東北数学教育学会年報
2000.3.31　第31号

円および三角形の運動から論証へ
ー中２における論証幾何の導入への２つの提案ー

山形大学教育学部　　森川幾太郎

中学校における伝統的な論証指導では、証明に際して補助線を見出す原理も指導されず、また学習者が論証題の作成も扱われなかった。今回、運動の考えを一部取り入れて展開する中二の論証幾何導入時における学習課題を２つ提案する。合わせて、合同変換の考えをもとにした論証問題づくりに関わる生徒の回答も報告する。

検索語　論証　対称　合同　図形の運動　問題づくり

(1)はじめに

1871年に設立された英国・幾何学教授法改良協会[1]の論証幾何教科書では、まず立体図形の面や辺、そして頂点の相互関係を扱い、次いで、線の交叉としてできる角へと移る。そこでは、まず、直角が述べられ、次いで平角に関わる定理群が、その最終定理に「対頂角相等定理」をおいて、扱われる[2]。この角に関する扱いは、そこでのどの命題の正しさも定義から直観でき、また論証幾何の導入時における指導、と考えると異常にまで長い。こうした批判もあってであろう、現在中学校で採用されている論証幾何の導入時における体系、すなわち、「対頂角定理」を冒頭に扱い、次いで平行線とそれに交わる直線がつくる角に関わる性質、そして「三角形の内角和定理」という手順での展開が早い段階から考案されていた[3]。

ところで、幾何学教授法改良協会案をもとにした多くの体系には次の特徴がある。

1) 幾何学習の開始時においてこそ立体を扱うが、論証幾何に入った途端、平面上の角に関わる性質から開始される。ここでは、図形の構成要素からそれらの統合へ、いいかえれば部分から全体へ、の流れが軸である。例えば、合同に関わる論証が三角形分割を基本に行われる、はその象徴である。
2) これは、「現代化」の中でも指摘されていたが、運動の考えを用いて構造的に見る指導を長年してこなかったことにつながる。例えば、二等辺三角形をその対称軸を手がかりに三角形分割する、の視点からの指導はついに行われなかった。
3) 定理の配列は、定理自体の発見を生徒に行わせるようになってはおらず、天下り型になっている。この結果、1920年代のｱﾒﾘｶの幾何教育に関する論文で、幾何は暗記科目ではない、の指摘を多数に見るような事態が引き起こされる[4]。

かって、松尾正夫は、直観幾何の充実を訴える文脈の中で、「対頂角定理」は直観で理解できる、とし、この命題を論証で扱うことへの疑義を述べた[5]。確かに、角は直線が角の頂点のまわりに回転してできる、あるいは、対頂角の位置にある2つの角は共有される角の頂点に関して点対称、に注意すれば、「平角は 180°」を用いずとも対頂角に関わる性質は直観で導くことができる。このような、松尾による批判がありながら、現行の中学校における論証幾何は「対頂角定理」から出発する。そして、ここに小学校で扱う図形学習の中でも特によく記憶されている「三角形の内角和定理」や「二等辺三角形の両底角定理」も証明題として扱い続けている、という問題が重なる。私は、中学校における論証幾何は、生徒が「調べてみたい」性質を軸に構成したい、と考える。さらに、補助線の発見にも変換の考えが有効に働くことを思うとき、変換の考えも取り入れた論証幾何の指導を考えるべき、と思う。

図形の運動を主にした展開では、直観的でしかも構造的にその性質を明らかにすることができる。反面、正確に性質を表現する能力の育成という面では問題がある。一方、伝統的な論証幾何では、上述したように、図形の構成要素に注目して論証を進める。従って、ここでは、図形の各要素のみたす条件を克明に分析し、表現する、がもとになる。図形を注意深く観察し、正確に観察事項を表現する、能力の養成を考えたとき、伝統的な論証幾何の展開を一方的に切り捨てることはできない。

私は、かって、中一において、円の線対称性をもとに、線分の垂直二等分線などの基本作図法の発見を含めて論証幾何を展開する、という提案を行った[6]。今回、現行の中二における論証幾何の導入部での扱いを前提に提案を行うが、このこともあって、その一部に円の線対称性を用いる論証課題を含めた。他に、合同な二枚の三角形の移動によってできる多角形に関わる学習課題も提案する。ここでは、かっての私の提案と同様、次の2つの命題は公理として扱う。

「三角形の内角和が 180°」「二等辺三角形の両底角は等しい」

<u>(2)論証幾何導入時における学習課題(1)ー 多角形の決定から垂線の性質へ</u>

I　四角形の内角の大きさとその分類

三角形の内角和を仮定し、多角形の内角和公式を導く。そして、四角形には、凸四角形と凹四角形があること、それらは対角線と4頂点の位置関係によって決まることを観察し、次の性質を導く。

定理　凸四角形ではどの角も 180° 以下である。

凹四角形では一つの角のみが 180° を超える。そして、角 C が 180° より大

きい凹四角形 ABCD は△ ABD に含まれる。

この定理に先だって、三角形が鋭角、直角、鈍角のそれぞれの三角形に分類され、鋭角三角形では、どの２角の和を考えても直角より大、などの扱いも考えられよう。

II　円を使う

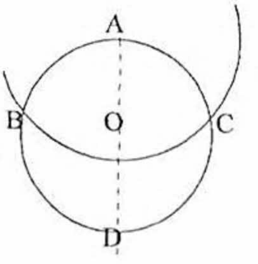
課題１　２円の位置関係と三角形の決定条件

２円の位置は２点で交わるか１点で接するか、交点なしの３種類に限ること、そして、それは、中心を結ぶ線分の長さと２円の半径の和によって決まることを調べた後、次の定理を導く。

定理　与えられた３線分の長さについて、そのどの２線分の長さの和が他の線分の長さより大きいとき、この３線分によって三角形ができる

この命題は 1999 年５月山形大学附中において五十嵐寛之教諭によって、論証幾何の導入課題として指導していただいたが、生徒は三辺の長さが何であっても確実に三角形が決まる、と思っていたこともあって、大変効果的に指導できた。

課題２　円の直径が円周上の２点を結ぶ最大線分



２円はそれぞれの中心を結ぶ直線に関して線対称、をもとに、交わる２円の交点はその軸に関して対称の位置にあることを導いた後、次の性質を扱う。

円 O の周上に点 A と点 B を定め、点 A を通る直径を AD とする。点 A を中心に半径 AB の円を描くと、円 O と円 A とは点 B を共有するので、もう一点 C で交わる。円 A の弧 BC は円 O の内部にあるので、この弧は直径 AD と交わる。以上により、

定理　円の直径はその円周上のどの２点を結ぶ線分より長い

課題３　三角形と外心の位置

三角形 ABC の外心 O が三角形の２辺 AB と AC の垂直二等分線の交点として得られることを作図によってまず確かめ、線分はその垂直二等分線に関して線対称であるので、線分の垂直二等分線上の点と線分の両端を結んでできる三角形が二等辺三角形である、をもとに外接円ができることを導く。

次いで、三角形によって、外心の位置が三角形の内部、外部、さらには斜辺上と三つの場合があることを調べ、それぞれの場合になる条件を推定しその証明を行う。

証明の概略；外心 O と三角形 ABC の各頂点を結んでできる図形 ABOC で

$$\angle OCA+\angle OAC+\angle OBA+\angle OBA=2\angle A$$

を、△ OAB、△ OAC が二等辺三角形から導く。そして、角 A が

△ ABC の最大角とすると、図形 ABOC において、角 BOC は、
角 A が鋭角のとき、180° より大。すなわち図形 ABOC は凹四角形
角 A が鈍角のとき、180° より小。図形 ABOC は凸四角形
角 A が直角のとき、180° に等しい。図形 ABOC は三角形

以上により、

定理　△ ABC が鋭角、鈍角、直角により、その外心円の中心が三角形の内部、外部、斜辺のそれぞれにある。

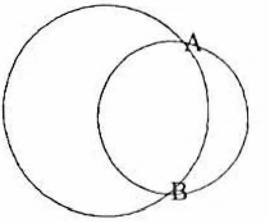
定理　直角三角形では、その斜辺を直径とする円はその外接円となる。

注；命題における仮定の役割を課題 1 ～ 3 までの学習を通して、命題の考える範囲を限定し、仮定が変わると結論が変わる、の視点から学ばせたい。

課題４　直線外の一点から直線に下ろした垂線が最短

直線 l とこの直線外に点 A をそれぞれ定める。点 A から l に垂線 AB を引き、l との交点を B とする。l 上に点 C を定めると△ ABC は直角三角形。その斜辺 AC を直径とし、点 B を通る円が描ける。この円では AC が直径であるので、AB ＜ AC。

定理　直線外にとった一点と直線上の点を結ぶ線分の中で最短であるのは、その点から直線におろした垂線である。



この定理を次の視点からも見ることができる。

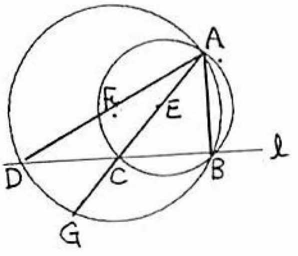
課題５　直線上の点と直線外の点を結ぶ線分の長短

交わる２円は互いに円弧の一部を中に含め合うと

円と直線が交わるとき、交点間の線分のみが円内に含まれる

を観察する。

点 A から、その点を通らない直線 l に垂線 AB を下ろし、脚を B とする。l 上に AB に対して同じ側に２点 C,D を定め、BD ＞ BC とする。



AC,AD を直径とする円を描くと、課題３での定理により、A,B の２点を共有する円 E と円 F とができる。ただし、E,F はそれぞれ、AC,AD の中点である。

円 E と円 F は直線 l とも交わり、BC ＜ BD から、点 C は円 F の内部。AC を延長すると点 G で円と交わる。

課題２および４の証明で用いた論理を使うことにより、　AC ＜ AG ＜ AD

定理　直線上の点は、その直線外一点から直線に下ろした垂線の脚からの遠ざかるにしたがって、直線外の点と結ぶ線分の長さが大きくなる。

(3) 論証幾何導入時における学習課題(2)ー 合同な三角形２枚でつくる多角形

課題１　凸多角形の決定条件

三角形や凸型四角形を一意に決定するために必要な辺と角の個数に関する条件を調べる。それを一般化して、凸ｎ角形ではつながりあう辺と角とを合わせて

ｓ＋ａ＝３＋２（ｎ－３）

s; 決定のために必要な辺の数　a; 決定のために必要な角の数

定めると決定されることを導く。この等式は、多角形の３角形分割から導く。

課題２　多角形をつくる

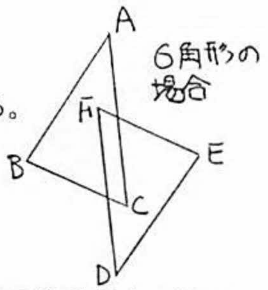
２つの合同な△ ABC と△ DEF とを用意する。この２つの三角形をいろいろに重ね合わせて様々な多角形をつくる。この操作から、次の性質が見出されよう。

1) 頂点を数えることで２枚の合同な三角形から作られた多角形の辺数が決まる場合と決まらない場合とがある

2) この図形の最大辺数は 12 であり、これを超える多角形を作ることはできない。

3) 作成可能な多角形は、３，４、5、6、7、８，9、10、12 角形である

そして、次のような探求問題がつくられよう。



問題① 13 角形や 11 角形ができない理由を探る。

問題② 合同な三角形２枚からできる四角形の特徴を探る。

これらの性質を以下の事柄を「原理」として導く。

① 閉じた多角形では頂点と辺とが１：１に対応する

② 直線と直線とが交わるときその交点の数は１

③ 一つの線分が三角形の辺や頂点を通るとき、その交点の数は最大でも２。

④ ２つの合同な三角形を交わるように置いたとき、それぞれの三角形をつくる辺と辺が交わる可能性は最大でも３。

探求問題①「13 角形ができない」について

２つの三角形の交わり方がいろいろ考察され、その分類の視点が例えば次のように作られるだろう。いずれの場合も、一つの三角形を固定し、もう一方の三角形を移動させる、という視点から考える。

▼分類の視点Ｉ一移動させる三角形の頂点の位置をみる

(1) 3 頂点が基準となる三角形の外部にある

(2) 頂点の１つが基準三角形の内部もしくは辺上に含まれ、他の２点が基準三角形の外部にある

など、移動する三角形の各頂点と基準とする三角形の位置関係で分類する。

▼分類の視点Ⅱ一等式をつくる

２枚の三角形から作られる多角形の辺数は次の５変数の一次式で表示される。

$a+b+c+d+e$

a は基準とする△ ABC のうち、新しい図形の頂点として用いられた数。b は移動する△ DEF のうち新しい図形の頂点となる数。従って a も b も３以下の自然数。c、d、e のそれぞれは△ ABC の辺 AB、辺 BC、辺 CA のそれぞれの辺と△ DEF の辺とが交わって新しい図形の頂点となる数を順に示す。 従って、c、d、e のいずれも２以下の自然数。

なお、合同変換により同一図形になるものを避けるために、$a \geqq b$、$c \geqq d \geqq e$ という条件もつける。

こうして、問題①の 13 角形ができるか、は、$a+b+c+d+e=13$ をみたす自然数の組（a,b,c,d,e）が存在するか、を考えればよいことになる。

探求問題②「四角形をいろいろな方法で作る」について

２つの合同な三角形から様々な四角形を作る問題は、５変数が作る等式

$a+b+c+d+e=4$

の解の組

$\{(a,b,c,d,e)\}=\{(3,1,0,0,0),(3,0,1,0,0),(2,2,0,0,0),(2,0,2,0,0),(2,1,1,0,0),(1,1,1,1,0)$
$(1,0,1,1,1)\}$

の中から四角形が構成できる場合を探し出すことになる。この中で、可能なものは２組で、そのそれぞれに対応する四角形は線対称もしくは点対称な図形である。

(4)　証明問題をつくる

Ⅰ 基本になる対称図形

課題１ 線対称な四角形を整理し、その辺と軸との位置関係を整理する。

1) 線対称図形は、対応点を結ぶ線分によっていくつかの線対称図形に分割されることをまず見る。そして、基本となる線対称図形は、二等辺三角形、等脚台形、長方形であることを各図形の頂点や辺と軸との位置関係から導く。
2) 直線を線対称に移動すると平行になり、また平行な２直線は点対称の位置にあるとみることができることを観察した後、基本となる点対称図形は平行四辺形であることを見出す。

Ⅱ　２枚の合同な二等辺三角形を組み合わせてつくる論証問題

1) 作問の例

合同な２つの二等辺三角形を様々な位置に置くことによりいくつもの論証問題をつくることができる。その例を述べよう。

○図１-(1)は、△ ABC と△ DEF とで辺 BC と EF を重ね、さらに線対称の位置においた。この図から次のような論証問題ができる。

1-(1)-① △ HFC は二等辺三角形

-② BH ＝ EH

-③ 線分 FC の垂直二等分線は H を通り、線分 AD の垂直二等分線

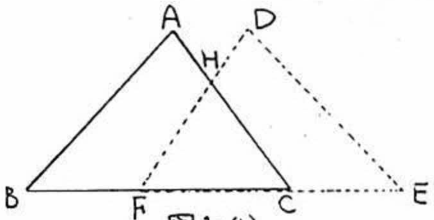


図1-(1)

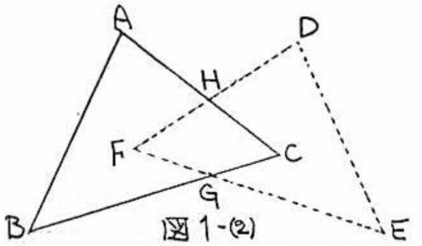


図1-(2)

○図 1-(2)は、図 1-(1)を線分 FC の中点 G のまわりに回転することによって得た図形である。この図に関して次のような証明問題が作られる。

1-(2)-① BF ＝ CE

-② AF ＝ DC

-③ 四角形 HFGC はたこ形

-④ 直線 HG は、線分 AD、FC、BE それぞれの垂直二等分線

○図２、図３もそれぞれ線対称の位置においた２つの三角形を回転することによって得た。これらについても、図２では直線 CG が、また図３では直線 GH が対称軸に関わる一連の証明問題群をつくることができる。

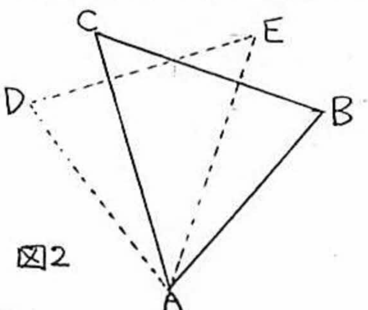


図2

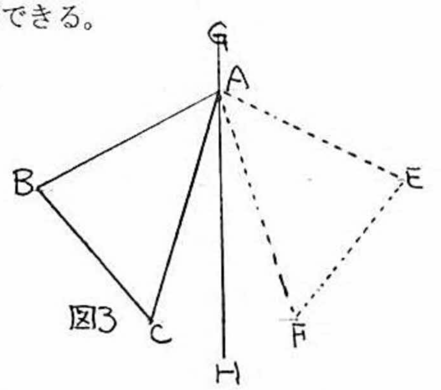


図3

2)調査からの結果

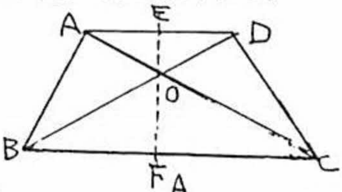
二等辺三角形や平行四辺形などに関する性質を生徒に見出させるために、これらを線対称や点対称に移動をさせた。その後、生徒が見出した性質を三角形の合同定理をもとに証明する、という方針による授業を 98 年５月～７月にかけて、山形大学附属中学校田中克学級において実践していただいた。このとき、論証そのものは教科書の方法に準拠した。この授業終了から３ヶ月経った 10 月にいくつかの問題で

認識調査を行った。この調査では三戸学君（当時、山形大学教育学部４年生）の作成した問題を利用した他、調査のまとめでも彼に全面的に協力をあおいだ。三戸君の協力に感謝したい。

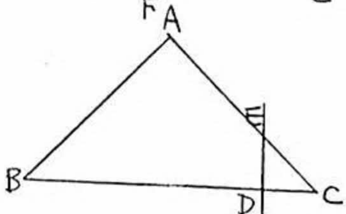
以下、調査問題のいくつかと得られた結果を簡単に紹介する。

①論証問題の作成を、家庭学習としてではあったが、生徒に行ってもらった。この課題では、図形の移動を用いて作問を行うよう指示したが、全員が指示に従い、論証問題を作成してきた。生徒の作った証明問題４例を紹介する。

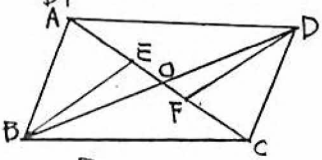
事例１　四角形 ABCD は等脚台形です。△ BOC が二等辺三角形であることを証明しましょう。



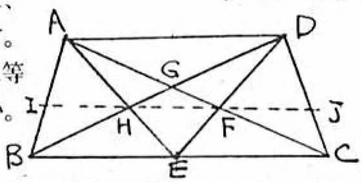
事例２　△ ABC は角 A=90 の直角三角形である。斜辺 BC 上に BA=BD となる点 D をとり、点 D から斜辺 BC に垂線を引き、辺 AC との交点を E とする。この時、AE=DE であることを証明しなさい。



事例３　四角形 ABCD は平行四辺形で、AE=CF となるように、点 E と点 F をとった。このとき、角 EDO =角 FBO であることを証明せよ。



事例４　四角形 ABCD は台形です。また、△ EDA,△ GHF は二等辺三角形です。IJ と BC が平行の時、△ CDA が二等辺三角形になることを証明しなさい。



②生徒には自作の問題に対しどの変換を用いたか記載してもらったが、下の表１に見るように、問題で用いられている変換と生徒の記述した変換に齟齬が生じた事例は１割にとどまった。表１では、さらに、生徒が用いた合同変換と作成した論証問題のオリジナル度の度合いとの相関も表してみた。

表１

独創の度合が	線対称移動	点対称移動	回転＋平行	指摘不適切	計
高い	9　(5,4)	4　(3,1)	1　(0,1)	1　(0,1)	15
中間	1　(0,1)	2　(1,1)	0　(0,0)		3
低い	2　(2,0)	12　(7,5)	4　(3,1)	3　(0,3)	21
計	12　(7,5)	18　(11,7)	5　(3,2)	4　(0,4)	39

表中の数字は回答者数で、（　）内の数字は、順に、仮定、結論の記述がしっかりした命題、仮定あるいは結論の記述が不十分な命題を作った生徒の数を表す。

ここに見るように、命題を正確に記載できる、即ち、各図形の決定条件を正確に使える生徒は半数程度にとどまった。また、点対称移動や回転移動をもとに作

成された問題では独創性の度合いが低いものが多かったことにも注意したい。

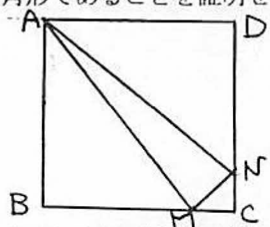
このように、運動を意識化させるとオリジナル性に課題の残る生徒が多い点に問題は残るが、論証問題そのものの作成に苦しんだ生徒は少ない。

③生徒は合同に関わる論証の学習で、どの程度合同変換に注意していたのであろうかも質問した。この問いに対し、残念ながら、ほとんどの生徒が、合同変換には留意せず論証を行った、と答えている。ただ、次のように書いている生徒がいたことに注目したい。

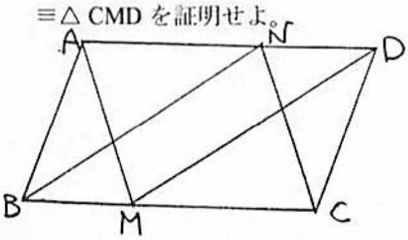
「(証明のときに移動のことを) あまり注意していなかったけど、移動なども利用したりすると、さらに楽に (証明が) できることがわかってよかった」

④論証能力を見るために次の２つの論証問題を解かせた。結果は問１ではほぼ 90%の生徒が、また問２ではほぼ 80%の生徒が証明に成功した。

問１　四角形 ABCD は正方形で、CM＝CNのとき、△AMN は二等辺三角形であることを証明せよ。



問２　四角形 ABCD は平行四辺形である。BM=DN のとき、△ANB≡△CMD を証明せよ。



この２つの設問がどのような合同変換をもとにして作成されているかの指摘も行わせたが、これについてはほとんどの生徒が正答であった。ただ、証明につまずいた生徒では、この正答率が極端に低かったことに注意したい。

⑤生徒達はこのように高い証明能力を有してはいても、論証学習に全員が積極的に参加したわけではない。この学習への関心の度合いと上記した自作証明問題のオリジナル性とのかかわりを調べてみた。結果は表２に示した。

表２

		図形の論証学習への参加意欲が 高い	低い
オリジナル度	高い	11	4
	低い	8	13
計		19	17

表２で、参加の度合いが高い生徒とは

論証学習が楽しかった、初めは大変だったが、現在は考え方に慣れた

といった回答を行ったもので、反対に、参加の度合いが低い生徒とは

学習には慣れたが、まだ大変さを感じる。難しくていや。

と述べた生徒である。表に見るように、創作証明問題にオリジナル度が高い生徒ほどこの論証学習への参加感の度合いが高いことが見える。

この他、この認識調査から以下のような特徴や課題も見えてくる。

①自作論証問題で仮定や結論を正確に記述できなかった生徒がおよそ半数いたが、
これは、○問題に添えて図を描き、条件を図に語らせたため、図形の決定条件が
論証課題の仮定の中に用いられている、から省略したのだろうか
それとも、
○図形の決定条件に対する認識の度合いが低いためなのか。
これについては現段階では不明である。

②自作証明問題の作成で、オリジナル度の高い問題を作った生徒では線対称移動を使ったものの割合が高かった。これは、線対称図形となる基本図形は二等辺三角形、等脚台形、長方形と多様であるのに対し、点対称図形では平行四辺形に限られるということも関係しよう。

③合同に関する論証では、対応辺や対応角の判定のためだけでなく、その証明問題そのものがどの合同変換にもとづいて作られたものであるかを明確に意識させることは証明の方針を立てる際にも、また、論証問題作成にも有効である。

参考文献

1)菊池大麓「初等幾何学教科書」、大日本図書,1898(明 31)年版、序文による。

2)幾何学改良協会編「初等平面幾何学」の角に関わる定理群（三木留三訳,1891(明 24)による）

定理1　全ての直角は相等し

定理2　若し一直線他の直線上に立つとき、その和は二直角に等しき両隣角をなす

定理3　若し一直線他の二直線となす二隣角の和二直角に等しきときは此の二直線は一直線上にあり

定理4　若し二直線相交わるとき其の対頂角は互いに相等し

……

定理21　若し一直線他の二直線と相交わり錯角等しければ二直線平行なり

定理22　一直線他の二直線と相交わり錯角の一双相等しきか或いは応角の一双相等しきか或いは同傍内角の一双補角をなすときは、何れの場合に於けるも錯角の二双は相等しく及び同傍内角の二双補角をなす

定理23　二直線平行し第三直線之を相交わるときは錯角は相等し

定理24　同一直線に平行する諸直線は互いに平行なり

定理25　三角形の一辺を延長すれば外角は二個の内対角の和に等しく三内角の和は二直角に等し

3)NCTM の第 13 年報(1938 年刊)"The Nature of Proof"で扱われている論証幾何の展開はほぼこの手順に沿っている。例えば、pp.52-65 に記載されている内容。この展開は実験室法による。

宮本籐吉「平面幾何学教科書」,興文社,1903(明 36)もこの形に沿っている。この教科書では、角が二直線の交わりとして定義され、一度および直角が一回転角の 360 等分および4等分としてそれぞれ定義される。次いで、対頂角、平行線および、平行線の公理が導入され、「錯角が等しいとき平行」など平行線とまじわる直線がつくる角に関わる性質が定理として扱われ、三角形の内角和、三角形の合同に関わる事柄が順次展開される。

4)例えば、NCTM,Mathematics Teacher 誌で次のような論文を見ることができる。

T.Strong "Teaching Plane Geometry without a Text-book", vol.19 (1926) ,pp.115-116
L.Blank "Technique and Devices Conductive to Better Teaching of Geometry",vol.21 (1928) ,p.172
W.R.Longrey"Geometry as Preparation for College",vol23 (1930), pp. 258-259
5) 松尾正夫「論証幾何教授ノ実際」(東京高師附中数学科編「数学教育」、no.12,pp.75-97/no.13, pp.81-97/no.14,pp.87-107 発行年はいずれの 1939 年)
6) 森川幾太郎「円の性質から論証へ」、横地編著" 21 世紀への学校数学の展望" 誠文堂新光社刊、pp.244-255,1994

From movements of circles or two congruent triangles to deductive geometry

MORIKAWA Ikutararo (Yamagata University)

In our teaching about deductive geometry in junior high scool, we have not tried to require pupils to make problems related to congruence to prove them. In this paper, we reported that pupils could make the problems when they recognized that some problems about isosceles triangle were induced from symmetry of the figure. Movements about figures show us properties from structual points. So, making the problems to prove is not difficult if we see some properties from structual points.

Our second aim in this paper is to show examples to make problems that are induced from movements of circles and two congruent triangles as an introduction to deductive geometry.

We prepare two congruent triangles and then piling one triangle to another, we get several polygons such 12-gon or quadrilateral from this doing. Basing on these consequences, we set several problems;

Why can we get neither 13-gon nor 11-gon ?

What types of quadriltaeral can we get ?

To solve these questions, we set several properties including Passh's axiom as fundamental. We think that these problems are adequate to introduce deductive geometry. In traditional deductive geometry, proving some propositions related to angles such "measure of vertical angles are same","sum of inner angles of triangle is 2 right angles" are treated as first problems. I think this system supported by the ideas such "from fundamental ones to more complex ones" or "system is constructed from fundamental parts". As an example we can point out following thing;

> when we try to prove some polygons being congruent, we should divide polygons to many triangles as parts and then try to prove congruent by using triangles.

As abovementioned problems, properties basing on movements are controversly "from comprehensive to analysis"; by adopting movements to each figure, we can recognize properties of the figures more structual points. Then, basing on these recoginitions, we expect to pupils to make many new problems in deductive geometry.