(a)$ と一致しないとき，[illegible]しないとき $f(x)$ は $x=a$ で不連続であるという定義を導入し，[illegible]の連続性を論じさせたが深化の段階は第2の[illegible]なることにした。

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ に関連して [illegible] を例示し，[illegible] を理解することはできなかったが，[illegible]た。この問題は上位群82%，中位群[illegible]，下位群[illegible]%の理解度で，全体的に[illegible]%の理解度であ[illegible] $2x-1$ を $-\sin x$ に変形することに[illegible]

[illegible]

理解度もまた78%であったところからみれば、このくらいまでは可能ではないかと思う。

基礎概念の一つである自然対数 e については2年における微分との関連を考えて前章で述べたように $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ については $h=0$ とおいたのでは 1^{∞} の不定形になるので、$h=0.1, 0.01, 0.001\cdots\cdots$ に対して $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は 2.594, 2.705, 2.717, 2.718……というように数表から推測して $h\to0$ のときの $(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は 2.718……のあたりに極限値をもつことを把握させ、$\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ は一定の極限値をもつという理論展開は2年において論ずることにしこの結果を認めこれを記号で e とかくことにして $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$ になることを理解させた。この方法は直観的ではあるが e の導入法の一つであり、導入段階としては理解できるのではないか。さらに $\lim_{x\to0}\frac{\log_e(1+x)}{x}=1$ を導いたが $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ の論理、即ち $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とおいたとき、$z=\log_a y$ は、$(a\neq1, a>0)$ $x\to0$ のとき $y\to e$ 故 $x\to0$ とすると $z\to\log_a e$ に変換される論理が理解できないのも多く、これらの関連ならびにこのように変換する根拠の理解がなされなかった。このあたりがあるいは限界なのかもしれない。

(2)、微分について。

微分係数、微分可能、導関数の定義を導入したが、例として $y=\sin x$, $f(x)=\cos x$ をあげ、これらの導関数を求めることによって定着をはかった。これらは、導関数の定義ならびに微分係数の幾何学的解釈、極限値の計算の習熟により理解がなされた。さらにいえば微分係数の幾何学的意味 [illegible] 三角関数の導関数においては $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ との関連でうまくいくことによって三角関数の変形をなかなかうまくできず、それぞれの構造の上から [illegible] を把握して十分な理解がなされた。これらの理解度は88%であった。連続性と微分可能性の問題について、$y=|x|$ の $x=0$ における微分可能の問題を考えさせたが、理解 [illegible] 微分係数の幾何学的意味は理解 [illegible]

うが、$f(x)=a$ で微分可能でなければ、接線は存在しないが、$f'(a)$ が ∞ になるときには、接線は y 軸に平行になることを把握させたにとどめ、第二のspiralにおいて深めることにした。関数の和、差、積、商の導関数については厳密に $\varepsilon-\delta$ 論法を用いることは困難なので、無限小の考え方を用いて理解させた。

関数の商の微分公式を用いて、$y=\tan x$, $y=\cot x$, $y=\sec x$, $y=\mathrm{cosec}\, x$ の導関数はほぼ理解されたと思う。整関数 $y=x^3-2x^2+4x-5$ の微分は理解度95%、$y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ の微分の理解度は82%で、下位群のものは方法は把握していたが、計算上のあやまりがみられた。

合成関数の微分は、微分計算において重みは大きく、$y=f(t)$, $t=g(x)$ で $\Delta x\to0$ のとき $\Delta t\to0$ となる変換を強調し $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$ の意味を把握させることが重点であった。合成関数の微分は $y=\sin 6x$, $y=\sqrt{2x+3}$, $y=(1+5x)^4$ の微分においては理解度は85%〜90%で、僅かに下位群において、t を x で微分することの意味が理解されなかった。

対数微分の1例として $y=x^x$ の微分の問題を解決させたが、両辺の対数をとり x で微分するという方法の方向は理解してはいたが、$x\log x$ の微分との関連が把握できなかったものもあり、とくに下位群のものは殆んど理解できなかったが、これらの理解度は80%になっているところをみると、このような問題も学習させることが可能ではないかと思う。しかし、$y=\log_e \sin x-\frac{1}{2}\sin^2 x$ の微分については、正答率は上位群は90%であるが、中位群は41%、下位群は10%位であった。このあたりの問題が限界になってくるのではなかろうか。解決のできなかったものは、$\log_e \sin x$ の微分で $\sin x$ を t とおくことを把握できなかったものであり、合成関数の微分の意味にfeed backしていく必要があった。

陰関数の問題の1例として $x^2+xy+y^2=1$ について $\frac{dy}{dx}$ を求めさせたが、両辺を x について微分することは把握していたが、解けなかったものの誤解は y を x について微分、[illegible]

の微分であり，合成関数との関連がつかなかった。

演習問題としてとりあげたもののうちいくつか示すと $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$, $y=\log(x^2+2x)$, $y=x^2\cdot 2^x$, $y=\cos(a-bx)$, $y=\log\frac{x^2}{1-x^2}$, $y=x^{\sin x}$, [illegible], $\begin{cases}x=a\cos^3t\\ y=a\sin^3t\end{cases}$, $e^y-x^2+xy=0$ などでこれらが限界を示すものと思われる。

(3). 関数の増減，極大・極小について．

$f(x)$ がある区間内で連続関数にあるとき，$f'(x)>0$ なるときは x が増すとき $f(x)$ も増加し，x が減少するとき，y も減少する。この x に対して $f(x)$ は増加の状態にある。また $x=a$ が $x=a$ で微分可能で増加の状態にあるならば $f'(a)\geqq 0$，減少の状態にあるときは $f'(a)\leqq 0$，$f(x)$ が，$x=a$ において極値をとるならば，$f'(a)=0$ でなければならない。x が増しつつ a の値をすぎるとき $f'(x)$ が正から負にうつるときは $f(a)$ は極大，$f'(x)$ が負から正にうつるときには，$f(a)$ は極小，$f'(x)$ が一定の値をもつときには $f(a)$ は極値ではないことが中心の理論になるのであるが，内容は理解していた。理論展開は第二のspiralの展開の素地としておこなった。増減，極値問題については、初歩の段階（第一次導関数による方法）は次のようにほぼ理解されたと思われる。$f(x)=x^3-6x^2+11x-6$, $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3$ などの増減，極大，極小に関しては殆んどのものが解決していた。しかし，$f(x)=\frac{x}{(x+1)(x-1)}$ の場合や定型化されない場合，例えば $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}$ のように $f'(x)=0$ とするような x の値が存在しない場合の極値問題については「$f(x)$ が $[a,b]$ で連続で，その内部の c 以外の点で $f'(x)$ が存在するものとする。もし $f'(x)\geqq 0\ (a<x<c)$, $f'(x)\leqq 0\ (c<x<b)$ ならば $x=c$ は $f(x)$ の極大点である。」という性質の構造内容ならびにその証明が難かしいので理解困難であったようである。誤解のしかたは，増減表はつくられたが $f'(x)$ の符号を把握することができず，極小値を把握できなかったものが中位群・下位群のものが殆んどであった。また上位群のうちの20%はほぼ把握できたが，グラフそのものがまちがっていた。

この問題の正答率は40%に過ぎなかった。したがってこれらの問題のほかに三角関数を含む関数の増減，極値問題も第二のspiralにおいて論じなければならない課題であろう。

微分における平均値の定理の証明の理解度は68%くらいであったが，他は $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$ とおくこと，あるいは $F(x)=f(x)-f(a)-k(x-a)$ とおくことなどの意味が理解できなかったこと，Rolleの定理との関連が把握できなかったようである。さらに第二のspiralにおいて，とりあげ定着させなければならない内容になるであろう。

(4)、積分法について

不定積分や定積分についての導入内容はさきに示した通りである。不定積分の基本公式は微分の逆演算によって理解される。しかし，$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$ や $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}\ (a>0)$, $\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\ (a\neq 0)$ は逆三角関数を含むが故に第二のspiralにおいて扱うことにした。

不定積分の第一のspiralにおいて中心となるのは，置換積分・部分積分であろう。いまこれらの理解の様相をいくつかの例を示そう。はじめに直接積分法については理解はよいと思う。置換積分法については $\int\sin 2x\,dx$, $\int\sin^2x\cos x\,dx$，やや複雑な $\int\sqrt{a^2+x^2}\,x\,dx$ を中心として論じてみる。$\int\sin 2x\,dx$ については置換積分に中心概念である $2x$ を t とおくことの把握によって，$dx=\frac{1}{2}dt$ となることをとらえ，殆んどのものが正しく応答している。また $\int\sin^2x\cos x\,dx$ についても $\cos x\,dx=d(\sin x)$ になることを把握し，殆んどのものがよく理解している。$\int\sqrt{a^2+x^2}\,x\,dx$ についてはこれを部分積分法とみておこなっているものが多く，この方法をとったものは結局解くことにいたらず正答応答率は72%であった。

これからみると $\sqrt{a^2+x^2}=t$ とおくこと，または $a^2+x^2=t$ とおくことの見通しがたたず，いくつかの解決の条件を想定しながら解決に役立つ条件をよく認識化していかなければならないこと

を示している。一方 $\int\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$ の正答率は高く88%位であった。これと前者の $\int\sqrt{a^2+x^2}\,x\,dx$ の正答率の差が15%もあるが、これは $\int\sqrt{a^2+x^2}\,x\,dx$ は積の形になっているが故に直ちに部分積分法によるものであろうと考え、置換積分法の方法をとらなかったからであろう。このような考え方をしたものは中位群、下位群にそれぞれ30～40%おった。置換積分法や直接積分法の問題としては $\int e^{-3x}dx$, $\int\sqrt{(5-6x)}\,dx$, $\int\frac{e^{2x}}{1-3e^{2x}}dx$, $\int\frac{1}{x(\log x+1)}dx$, $\int\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ などである。部分積分法の方法は理解しているが計算過程においての誤りがみられる場面もあった。結局習熟することが大切になると思う。部分積分法で扱った問題例は $\int xe^{ax}dx$, $\int x^2\sin x\,dx$, $\int\log x\,dx$, $\int x^2e^x dx$ などで、$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx$, $\int\sin^n x\,dx$ は課したが、やはり困難であった。さらに sin, cos の倍角などの公式を用いる場合の積分例えば $\int\sin^2 3x\,dx$, あるいは $\int(1+2\cos x)^2dx$ などの積分を課したが、積分そのものよりも三角関数の変形に中心がおかれたようで、複雑な有理関数の積分例えば $\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$, あるいは複雑な無理関数の積分 $I=\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$, $I=\int x^2(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$, $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^4}}$ などとともに第二の spiral (二年内容) の内容において学習させることにした。簡単な無理関数の場合として取扱ったものは例えば $\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$, $\int\sqrt{x^2+a^2}\,x\,dx$, $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$, $\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}dx$, $\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$ などであったが、いずれも置換積分の考え方と同様の考え方で解くことができたようであり、理解度も高かった。これらから不定積分の意味や原理的内容は理解されており、このような簡単な問題は解くことができるのではないかと思われる。

また定積分としての理解の様相として $\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$ を例としてみると、この解決の類型は大きく二つにわけられた。一つは $\sqrt{1-x}$ を t とおく方法と、一つは部分積分法の考え方によるものである。後者は各群にみられたが、正答までにはいたらなかった。また前者においても t による上端、下端の変換に誤りがみられ、正答応答率は68%であった。しかし、方法的に正しいとみられるものは

誤答反応者の半数もいることからみると定積分の計算もある程度可能ではなかろうか。

面積を求める問題の1例として曲線 $y^2=4x$ と $x^2=4y$ とで囲まれた部分の面積を求めさせたが完全正答率は65%であった。この定積分については解法の方向を見出しているものは上位群、中位群に多いが、両曲線のグラフを正しくとらえないので、被積分関数を求められないものが大部分であった。また $f(x)$ は $[a, b]$ で連続として $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ を取り扱ったがその理解の様相を述べよう。

$f(x)$ が $[a, b]$ で連続、$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$ であるならば $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ であることを説明させたが、この理解の構造は次の通りである。

A類型　$[a, b]$ の n 分割の各区間に $F(x)$ についての微分の平均値を適用して $F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ を求め、分割を十分細かくして極限をとり右辺は、$\int_a^b f(x)dx$ に収束することを述べて $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ を求めたもの

B類型　A類型でやや厳密をかいているもので証明の方向は理解しているもの

C類型　$[a, b]$ の n 分割の各区間に $F(x)$ についての微分の平均値の定理を適用したが定積分の定義との関連づけが出来なかったもの。

D類型　その他のもの。

A類型は完全正答型であって62%, B類型は25%, C類型は7.5%, D類型は5.5%であった。上位群はA類型、B類型に分布しているが少数のものを除いてはA類型であった。中位群はA類型、B類型、C、D類型に分布しているがその群の50%はA類型、32%はB類型、それ以外はC類型、D類型であった。また、下位群は殆んどC類型、D類型であった。こうしてみると、このような理論展開はほぼ理解させることができるのではないかと思われる。

以上導入内容の限界と導入内容の理解の構造を中心として考察

してみたが，さきに示した導入内容は高専1年の12月から2年の4月までの期間で，教授時数16時間で教授可能ではないかと思われる。

Ⅴ 結語.

高専における微分積分学の早期導入の教授理論と実証的に究明した内容について述べたが，微分積分学の概念やこれに連なる基本的な考え方がこれによって1年において素地として理解されたと思う。これらの導入内容にもとづいて2年において微分積分学の理論を展開していくならば，導入内容を再認し，深化をはかることが出来る。それと相まって，微分積分学の理論の理解も深まるのではないかと思われる。

早期導入の内容は実証的に認められたとはいえ，可能と思われる限界まで取扱ってみたので尚一層の吟味を要すると思う。

本論文で得られた結果を要約してみると，次のようになると思う。

(1). spiral 方式により第一の spiral の導入内容にもとづいて第二の spiral の内容へと進めるならば，導入内容の再認深化をはかることができる。

(2). 早期導入に際しては少数の重要な定理や微分積分学の原理を中心として厳密性を失わないで導入内容を編成しなければならない。

(3). 早期導入に際しては，微分積分学の定理や原理をとりまく周辺的なみ方を理解させるとともに，他の定理や内容との関連性を探究させ，発展をはからせる。さらに example を通してねらいを明確にし，必要感を与えることがたいせつである。

(4). 諸概念の理解に際しては，その過程において仮説をたて，思考認識を重視し，統一化をはかり，内容を明確に把握させなければならない。

(5). 微分積分学の早期導入の教授内容は，極限の概念，微分の基礎概念，基本公式，合成関数の微分，対数微分法，逆関数の微分，媒介変数による微分，陰関数の微分，三次関数までの増減，極大極小，Rolle の定理，平均値の定理まで究明することが可能である。不定積分においては，直接積分法，置換積分法，部分積分法，簡単な有理関数，無理関数，簡単な超越関数の積分法，定積分においては，その定義，性質，置換積分法，部分積分法，面積，立体の体積までは理解され，これらの内容が導入内容として可能なことが実証的に認められた。

(注) この論文は1969年日本数学教育学会第51回全国数学教育研究大会大学部会高専分科会において発表したものをまとめたものである。

文献

1). J.S. Bruner : The process of Education
教育の過程，鈴木・佐藤訳，岩波書店　P.15－P.19.

2). 前掲　1) P.66－P.69
広岡亮蔵著：ブルーナー研究，明治図書　P.91－P.96.

3) 広岡亮蔵著，教育内容の現代化，明治図書　P.164.

4). 前掲　2). ブルーナー研究　P.91.

5) 前掲　1).
前掲　2). ブルーナー研究　P.91－P.96

6). 三坂正臣：微分積分学の早期導入と極限の概念の理解構造について日本数学教育会：全国数学教育研究大会大学部会高専分科会(1968年)において発表

7) R.クーラント
H.ロビンズ 著　森口繁一訳　岩波書店
数学とは何か　P.286 － P.334

8) J.S. ブルーナー著. 田浦・水越訳
教授理論の建設　黎明書房

9). J.S. ブルーナー著. 橋爪訳
直観・創造・学習　黎明書房

10.) J.S. ブルーナー編. 塩田、田浦訳.
学習についての学習. 上.下. 黎明書房.

会務報告

1 庶務

(1) 年会

昭和44年10月7日午後1時より山形大学教育学部同窓会館において第1回年会を開催した。

久米成夫氏，千喜良英二氏の研究発表，松岡元久氏の資料提供，竹内芳男氏の司会による研究討議と，有意義な数時間を過ごした。

研究会終了後，会務につき報告，協議がおこなわれ，次のことを話し合った。散会は午後6時すぎであった。

- 会務報告は，年報にのせることで了承された。
- 世話人は，引き続き，久米，竹内，松岡の3名が依嘱された。
- 年報を今年度中に発行する。題名は「東北数学教育学会年報」とする。
- 研究論文は，審査を経て掲載する。（ただし，第1号はこの限りでない。）
- 次回の年会の，開催日時・場所などについては，世話人に一任された。

② 会報

第1号を，昭和44年10月22日に発行，会員に配布した。

③ 年報

第1号の編集を昭和45年2月に世話人において行ない，4月に発行することになった。なれないために事務処理がおくれたことをおわびす

き。経費不十分のためとう写ファックスによる手刷り印刷にするのやむなきに至ったが，内容は論文２編を含めて充実したものになった。

2．会計報告

収入　13,500円　　　支出　2,238円

（内訳　500円×27人）　内訳　通信費　1,788
　　　　　　　　　　　　　　消耗品　　　50
　　　　　　　　　　　　　　事務費　　 400

差引次年度繰越金　11,262円

〔注〕年報第１号印刷代約7,000円，同発送費1,000円を４月中に支出する見込み。

編集後記

大変遅くなりましたが，ここに漸く東北数学教育学会の機関誌たる年報の第１号をお届けできる運びとなりました。

この創刊号がどのような内容のものになるかは本会の将来を方向づけるものともなりますし，編集担当者一同いろいろ気をもみも致しましたが，会員の研究の成果を世に発表するに充分な，論文を２編含んだこのように充実したものができて，大変嬉しく存じて居ります。ただ，世話人の周囲に人事の移動等があって，折角の玉稿を早くいただいておきながら編集に手間どりましたこと，また，印刷の技術の未熟の為にこの様に読みづらいものになってしまいましたことなど，誠に申し訳なく存じます。第２号からはこの経験をもとに，もっとすばらしいものを作る様努力致しますので，会員の皆様もご研究のご成果をどしどしお寄せ下さって，ますます内容の充実した価値ある学会誌にお育て下さいますよう，ご協力をお願い致します。

兎に角，創刊号，おめでとうございます。

（世話人）