

倍数、約数、無理数の音楽

山形市立第二中学校 菊池 久人

要約：新学習指導要領に基づいて、選択教科では補充的扱いの自由度が増し、従来放課後等時間のやりくりをしていた内容が正規の授業として行うことが可能となった。それと並行して、発展的な内容を積極的に取り扱うことが期待されている。特に他教科等との合科的な内容は総合的な学習の時間との関連にともない、今後注目される傾向にある。そこで、数学を利用して音楽をつくるという体験を通して、数学と音楽の関係に気づかせ、身のまわりの事象と数学との関わりを実感させたいと思い、本実践を仕組んでみた。

キーワード：合科的扱い、音階、～を法とする

1. はじめに

今年の夏、選択数学で利用できる素材はないものかと、書店で数学関係の書籍や雑誌を探していた。しかし、一般の書店にはその手のものはなかなか置いていない。そこで何気なく手にした科学系の雑誌のページをめくると、音に関する特集の一つとして「 π の音楽」という項目があり、興味深く読んだ。円周率 π の近似値にある数的な処理を加えることにより、音階を対応させて曲を作るという試みだった。 π は無理数なのでその近似値は有理数のように同じ数のサイクルが現れることはなく、小数点以下の数は無限に続く。それを音階に変換すると、ある桁からある桁の間では実に美しいメロディーを奏でるという。これを読んで、選択数学で応用できないかと思い、本実践へと発展することとなった。

2. 音楽と数学の関わりについて

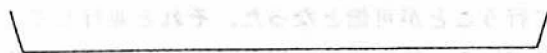
音楽と数学が関係あると聞くと、ちょっと意外かもしれない。しかし、ドレミファソラシドの音階が周波数という数値で表されることから想像できるように、これらの間には密接な関係がある。

音楽と数学の結びつきはかなり古くから知られている。ピタゴラス音階は紀元前6世紀頃の古代ギリシャの時代、数学者でもあり、新興宗教の教祖的な存在でもあったピタゴラス及びピタゴラス学派の数学理論から、作られたものである。これは、完全5度を積み重ねた音列から導き出された音階であったが、和音を奏すると響きが悪く、その点を改良し誕生したものが純正律である。純正律は感覚的に言えば「自然で無理のない心地よいハーモニーを実現できる音律」である。理論的にはヘルツで表現される周波数の比率が、 $1:2$ （オクターブ）や $2:3$ （完全5度）など単純な整数比になるような音程で構成されている音律ということになる。純正律の欠点を直すために考えられたものが平均率である。鍵盤上でいうところのドから一番近くのドまでをオクターブというが、それをその間にある12の音で均等に分けた音律を平均律という。ピアノの調律において「1秒間に何回音のうねりがあったら正しい」とされる事からわかるように平均律は基本的にハモらない音階である。⁽¹⁾

楽音の倍數減、増減、倍音

ピタゴラス音階の作り方は次のようにすればよい。

x x x x x x x x x x x x 倍
 () () () () () () () () () ()
 ド ド' レ レ' ミ ファ ファ' ソ ソ' ラ ラ' シド



2倍

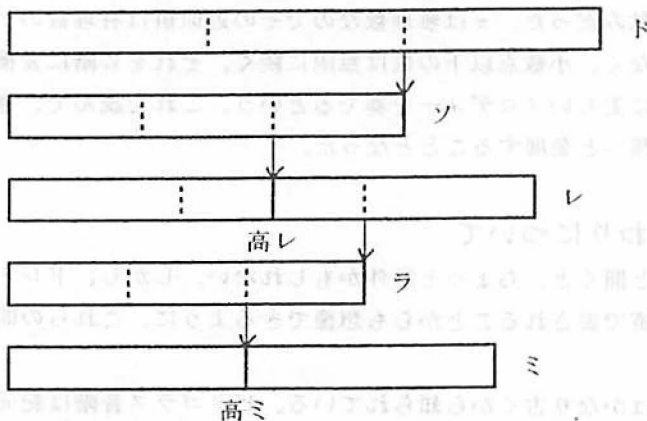
ソ は $x^5 = 1.34 \dots\dots$ これは およそ $4/3$

ド は $x^{12} = 2.00$

そして、この比をみると、

$$\begin{aligned} \text{ド} : \text{ソ} &= 2 : 4/3 \\ &= 6 : 4 \\ &= 3 : 2 \end{aligned}$$

つまり、「木琴の長さ」とか「弦の長さ」でいうと、「ド」と「ソ」は「3 : 2」になっている。「ド」から「3 : 2」を利用して、どんどん音階を作っていくと、次の図のようになる。ただし、もとの「ド」の長さの半分よりも短くなったら、2倍することによって、オクターブ内におさめることにする。



平均律の考え方は次のようになる。

x x x x x x x x x x x x 倍
 () () () () () () () () () ()
 ド ド' レ レ' ミ ファ ファ' ソ ソ' ラ ラ' シド



2倍

これは2倍を平均していることになる。したがって、

$x^{12} = 2$ と考える。12個の平均なので12平均律という。xは2の12乗根となり、およそ1.06になる。⁽²⁾

3. 実践について

今回の実践の対象としたのは、3年の選択数学のクラスである。このクラスは国語、社会、数学、理科、英語の五教科13コースから各自の希望で選択した生徒によって構成されている。ここで学習する生徒は概ね数学を得意と考えている生徒である。

(1) ねらい

本実践のねらいは数学と音楽の関係の深さに気づき、今後身の回りのことがらについて数学的な見方や考え方ができるようにすることである。そのためには、次の①②を達成させることが必要である。

- ①音楽と数学の結びつきを平均律、ピタゴラス音階の作り方を例に挙げて説明し、それを理解させる。
- ②倍数、約数、無理数の近似値などの数の列に音階を対応させ、曲を作る方法がわかるようにする。

(2) 指導の展開 山形市立第二中学校において平成14年9月実施

1時間目

[1] 音階とギター弦の長さの関係を知る。

- ・ある音とそれより1オクターブ高い音の弦の長さを比べると、2:1になっていることに気づかせる。完全5度の場合は2:3になっていることに気づかせる。

[2] 平均律、ピタゴラス音階の作り方を知る。

- ・平均律は12乗して2になる数、計算すると約1.06倍ずつしていくと、高いドから低いド'に移動する。
- ・ピタゴラス音階はド:ソ=3:2を利用して、どんどん音階を作っていくことができる。

[3] ピタゴラス音階を2:3(完全5度)と、1:2(オクターブ)を利用して作る。

[4] ピタゴラス音階は不協和音が生じることより、現在は12平均律が使われていることを知る。

2時間目

[5] 3の倍数を7で割ったあまり(3の倍数を7を法とする数)に、

0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ 6⇒シ をそれぞれ対応させ、曲を作る。



[6] アルトリコーダーで演奏する。

曲を聴いての感想を書く。

生徒の感想

- ・メロディーがだんだん下がっているところが安定感があるような感じがする。
- ・最後にシミと上がってから収まるところが何かおかしかった。
- ・音が高くなったり、低くなったりしている。
- ・変な感じがする。

[7] [5] の曲の作り方で、変更可能なところを考える。

生徒の反応

- ・ 3の倍数を他の数の倍数に変える。
- ・ 7ではなく違う数で割る。
- ・ 音階の対応を変える。0⇒ドではなく、0⇒ソなど調を変更させる。
- ・ 倍数を約数に変える。
- ・ 商を小数で考える。

[8] 3の倍数の曲の作り方を参考に、変更箇所を工夫して曲を作る。

3時間目

[9] 曲づくりの中間発表として、作った曲をアルトリコーダーで練習し、一人一曲ずつ発表し、互いに感想を述べ合う。

生徒が最初に作った曲

- ① 5の倍数を7で割り、その余りに0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ
6⇒シ を対応させる。



- ② 3の倍数を5で割り、その余りに0⇒レ 1⇒ミ 2⇒ファ 3⇒ソ 4⇒ラ 5⇒シ
6⇒ド を対応させる。



- ③ 5の倍数を8で割り、その余りに0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ
6⇒シ 7⇒ド (高) を対応させる。



[10] さらに、曲を作る。

4時間目

[11] 作った曲の練習をして、発表会をする。

- ・ 一人ひとりカセットテープに録音する。
- ・ 録音したテープを聴くときに、曲の説明をさせる。
- ・ 互いに感想を述べ合う。

その後生徒が作った曲

- ① 3の倍数を5で割り、その余りに0⇒ファ 1⇒ソ 2⇒ラ 3⇒シ 4⇒ド (高) を対応させる。
- ② 10の倍数を7で割り、その余りに0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ 6⇒シ を対応させる。
- ③ 7の倍数を5で割り、その余りに0⇒ファ 1⇒ソ 2⇒ラ 3⇒シ 4⇒ド (高) を対応させる。
- ④ 9の倍数を7で割り、その余りに0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ 6⇒シ を対応させる。
- ⑤ 3の倍数を5で割り、その余りに0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ 6⇒シ を対応させる。
- ⑥ 2の倍数を3で割り、その余りに0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ を対応させる。
- ⑦ 3の倍数を7で割り、小数第二位まで求め、各位の数に0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ 6⇒シ 7⇒ド (高) を対応させる。
- ⑧ 108の約数を5で割り、0⇒ソ 1⇒ファ 2⇒ミ 3⇒レ 4⇒ド を対応させる。
- ⑨ 96の約数を3で割り、0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ を対応させる。
- ⑩ 72の約数を5で割り、0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ を対応させる。
- ⑪ 108の約数を3で割り、0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ を対応させる。
- ⑫ 60の約数を6で割り、0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ を対応させる。

5時間目

[12] $\sqrt{2}$ の近似値を利用して、これまでの学習を参考に、曲づくりに取り組む。

 $\sqrt{2}$ の近似値で生徒が作った曲

- ① 0, 1⇒ファ 2, 3⇒ソ 4, 5⇒ラ 6, 7⇒シ 8, 9⇒ド を対応させる。
- ② 2けたずつに区切って各位の和を9で割った余りに0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ 6⇒シ 7⇒ド (高) 8⇒ソ 9⇒ラ を対応させる。
- ③ 3けたずつに区切って各位の和を9で割った余りに0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ 6⇒シ 7⇒ド (高) 8⇒ソ 9⇒ラ を対応させる。
- ④ 1⇒ラ (低) 2⇒シ (低) 3⇒ド 4⇒レ 5⇒ミ 6⇒ファ 7⇒ソ 8⇒ラ 9⇒シ 0⇒ド (高) を対応させる。
- ⑤ 小数第15位まで 1⇒ラ (低) 2⇒シ (低) 3⇒ド 4⇒レ 5⇒ミ 6⇒ファ 7⇒ソ 8⇒ラ 9⇒シ 0⇒ド (高) を対応させる。
その後は小数部分を2けたずつ区切り、その数を整数と見立てて、7で割った余りに0⇒ド 1⇒レ 2⇒ミ 3⇒ファ 4⇒ソ 5⇒ラ 6⇒シ を対応させる。

4. 成果と課題

合科的な扱い、特に数学と音楽については、当該学年の生徒を対象に行ったことはなかったので、選択数学の授業に「音楽」という言葉が出てきただけで、「はじめ『3の倍数の曲』と聞いたとき、『なんだこれっ・・・』と疑問ばかり残った・・・」の感想のように違和感を感じていたようだ。というのも、現在使用されている音階が12平均律という数学的理論に支えられている事実を初めて知ることになったのであるから当然かもしれない。ギター弦の長さや音階の関係において、長さが1/2倍になると1オクターブ上の音になることは生徒にとっては大きな驚きであった。このように、音楽の素養が不足しているために、かえってそれらの事実が新鮮みを帯びて課題解決に意欲的に取り組むことができたようだ。ピタゴラス音階が古くから発見されており、その考えに基づいて弦の長さに見立てて次々と音階を作っていくことを経験させることにより、音階は人の手によって作り出されたものであるという実感が湧いてきたものと思われる。

倍数の音楽では、ある数を法として考えると必ず循環する形が現れる。そのことに気づいた「いろいろ工夫しても同じ音のつながりになり、単調な感じになってしまった。」という感想が見られた。数の繰り返し、すなわち音の繰り返しを避けるために倍数から約数へと発展させる発想もあった。そのことは次の感想「倍数だと必ず繰り返しが出てしまうので、約数の曲を多数作ったが、なかなかハーモニーがきれいにできる収まりのある数を見つけることができなかった。しかし、割ってみたり、かけてみたり、くっつけてみたりと工夫することができた。」にも現れている。

本実践を終えて、生徒は12平均律やピタゴラス音階について理解し、音楽と数学が互いに関係し合っていることに気づくことができた。また、倍数、約数、無理数を利用して、それに音を対応させて曲を作る方法を理解し、数を数学的に処理することによって曲を作ることが可能であることが実感できた。作った曲は一人一曲ずつカセットテープに録音して、それをまとめたものを一人ひとりにダビングして、記念の作品として思い出に残るようにした。

教科としての音楽は好き嫌いがはっきりしているが、数学からのアプローチによって、音楽的な理論に抵抗なく触れることができた。おそらくこれまで経験の少ない作曲に挑戦し、形として残すことができたことは選択数学の副産物として生徒達の記憶の片隅に残っていくものと思う。

参考文献

- (1) 「音楽の数理」 <http://mp-w3math.jwu.ac.jp/~mejirosai/2001/music.htm>
 (2) 「ピタゴラス音階」 <http://www.hokuriku.ne.jp/fukiyo/math-osy/doremi.htm>

Composition by multiple, divisor, irrational number

KIKUCHI Hisato Yamagata 2nd Junior High School

According to the new learning curriculum, we can teach a mathematics supplementary lesson as optional subjects. In addition we are expected to make students develop their abilities. Especially when the cross-curriculum is remarkable these days in relation to optional subjects or general studies. Hoping students notice the relation between matter of life and mathematics, I made them devise the way of composition using numbers.