

## 魔方陣の数理と教材論

宮城教育大学 板垣 芳雄

**概要** 「魔方陣を数える」ことを課題に修士研究と論文作成を指導して、方陣に係わる問題の広がりや深みを知った。他方、魔方陣を題材とする教案が散見されるが、取り上げ方が典型的であるように見える。このことは、われわれの、数学教科についての見方がある種の固定観念にとらわれていることを映していると思った。方陣について、型にはまらない変形型、変種の教材化が考えられる。それを語ることで、数学カリキュラムの特性を描きたい。

(本稿は、東北数学教育学会・初夏研究集会・秋田、1997.5.25.の発表資料で、そのときに、4, 5, 6節を新しく書き直したものである。)

キーワード： 三魔方陣、4次完全方陣、演繹的、公式、概念

## 1. はじめに

手元にある三省堂国語辞典で、「まほうじん」を引いたら、こう解説してある。

「縦・横・ななめのどちらから合計しても、同じ数になるように、ちがった数を四角にならべた図形」

この説明文は、辞典の第2版(1974)から変わっていないが、第4版(1992)には、うれしいことに、次の四魔方陣が載せてある。

6	3	13	12
9	16	2	7
4	5	11	14
15	10	8	1

ちなみに、新明解国語辞典(1997)では、「連続する自然数を正形状に並べ、縦・横・対角線の和がどれも等しくなるように作ったもの。〔1～9を並べ、合計値が15になるようにしたのが最も基本的〕とある。

「方陣」として魔方陣を指すこともある。正方形の形を方陣というので、「まほうじん」を魔法陣と書くのは誤りである。

ブリタニカ・国際大百科事典には、魔方陣の歴史について、5ページに渡り解説してある。中国の古文獻が伝える、洛書と呼ばれる三魔方陣が、最も古く、紀元前2世紀以前の魔方陣である。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

ギリシャの数学者たちが魔方陣のとりこになったという形跡はない。一方、古代中国の数学に、ピタゴラスを夢中にさせた図形数、完全数、親和数などのたぐいは見当たらない。[1]

魔方陣については、研究家の阿部楽方氏が、ここ秋田で行われた平成7年の年会で講演されている(12月3日)。阿部氏は、昭和63年の数学教育論文発表会(秋田、10月20日)では、「方陣の源流について」と題して発表されており、幸運にも私はどちらも聴いている。[2]

だが、魔方陣は面白い教材になるのではないか、という期待をもって聴いたのであるが、聴いただけでは、どこをどのように授業にすれば生徒の興味を引くことができるか、見当もつかなかった。(欧米流)学校教科の単元との関連内容も思い浮かばない。

和算の伝統を思わせる、方陣研究家の解説や報告に比べると、高木貞治の「数学小景」(1943)の魔方陣の節は、学校数学を学んだ者にとって分かりやすく、今日読んでも味わい深い。教材化への示唆にも富んだものだと思う。ただし、教材として、あるいは、教材の可能性について書いているわけではない。「現今では、魔方陣は、学者の好奇心をそそる魅力をさえも失った。・・・魔方陣その物は、くだらないものだが、魔方陣製作法の中には、学問上の興味が若干ある。」と述べて、高木は、方陣について話し始めているのであるが、教材としては、現今の児童や生徒が、方陣に、魔性や神秘を感じてくれるかどうか気がなるところで、数学者の好奇心をそそるような方陣の理論レベルの内容は、そもそも教材にはならないわけである。

教材化では、その教材に対する見方、考え方が、提示の仕方、提示のことば使いに、もろに現れ出るものだと思う。

## 2. 三魔方陣(教材研究)

算数科教材研究法の講義で、大学生を相手に、魔方陣を話題にしてみた。習ったことがあるか、と全員に回答してもらったら、「はい」というのは数名で、そのうちの一名は、「三魔方陣を作れ」という問題に、「公式を知ってる」と記していた。習ったといううちで、「(魔方陣の話は)定番だ。」と書いた学生がいる。定食のようで新味がない、陳腐な、という感想、いわば、魔方陣についての先入観を記しているのだろうと思った。

知ってる「公式」というのは、3次の魔方陣の作り方や、5次の作り方(の一つのルール)を指してるのであろう[3]。私は、「数学とは「公式→適用」という数学イメージの学生が多いように日頃から感じている。数学の授業で習った魔方陣の作り方も、その「公式」のように受け取ったのではなかろうか。そして、授業で話す「面白い話」を

特集した書で、天下りに一つの作り方を書いたのを見掛けるので、そういうのを種本とする授業だったのではないかと想像する。[3]

魔方陣の定義を述べて、いきなり「1～9の数を四角に並べ、3次の魔方陣を作れ」を課題にしたのでは、高校生にも簡単には作れず、試行錯誤を繰り返す生徒が多いことと推測する。発見の喜びを体験する子供は、ごく少数と思われる。

そこで、3次の魔方陣について、まず、次のような性質を「証明」して見せる授業が考えられる。

(1) (それが存在すれば) 縦・横・斜めの和は  $(1+2+\dots+9) \div 3 = 15$  である。

(2) 中央には、5が入る。(中央に入る数を  $x$  とおいて方程式を立てると、 $\dots$ 、その方程式を解いて、5と求まる。)

以上の性質が分かれば、三魔方陣を探すのは、ぐっと楽になる。

見つけたものを書き上げれば、次に考え付く問題とその問題の答えとして、

(3) (見掛けの違うのを) 全部数え上げると8個ある。

高校教師が生徒に話せば、こういう語り方になるように思う。数学教師には、高校数学のカリキュラムを反映した高校教師らしい語り口のようなものがある。そして、上の(1)～(3)は、順序を込めて、演繹的な論証の語り口である。

同じ内容を、次のように語れば、小学生にも分かる話しになると思う。これは、算数科教材研究法で試してみたものの粗筋である。

自然方陣 (電話のボタン配列) について、縦・横・斜めの各列の和を計算してみよう。

1	2	3
4	5	6
7	8	9

中心の5のところを通る縦・横・斜めの列については、どの列についても、和は15になる(両端の2数の和は10である)。

だが、縦と横の1列目、2列目については、和は15ではない。

中心の5はそのままにして、周囲の配列を変えて、縦・横・斜め全ての列について和が15になるようにできないか、考えよ。

この問題については、5分から10分ぐらいで、かなりの学生が、一つの方陣を見つけられた。でも、なかには、20分以上かかって、やっと見つけたという宮教大生もいた。

講義の終わりの数十分を、以上のような話と小テストで終わった次の週の講義時間の

ことになるが、次のことを問うた。

- 1) 見つけたのと違う方陣はないか。
- 2) 全部でいくつあるか。
- 3) 中央が5でない方陣は見つけれられるか。
- 4) 各列の和が15でないのは見つけれられるか。

これら問いのうち1) 2) については、学生が見つけたものを列記して、「これらのほかにはもうないか」と考えさせることもできよう。[4]

講義では、そこは試すことなく、ある見つける過程を分析的に振り返ることで、8個あること、8個のうちの一つから、「合同変換」で残りの7つが生成されること、その8個以外にないことを、感知できる様子を話した。

その見つける過程で、数の並び

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

の中央に位置する5を挟んで、(1, 9)、(2, 8)、(3, 7)、(4, 6)の4つの組が方陣の各列の両端に位置しているのだと知り、方陣の両端が、そういう、和の等しい4つ組になっていなければ魔方陣ではないから、中心に5でない数を置いては魔方陣が作れないことが分かる。

従って、各列の和が15でないようなのは、あり得ないとも知る。

ついでに、数列の和の計算法にも気付くことができる。

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 5 + 10 \times 4$$

気付いたいちいちについて、そのわけを話させること、皆に分かるように話させることは、筋道立てて考えるいい学習になるように思う。

ここで、算数レベルでの発見の展開を、先の高校教師の語り口の(1)～(3)と比べると、算数で見つける順番は、(3)、(2)、(1)と、逆になっている。

### 3. 四魔方陣 (数理から教材論へ)

講義では、次に、国語辞典の魔方陣の各数について、「その数から1を引いた数を、4で割って、商と余りを答えなさい。」と言って、商と余りをそれぞれ方陣に書き並べて行った。

1	0	3	2
2	3	0	1
0	1	2	3
3	2	1	0

1	2	0	3
0	3	1	2
3	0	2	1
2	1	3	0

いわゆる、魔方陣の補助方陣への分解である。

初めの魔方陣を4次正方行列と見てMと書き、商の並びの左の行列をA、余りの並びの右の行列をB、要素が全て1の4次正方行列をIと書けば、行列の和とスカラー倍について、

$$M = 4A + B + I$$

である。

見ればすぐに分かるように、AもBも、縦、横、斜めのどの列も、0, 1, 2, 3のある順列になっている。従って、それらの合計が全て同じであるという魔方陣の性質を持っている。AとBがその性質を持っていることから、 $4A + B + I = M$ も当然その性質を持っており、縦・横・斜めの和を計算するまでもなく、Mの魔方陣であることが分かる。

(A, B)とMとの方陣対応については、第5節でもう少し調べる。次節では(A, B)とMとの対応する各要素間の対応について話題にする。

あらかじめ記せば、以下では、次の3点について、3つの節として記すことになる。

1), 魔方陣との関連で、4進法あるいは数の4進表示の学習、2), 完全方陣、完全方陣の補助方陣、3), 魔方陣の算数教材研究。

1) では、一般にn進法について教えることと対照することで、魔方陣教材の“有機的”な広がりが見取れるであろう。

2) のことに関しては、順列型補助方陣を数え上げようと考え、数えてみることで、数の並びの玄妙さを感知するかもしれない。四魔方陣になると、三魔方陣からは想像出来ない多様性が現れる。四魔方陣や五魔方陣の面白い「作り方」は、結果論であって、そのまま提示するだけでは、その知識の伝授に終わり、生徒に考えさせるところがなく、故に、「公式」のようにイメージされることになる。

3) では、一つの魔方陣の提示に至る過程が、算数教材・計算題としての広がりを持つことに注意する。筆者は、理学部の大学生に、算数の計算題のようにして提示した後、完全魔方陣の「完全性」を、2)の「ずらし変換」で説明したことがある。初めて、魔方陣に接したらしい何人かは、その顔から、不思議を、そして神秘性を感じてくれたように観察した。

#### 4. 直交する補助方陣

先にMと書いた四魔方陣と、補助方陣A, Bの話しを続ける。

Mの数、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, …、に対応する(A, B)の数(a, b)は、

$$00, 01, 02, 03, 19, 11, 12, \dots$$

である。対応する組が(a, b)であるMの数は、 $4a + b + 1$ である。

この(文字)式は、(a, b)がMの数から1を引いた数の4進法表示という「定義」から明らかなのであるが、いまは算数レベルの観点で考えようとしている。

3桁なら、 $a_1 + a_2 \times n + a_3 \times n^2$ と書かれる、n進法の概念で語るのではなく、四魔方陣と4進法だけについて考えているのである。いや、2桁の4進数であって、ましてや、n進法での表現の一意性という見方もしていない。4進一意表現のことは、

00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, …

と、いわば、帰納的に並べる操作になっているのであって、「数」の10進表示について一意性など意識することなしにいるように、ここでは、4進表示の一意性も、表示に依らない「数」の概念も無用なのである。

さて、 $a$ も $b$ も0, 1, 2, 3のいずれかを取る。同じ $a$ は $A$ のなかに4つあり、同じ $a$ に対する、補助方陣 $B$ の $b$ は、0, 1, 2, 3と一つずつある。

当然、 $B$ には、0, 1, 2, 3それぞれ4つあり、同じ $b$ に対応する $A$ の数 $a$ は、0, 1, 2, 3と一つずつある。

このようになっている方陣 $A$ ,  $B$ については、 $A$ と $B$ は直交する、ということがある。  
[5]

### 5. 完全方陣

次の方陣は、最初に掲げた四魔方陣で、横の列の一番上を一番下に移したものである。

9	16	2	7
4	5	11	14
15	10	8	1
6	3	13	12

当然、縦・横のどの列の和も34で等しい。斜めの列については、

$$9 + 5 + 8 + 12, \quad 7 + 11 + 10 + 6$$

これも、34になる。この方陣も魔方陣になっているのである。

補助方陣でみると、最初の $M$ に対する $A$ ,  $B$ は、縦・横・斜めが全て、0, 1, 2, 3のある順列になっていたが、上の横の列を下にずらしたものについては、斜めの列は、組み合わせが、(1, 1, 2, 2)と(0, 0, 3, 3)であり、(0, 1, 2, 3)ではないが、和は、同じ6である。

2	3	0	1
0	1	2	3
3	2	1	0
1	0	3	2

0	3	1	2
3	0	2	1
2	1	3	0
1	2	0	3

Mの横の列を一つ下にずらして出来た上記の魔方陣について、Mについてと同じずらしを再度行ってみると、その斜めの列の和は34となり、魔方陣になっている。それに、さらに、もう一度同じ「ずらし」操作を行って作った方陣も、また、魔方陣になっている。

そして、このことは、補助方陣についても成立する。

実は、横だけでなく、縦の列のずらしについても、このことが成立していることが確かめられ、同じく、補助方陣についても、この性質が成立する。

以上のことは、補助方陣Aについて書くと、下のように繰り返す平面模様を作ったとき、4×4の四角をどこにとっても、その方陣は、魔方陣になっているからと、言い換えることも出来る。BについてもMについてもそうになっている。

2	3	0	1	2	3	0	1
1	0	3	2	1	0	3	2
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
2	3	0	1	2	3	0	1
1	0	3	2	1	0	3	2
3	2	1	0	3	2	1	0

国語辞典が載せているのは、ただの魔方陣ではなく、このような「完全方陣」だったのである。

## 6. 算数科・計算題

魔方陣を「読み上げ算」に使ってみたらどうであろう。

1	8	11	14
15	10	5	4
6	3	16	6
12	13	2	9

「 $1 + 8 + 11 + 14$ は？」と読み上げて、暗算させる。そして、問題の数字を板書する。「 $15 + 10 + 5 + 4$ は？」を暗算させ、答えさせた後で、先の数字の下に、 $15, 10, 5, 4$ を並べて記録する。

次は「 $6 + 3 + 16 + 9$ 」というように、4つの暗算をさせた後、板書した方陣の縦の列について「見取り算」をさせる。

答は、全て34で「同じである!」。斜め、対角線の2つの列についても和は34である!

なお、これは、先のMとは違う種類の完全方陣である。[6]

少しひねって、魔方陣の「虫食い算もどき」というのも考えられる。例えば、一つの5次(完全)方陣の、どこか2ヶ所の数を入れ替えたものを提示する。そして、縦・横の列の和について、計算競争をさせる。2つ、あるいは4つの列の和が他と違う。2つを入れ替えて、どの列の和も、65になるように出来ることに気付かせる。

別の五魔方陣の3ヶ所の数字を入れ替えたものについて、どこをどう入れ替えたものか、と問う課題「間違い探し」も考えられる。

下に、5次完全方陣を一つ記しておく。

ちなみに、4次完全方陣は、「ずらし変換」で移り合えるものは同種と数えて、3種あるのに対して、5次完全方陣は $24 \times 6 = 144$ 種ある。よって、4次完全方陣は、 $3 \times 4^2 = 48$ 個、5次完全方陣は $144 \times 5^2 = 3600$ 個である。この数え方からすれば、三魔方陣は1個である。そして、それは、完全方陣ではない。[6]

四魔方陣は880個ある。[7]

1	9	12	20	23
17	25	3	6	14
8	11	19	22	5
24	2	10	13	16
15	18	21	4	7

#### 参照文献等

[1] ジョージ・G・ジョーゼフ (垣田高夫、大町比佐栄訳) : 非ヨーロッパ起源の数学、ブルーバックス、講談社、1996。

[2] 阿部楽方の平成7年の講演資料「方陣研究の魅力」は、研究成果報告書「民族誌的



数学の立場に立つ数学教育の可能性とその教材」(研究代表者・湊 三郎)に載せてある。

[3]例えば、最近のもので。楽しい算数の授業、3月号、明治図書、2001. の表紙裏、勝進亮次：魔方陣は魔法つかい！？

[4]類似の教材研究の題材に。小川雄三：魔法三角陣の秘密、(指導事例・小学校5年)、クレセール(中学校数学科教育実践講座)第4巻、ニチブン、1995.

[5]大森清美：魔方陣、富山房、1973.

[6]柏谷 直：魔方陣を数える、宮城教育大学学位論文、1997.

[7]四方陣についての研究史を記し、880を分類記載している90ページの論文。

D.K.Ollerenshaw and Sir H.Bondi: Magic squares of order four, *Phil.Trans.R.Soc.Lond.* A306,443-532(1982)

[8]米田幸光：魔方陣の研究、兵庫教育大学学位論文、1997.

[9]R.B.Mattingly: Even order regular magic squares, *Amer.Math.Monthly* 107(2000) 777-782.

## Mathematics of Magic Squares and Teaching Content related to Squares

ITAGAKI Yoshio

Miyagi University of Education

We see teaching topics related to magic squares or similar kind of squares, but many are the problems directly to ask to construct such squares given by the definition.

Through observing the various ways of approaches to squares in teaching, we show that magic squares are attractively useful. We can use one of them for arithmetical training, and sometimes the features of a magic square may give the student a mystic impression. They have mathematically deep complexity in their nature beyond our intuitions.