算数・数学教育の基礎的問題の反省

広島大学名誉教授　平林一栄

本稿は平成12年、5月28日、東北数学教育学会での講演に手をいれたものです。謹んで、これを故竹内芳男先生に捧げます。

O. はじめに

先ほど、沼沢政辰校長さんから、竹内方男先生の言葉として、紹介されましたが、実はそれはイギリスの数学教育学者 C.Gattegno が昭和34年2月来日して、大阪で講演したときの言葉を、私が記録していて、それを竹内先生にお話したもので、英語では、次のようでした。

Start from small things and develop, develop! Mathematics is like that

竹内先生とは、ご生前非常に親しくしていただき、いつも意見を交わしあっていたので、竹内先生もそれを覚えておいでになって、引用されたのであろうと思います。私も、今日お渡したプリントをこの言葉で閉じています。

私が竹内先生にはじめてお目にかかったのは、今から30年以上前であったと思います。東京の学会でお目にかかってお話したとき、日本にもこんな立派な数学教育研究者がおいでであったかと、非常に感激しました。広島に帰って、恩師の戸田清教授に「東京の学会では何も得るところはありませんでしたが、竹内方男先生を知ったことが最大の収穫でした。」と報告したことを覚えています。その後、竹内先生から、山形大学での集中講義にお招きいただいたことがありました。そのとき先生にあちこちご案内いただいたなかで、こちらからお願いして、大石田の石光寺というお寺へ連れていっていただきました。ここには芭蕉ゆかりの五月雨句碑があるのですが、それとともに、私と同名の高野平右衛門一栄という、芭蕉の門弟筋の人のお墓があるからでした。

実は、私は以前から俳句をやっていまして、今はある結社の同人になっています。月に一回、小さい俳句会の指導にも行っております。私が俳句をはじめてしばらくして、自分も俳号がほしくなって、師匠にお願いしたら、「お前は生れながらにして芭蕉の弟子である。本名の一栄でよいではないか。」とのことでした。調べてみますと、奥の細道に「五月雨を集めて早し最上川」という句がありますが、これがつくられたのが、当時の大石田の回船問屋で、豪商の高野平右衛門の宅での句会でした。そのとき巻かれた歌仙の発句は、主賓の芭蕉のもので、「五月雨を集めて涼し最上川」と挨拶句になっています、二の句はホストの一栄が「蛍を岸につなぐ舟杭」と付けています。

そんなこともあって、一度この一栄の墓にお参りしたかったのです。寺で案内を乞うと、婆さんが出てこられて、お墓まで連れて行ってくださいました。見れば小さい石一つ

がお墓でした。私はこれも何かの因縁と思って、拝んでいると、後ろで婆さんがこう言いました。一栄さんは、昔は回船問屋の旦那さんで大変なお大尽だったのに、俳句のようなくだらないことに凝って、財産を失い、貧乏になって、こんな小さいお墓しかつくってもらえなくなってしまったのですよ。」昭和の「一栄」さんは、拝みながら苦笑せざるをえませんでした。

山形は、竹内先生とのつながりの他に、私にはそんな因縁のあるところです。しかし、今日は、俳句の話をしに参ったわけではありません。

1. 夢の話

竹内先生ともよく話し合ったことですが、われわれは算数・数学教育の実践的なことには熱心だが、その根底にある基本的な問題に対して、極めて無関心ではないかということです。今日はそんな問題をお話したいと思っています。現に、この夏のICME9のテーマは、「21世紀に向けて」となっていますが、その前に基礎的な問題について20世紀を集約することが忘れられているのではないかと思います。

私から見ても、重要だと思われる問題がいくつかありますが、その話のきっかけになるかとも思われるので、あるエピソードから始めたいと思います。湊先生から、こちらへ話をしにくるようにとのお誘いを受けたのは、花粉症で憂鬱なころでした。その薬のせいで、日中でも眠くなって、椅子に腰掛けたままうたた寝をしている内に、かなりはっきりした夢をみました。文字通りの白昼夢でした。

私はある小学校で算数を教えていました。どんな数に掛けるのだったかは覚えていませんでしたが、掛ける数は43だったことははっきり覚えていました。

私が、「先ず、何がしたいか。」と子ども達に尋ねると、「3を掛ける」というのでそうしました。次に何がしたいかと問うと、ある子が「4を掛ける」というので、私はそれに賛成しなかったら、その子は変な顔をしました。私は、「 40 を掛ける」と言わせたかったのです。しかし、なかなかそう言ってくれない。「お友達と相談してみなさい。」というと、その子は自分の隣の子に相談しかけた。その子はと見ると、とても頼りになりそうな子ではなく、頭に5円玉みたいなものをたくさん飾り付けている。(この辺が夢の夢たるところでしょう。)子どもはなかなか思うように答えてくれない。時間ばかりどんどん立つ。こんなことをしていてよいのだろうかと、私は不安になってきた。今にも終りのベルがなるのではないかと心配しているところで、夢が醒めました。

夢で不思議なことは、内容よりも感情が真実を語っていることです。私は、この夢の中に4つほどの感情を記憶していました。第一は、「授業が楽しかった」ということです。私はこれまで附属小学校などで、時々授業をさせてもらいましたが、どれも楽しい思い出になっています。(申し訳ないが、大学での講義はおもしろくなかった。)授業が楽しめること、それは算数・数学教師の資格の第一条件だと思います。

第二は、子ども達の名前を覚えてこなくて、申し訳けないと気持ちでした。やはり、授業にはちゃんと名前を覚えて行って、名指してものを言わせるべきだと思います。

第三は、正解を言わないで、子ども達にいろいろ議論させることに、こんなに時間を掛けていてよいのだろうかという不安でした。正解をいえば一言ですむことを、なぜ時間をかけて議論させたり、話し合いをさせたりしなくてはならないのか、これは、最近の授業論の基礎的問題に属することだと思います。

第四は、むしろ内容上の問題ですが、それは、この授業の夢の中の不安でもありました。それは、43 を掛けるのに、43 を 40 と 3 に分けて、別々に掛けて加えてもよいこと、すなわち、分配の法則を、私はこれまでにどこかで教えたことがあるかということに対する不安でした。

この夢で、意識された感情のなかで、はじめの二つは、一般的な授業に対する心構えに過ぎませんが、後の二つはもっと本質的な問題に関係しています。それは、授業はドリル主義がよいか、構成主義がよいかという問題です。最近は、子どもの間での話し合いや論議など、子どもの活動を中心に展開される授業がよく見られるようになりました。理解中心か技能中心かという問題にも通ずるでしょうが、そう簡単に割り切れるものではなく、それをどう按配するかということになるでしょう。研究授業では、子どもの活動を中心にした構成主義的な授業や、理解重視の授業をよく見かけ、ドリル中心の授業は全くみられませんが、普段はこっそりドリルばかりやって居られるのではないかと思われるほどです。全般的にみて、20 世紀のわが国の数学教育は、大きな失敗をしているのではないかと思うことがあります。少なくとも、あまり成功的であったとは言えそうにありません。それは、大多数の数学嫌いをつくりだしてしまったからです。確かに、算数・数学は重要な教科として高く評価されてきました。しかし、それは受験科目として重要だとして、大事にされたに過ぎません。今日のように、大衆が大学へ押し寄せる時代になり、数学が好きでないものがワンサと増えたことは、成功と言えるでしょうか。

文部省はこれに対してどんな対策をとったかと言いますと、学習指導要領の程度を落とすということでした。しかし、程度を下げて、算数・数学を易くしたら、子ども達はそれをやろうとするでしょうか。

ある中学校の校長さんで、私の親しい方にお会いしたときのことです。「学習指導要領の程度が下がって、みんなが前よりも数学をよくやるようになりましたか。」と聞いてみましたら、こう言われました。「とんでもない、できない者はいくら程度を下げてもできません。それに、今までできた者も、数学を馬鹿にしてやらなくなりました。」私は、今度の ICME の会長をされる藤田宏先生と学習指導要領の作成の仕事をご一緒したことがあります。先生は、数学者ですから、当然のことと思いますが、余り程度を下げたくないと思って居られるようでした。そして、私を程度引き下げ論者だと思って居られたのでしょう、遠慮がちに程度を下げなくてはいけませんかとおたずねになったことがあります。私は、絶対下げないで下さいといったら、とても安心されました。しかし、大勢は、程度引き下げ

になってしまいました。

それでは、いわゆる選択制度で、できる子できない子に分けてやったら、という意見がよく出ます。私はこれにも余り賛成ではありません。一番いけないのは、受験の材料にするからいけないので、そうでなければ、好きな子、できるにはどんどんやらせたらいいでしょう。それとともに、すべてのもののが学習すべき数学の質を変えて、それを面白く楽しく学べるようにすることです。これは、単に指導法の問題ではなく、指導内容の質の問題でもあるのです。

(註)先般(2000 年 12 月)、国際教育到達度評価学会の国際数学・理科教育調査の結果が発表になった。それによると、日本の子どもは、数学は「できるが大嫌い」ということであった。これは、「できないが大好き」よりももっと悪い傾向だと思う。上述の夢の記憶もそうであったが、情緒的なものは認知的なものよりも永続的であるからである。好きな子は、将来必要に応じて学習を再開するであろうが、今できる子も、嫌いなことはやがてやらなくなるであろうからである。わが国の算数・数学教育に「失敗」があったとすれば、まさにこのことであろう。

2．現代の数学教育思想

子どもの素行が悪くなったのも、算数・数学が難しすぎるからだ、とさえ言わんばかりに、算数・数学教育を非難される人があるようですが、私はこれに反撥を感じながらも、数学教育の研究者として、自分も含めて、われわれの学会の責任を感ぜざるをえません。とりわけ、これまでの研究態度を反省する必要があると思っています。それは、二つあります。

一つは、これまでのわが国の数学教育の研究は、指導法の研究に傾いてしまって、もっと基礎的な問題を反省して来なかったのではないか、ということです。いま一つは、確かに外国の研究をいろいろ熱心に紹介してきたが、それを本当にわが国に適用できるような形にはしてこなかったのではないかということです。本稿の主題は、この内の最初のものですが、話の都合上、第二の反省点にまず簡単に触れておきたいと思います。今日、世界的に、数学教育の研究思想といえるもの、あるいは数学教育の研究の基盤になっている思想には、三つほどあります。

一つは構成主義で、J.Piaget の心理学から出発したものだといわれています。もう一つは、(言葉はあまりなれていませんが)社会・文化主義で、ソ連の心理学者 Vygotski に由来するものと言われています。そして、第三にその中間にあるとみられる、相互作用主義で、これはドイツの Bauersfeld の創設と考えられます。

Piaget と Vygotski は、奇しくも同年(1896 年)の生まれですが、後者が早く(1935 年)なくなりました。何れも心理学者で、その思想は数学教育の中からうまれたものではないことに注意したい。しかし、Bauersfeld の相互作用主義は数学教育のホームメイド理論だと言えましょう。この Bauersfeld らの相互作用主義は、とくに最近の小学校算数で、子どもと教師、子ども相互の話し合い(negociation)を中心にして展開される授業には、かなり参考になるものと思います。しかし、彼らには、いまのところ、これまでの授業法に対する批

判はみられますが、この主張に基づいた授業法を積極的に構築するまでには到っていないようです。

ご存知と思いますが、一応説明しておきますと、Piaget は子どもの自然な成熟を中心において子どもが自分の活動によってどのように発達するかを記述しており、その発達理論を受け取って展開されているのが、数学教育における構成主義です。他方、Vygotski は、子どもの精神発達に対する社会的・文化的な環境の影響を重視しており、最近の数学教育では、この観点からの研究もいろいろな形で認められます。この両者の違いは、子どもの発達の要因として、成熟を中心に考えるか、子どものおかれている社会や文化を中心に考えるかにありますが、その両方であるというのが真実でしょう。Piaget も Vygotskl も、決して他方を無視していませんが、その後継者のなかには、一方に偏った立場を固守する人もあるようです。何れにしても、これらの理論をそのまま数学教育に持ってくるわけにはいかないでしょう。

例えば、Piaget は、数学の教授学的方法論については、私の知る限り、ほとんど積極的な発言はしておりません。ただ、子どもの成熟、そこにおける数学的なものの発生はこういう順序ですよといっているだけですが、日本に持ってこられると、あたかも Piaget が、算数・数学教育方法についても詳しく指示しているかのように受け取られてしまいました。もし、Piaget の心理学的主張をそのまま受け取ったら、算数は子どもの成熟にまかせて、ほっておくより仕様がないということにもなりかねません。

先ほどの授業の夢で、私が、ここで正解を教えるべきか、それとも子どもが自分から言い出すのを待つべきかと悩んだのも、大げさに言えば、Piaget にどこまで従うかの迷いであったといえましょう。Piaget 理論に従えば、子どもの自然発達を待つより他はないということになりましょうが、受験の厳しいわが国では、そんな暢気なことを言っておれない事情もあるでしょう。何れにしても、外国の思想をわが国に持って来るときは、いろいろな配慮がいります。研究者がそれを充分見極めないで紹介しても、教育現場の実践にはあまり役立たないであろうと思っています。

3．数学教育における数学本質論

上の最初の反省、すなわち、わが国の数学教育の研究は、指導法に傾いているのではないかという問題に立ち返りましょう。そのためには、まず、「数学とは何か」という、いわば数学本質論を考える必要があります。それが、分からないで算数・数学の指導法ばかりに熱中するのは、効きもしない薬を飲ませているようなもので、無駄などころかときには危険でさえあるからです。この点では、数学を最もよく知っているのは数学者ですから、数学者に教えを乞うのは当然ですが、教育的立場からはそれだけではすみません。実は、この課題は、数学者だけのものではなく、哲学的な課題、とりわけ認識論的な課題であるからです。この点で、竹内先生が、数学もよく分かっている哲学者、K..Popper の哲学に、か

ねてから注目されていたことに深く敬意を表しておりました。私は、ここへお伺いするまでに、先生の Popper 研究に関する論文を一通り拝見して参りましたが、ここで、それについて言及するだけの用意がまだできていませんので、今回は割愛させていただきます。

ここでは、アメリカの R.Hersh という方が、ある論文の冒頭で述べておられることを紹介したいと思います。それは、次の言葉です。

「(数学教育で)問題なのは、最もよい指導法とはどんなものかということではなく、数学とは一体何かということだ。」

Hersh 氏は、数学者であり、とくに数学基礎論や数理哲学の専門家といえましょうが、この論文は、最近の数学教育のみならず、数学が哲学的反省を怠っていることに警告した論文と思われます。わが国の数学教育界も、数学とは何か、とくに数学者や数学的技術者ではない、一般の人にとって、数学とは何であるかと考えることが、忘れられているように思われます。

わが国では、数学は何であれ、それはやらねばならないことに決まっている。やらなければ、大学へ行けないし、大学へいかないと、社会生活から落ちこぼれる、とさえ考えられているからです。これは、わが国独特の風潮かも知れませんが、私は、すでに明治時代からの原因があると考えています。

教育学者には常識的なことでしょうが、本来小学校(初等教育)と大学(高等教育)とは歴史発生的に全く別なものでした。小学校は庶民のために、大学は学者のものとして創設されたのですが、時代の進展とともに両者は次第に接近して、今日では、小中高一貫といわれるようになってしまいました。しかし、制度的には一貫しても、カリキュラムはそれほど滑らかに一貫されるものではありません。それを無理につないでしまったところに、今日の種々の教育的悲劇の原因があります。最も大きな問題をかかえているのは、中学校でしょう。中学校は、制度的には小学校と同じく義務教育でありながら、高校とともに大学を目指す中等教育でもあるのです。とくに、数学で、本来大学予備校としての性格をもっていた旧制中学校のカリキュラムを、そのまま新制中学校に適用したのは大変な誤りであったかも知れません。つまり、将来、学者になるかのようなカリキュラムを、すべての大衆に押し付けた格好になってしまったのです。

もし小学校1年生から始めて、中学・高校まで算数・数学がよくできて、それが好きでたまらないといった子どもは、将来何になるでしょうか。恐らく数学者になるでしょう。なぜならば、教科書はそのようにできているからです。ところが、幸か不幸か、大抵の子は途中で数学がわからなくなる。それで、数学者のようにあまり世の中に役立たないものが少なくてすんでいる、と言ったら数学者には叱られましょうが、数学者にするようなカリキュラムになっていることは、間違いがないようです。これが、数学だけではなく、国語も社会も皆、学者養成向きにできているのですから、子どもは大変です。もっと別な観点からカリキュラムを考えることができないものでしょうか。

それを考えるにも、数学とは何かということが、基本的に重要ですが、この問題は、それ

ほど簡単に答えられるものではありません。恐らくまじめに考えれば、全哲学史を見なければならないでしょうが、私はその点では素人です。しかし、私なりに理解できる見方として、数学を一つの道具だと見る哲学があります。いわゆる道具主義(instrumentalism)という立場です。その起源は、恐らく J.Dewey にあるであろうと思います。竹内先生が興味を持っておられた Popper でも道具主義はある形で高く評価されています。

たしかに、卑近なところでは、日常生活でも算数は道具として役立っています。しかし、何処まで数学が日常生活に使われているかといえば、実は大したことではないのです。せいぜい、小学校 4 年生の内容までぐらいです。私は数学をやってきたものですが、今朝から使った数学と言えば、ホテルで買い物をしたとき釣り銭を確かめたぐらいです。

ちょっと脱線になるかも知れませんが、日本の社会人の数学的学力は、平均してどの程度だと思われますか。中学校まで義務教育だから、中学３年程度だろうという人があるかも知れませんが、とんでもない。小学校卒業程度は確かだろうと言われるかも知れませんが、私は、小学校 4 年程度だと思っています。実は、そんな調査などできようはずはありません。街を歩いているおっさんを任意につかまえて、あなたはこの方程式を解けますかとか、ピタゴラスの定理が言えますかなどと尋ねてみれば、かなり正確にわかるかも知れませんが、そんなことはできないでしょう。(昔私がそんな話をしたら、実際に街に出てそんな調査をしようとして叱られたと言う学生がいました。)

恐らく、分数の加法がまともにできる社会人は、それほど多くないのではないかと思います。しかし、それでもちゃんとした社会生活はできる。従って、数学は道具だから重要だという意見は、単に計算技能だけからは認容できません。そういえば、数学教育関係者の中には、計算だけが道具ではない。「数学的考え方」が重要なのだという人があります。私もそう思いますが、「数学的考え方とは何か」と突き詰められると、相手にご満足いただける説明ができる自信はありません。

最近になって、数学は科学技術の道具として重要だという主張はかなり説得力をもってきました。科学技術に数学は重要だと言えば、数学者は喜ぶでしょう。しかし、科学技術の数学を使う人は、世代の何パーセントでしょう。アメリカのある研究者は、今の高校までの数学を自分の職業と必要とする人は、2.5%だと言っています。あとの 97.5%は、いまの数学は高等学校までやる必要はないということになります。つまり、科学技術での道具として数学の必要性を説くのは、まだ妥当ではないと言えましょう。

私は、数学の教育的重要性を理解するには、数学は道具であるが、言語・記号的道具であることに注目する必要があると思います。人間は言葉(広くは言語・記号)を使う動物です。人間が言葉を使う限り、数学は重要であり、数学の教育的重要性や人間にとっての有用性は、この観点から保証されるのが妥当でしょう。

4．言語教育の一環としての数学教育

算数・数学を一種の言語学習としてみれば、その必要性は充分に肯定されるでしょうが、それが、有効に実践されるためには、私は二つのことが肝要だと考えています。一つは、適切な学習時期の問題、もう一つは学習の場の構成の問題です。

まず、第一の問題について、とくに注目したいのは、小学校4年生までの算数指導です。ある会合で、私は小学校の先生方に「算数・数学のできる出来ないは小学校4年生で決まる」と申しましたら、非常に問題になりまして、ある人には、「それじゃ一、5年以上は算数をやっては無駄ですか。」と言われたほどです。ちょっと言い過ぎたかなと思ったのですが、私がそう言ったのは、言語教育で、4年生あたりに、ある障壁があることを教えられていたからです。それは、岡本夏木さんという心理学者が、岩波新書「ことばと発達」の中で、10歳頃の「言語革命」について語っておられることでした。それまでの子どもは、親しい人と一対一で、単語を並べるだけの子どもの言葉しか使って来なかったのですが、小学校へ入ると、みんなと一緒に、聴衆の一人として、文章になったおとなの言葉を聞かされるようになります。そして、4年生までに、このいわば、子どもの言葉が大人の言葉に完全に切り替わっていないとそれ以後の知識獲得に支障を生じます。このことは、聾唖児教育で「九歳の壁」として意識された現象だそうですが、岡本氏は、それは健常児にも存在するだろうといっておられます。私はそれは、算数学習にも存在すると思っているのです。算数も一種の言語だからです。

「これいくつ?」「2つ」「じゃこれは?」「3つ」「全部では?」「5つ」と言ったような、単語を並べたような一年生の会話が、「2と3で5になります」と言ったような文章に切り替わっても理解できるようにならないと、算数は続けられないのでしょう。この切り替えは、子どもにとって実に大変なことで、岡本氏は「言語革命」と呼んでおられます。これは、読書力にも関係しておるだろうと思います。計算はできても文章題ができない子は、この革命に成功しなかった子であろうと思います。こんな子は、上級に進むに従って、数学もできなくなります。

算数教育も言語教育としてみれば、4年生までに幼児語から完全に脱却して、大人の言葉に切り換えておかないといけないと思います。最近の若者には、この点でまだ幼児性を抜けきっていないものがかなり多くいるようように思います、「ウッソ」と「ホント」の二言でしか会話のできないもの、何に感動しても「スゴイ」としか表現できないもの、こんな若者は恐らく中学校以上の数学は学べなかったでしょう。

5．数学的シツエーションの構成

外国語の学習で、私自身も身しみて感じたことですが、学校でいくら英語を学んでも、それが自分のものとして使えないことは、なさけないことです。外人と話すとき、とっさに言葉がでてこないのです。その原因は、言葉の学習が、適切な状況(シツエーション)に

おいてなされていなかったからです。しばらく外国におれば、自然に言葉は身につきますが、自国の学校では、そのような環境を作り出すことは難しいからでしょう。算数・数学の学習もそれと同じであることは、数学が一種の言語であることを思えば、当然のことです。数学が自分の手足のように、自由に使えるものとして学ばれるには、それは、適当なシツエーションにおいて学ばれる必要があります。どんなシツエーションがよいか、それこそ、算数・数学教育の方法論の課題です。

受験問題や問題集の問題も、それぞれ一つのシツエーションを作っているでしょうが、これらは少なくとも三つ大きな欠陥をもっています。先ず第一は、これらの問題は相互に余り関係なく、断片的なことです。われわれの思考は連続して、バラバラに考えることは先ずありません。第二は、これらの問題は、他人から与えられたもので、自分の意識したものではないことです。さらに第三に、これらの問題は、その解き方がほぼ限定されていて、自由に解決方法を選ぶことができないことです。こうした欠陥は、これらの問題が、自発的な思考を触発するものではなく、それを解くことによって、機械的な反応を強化することはあっても、それによって数学を自由に柔軟に使いこなせるようにすることは、期待できないでしょう。

それでは、どんな問題集がよいか。それは、「問題集」というより、「シツエーション集」と呼ぶべきでしょう。一つの問題から出発して、次から次へと自分で問題を意識し、それを解決しながら手蔓式に学習内書を拡張していく方法です。まさに、冒頭で申した、Gattegno の言葉「小さいものから出発し、それをどこまでも何処までも発展させよ」に沿ったものです。

私は、以前大学にいたとき、教員養成課程の学生のために、ある題材集をつくりました。「小学校教師の数学的体験」(黎明書房、1994)がそれですが、あまり出来がよくなくて、恥ずかしく思っています。しかし、最近、ドイツの亘。Ch.Wittmann いう人が、私と同じような発想で、私よりもはるかに優れた研究をしておられることを知りました。彼の「教授単元(teaching unit,Unterrichsbeispiel)」と言うのがそれです。

(註)この夏の ICME9 の講演で、Wittman 氏は「本質的学習環境(substancial learning environment)」という概念を発表していますが、これは上の「教授単元」を発展させたものと考えられます。この講演の訳はつぎの雑誌にみられます:湊三郎訳:算数・数学教育を生命論的過程として発展させる(日数教会誌、82 巻、12 号、算数教育、2000)

ここでは、私が作った「単元」の例を紹介しましょう。多くの人の協力によって、このような単元をできるだけ沢山開発し、その適当な部分を適当な学年に配当し、さらに、指導方法もつけて、実践できるような形に整備することは、算数・数学教育の好個の研究課題であり、それによって今の算数・数学教育も大きく改良されると思っています。

(単元例 1)立方体の賽の目切り

これは、次のような小学校５年の教科書の問題から出発したものです。表現は子ども向きでしたが、ここでは、おとな向き書き換えておきました。

「立方体の全表面にペンキを塗ったあとで、これを縦・横・高さの三方向に、それぞれ平行な面で三等分すると、いくつかの小さい立方体(サイコロ)ができる。これらの小立方体を、その色のついた面の数によって分類すると、それぞれいくつずつになるか。」

ここでは、これからできるいろいろな問題を列記するの止めますが、それぞれをご自分で考えていただき、できれば、新しい問題をつけ加えていただければ、幸いです。

1．3等分でなく、4等分、5等分、一般に m 等分では、どうなるか。m 等分の場合、m を m－2 で次のように展開したとき、係数がそれぞれ頂点、辺、面などの個数に相当する。

$$m^3=6+12(m-2)+6(m-2)^2+(m-2)^3$$

2．3次元の立方体に対応する2次元、1次元の図形は何か。それに対して上の問題はどうなるか。

3．4次元で、立方体に対応する図形はどんなものか。

3-1.　4次元の立方体に相当する図形の、頂点、辺、面などの数はいくつか。

3-2.　0次元から5次元まで、立方体に相当する図形の頂点、辺、面などの数の一覧表をつくれ。(パスカルの三角形に類似したものができる。)

3-3. 4次元で、上の問題はどうなるか。

3-4. n 次元では上の問題はどうなるか。(小立方体を座標で表すこと)

4．立方体でなく、正4面体を各面に平行な面で何等分かすると、どんな立体がいくつできるか。

4-1. 正8面体であれば、この問題はどうなるか。

4-2. 正8面体を底面ではなく対角面に平行に等分するとどんな図形がいくつできるか。

(単元例2)シャボンダマ遊び

これは、論証幾何では多少難しい問題ですが、昔からおなじみのものです。純粋に幾何の問題として述べれば、次のようなものです。

「鋭角三角形で、三頂点までの距離の和が最小になるような点を求めよ。」

答は、三辺を等角(120 度)に見込む点で、Fermat 定点と言われています。作図は簡単ですが、証明は今の高校生にも難しいでしょう。私は、小学5年生に次のような問題にして、実験的課題として与えたことがあります。

「プラスチックの材料をつかって、右のような模型をつくりました。
これを石鹸水に浸けて、引き上げるとき、膜はどのように張るか。」

三つの側面に膜が張るのではなく、三角形の内部のある点(Fermat

点)に水柱が立ち、それから三つの柱にそれぞれ羽根が張るのです。

次のような問題ができました。

1.三頂点までの距離の和が最小になる点を探す。これは、勿論、論証的ではなく、三角形を細かく分けて、手分けをして、実験的に探すのです。

2.側面の面積の和と、三つの羽根の面積の和を比較する。

3.シャボンダマを作って、それを静かに平面の上に落とすと、どんな形になるか。(最小曲面の話、半球になる。)

6．結語

もっといくつかの例を、もっと詳しく紹介するとよいのですが、時間の都合で割愛しなければなりません。できれば、教科書や問題集などの一つの問題から出発して、同僚の方と協力して、ご自分たちでそれをできるだけ広く展開してみられるとよいでしょう。実はこうした研究は、Wittman の「教授単元」の開発でしょうが、彼によれば、それは三つの目的をもっています。それは、まず教材開発であり、次に教師研修の手段であり、さらに注目すべきは、それは数学教育学研究そのものであるというのです。確かに、こうした作業では、そこから、数学の本質、思考との関連、子どもの指導上の理念について、いろいろなことを反省させられます。これまでは、教科書や参考書にある、決まった教材をどう教えるかだけに専心して来ましたが、こうした新しい教材開発の研究や経験は、日本の算数・数学の教師には極めて乏しかったのではないでしょうか。

これまでのわが国の算数・数学教育では、とかく固定された教材をいかに教えるかという、指導法の研究だけにおわって、もっと基礎的な問題を反省することを怠ってきたようです。すなわち、教えている数学の本質は何であるか、それは、児童・生徒にとってどんな意味があるかを反省することは、あまり真剣になされなかったといえます。しかし、それは、手をこまぬいて考えることでは往く、自分で実際に教材を開発しながら考えるべきことです。

本稿では、そのことに注意を喚起し、あらためて数学を一つの言語・記号的道具とみることによって、数学をすべてのものに必要な教科として構築することができるという見地を指摘しました。そして、数学を自分の手足のように自由に使える道具とするには、シツエーションの開発の重要であることを強調しました。ご清聴を感謝いたします。

(平成 13 年 2 月 5 日　完)