東北数学教育学会年報
2003.3.31　第34号

数理系学生の数学科教育法の改善（４）

―― ルベーグ積分の導入をめぐって ――

佐伯　卓也（山形大学）

概要 1997年から山形大学理学部数理科学科の数学科教育法（３年次・２単位）を担当している。ルベーグ積分の導入は2000(平成12)年に自作のテキストで４ページほど行ったのが最初である。その結果が十分手ごたえがあったので，翌年2001年のテキストにも，ルベーグ積分部分は改定なしで盛り込んだ。本稿では主として2001年の結果のルベーグ積分部分の報告をし，考察を加える。

キーワード 数理系学生，数学科教育法，高校数学教師教育，ルベーグ積分

１．はじめに

理学部数理系学生および教育学部学生対象のルベーグ積分の導入の経過に触れる(表1)。

表１　2000年から2001年の数理系と教育学部の授業

授業記号	数理系学生(数学科教育法)	授業記号	教育学部学生(確率論)
S_0	2000年4月―7月	E_0	2000年9月25日―28日集中講義
S_1	2001年4月―7月	E_1	2001年10月―2002年2月週1回

本稿のルベーグ積分の授業の報告の主要な内容は授業S_1の部分である。教育学部の部分の授業E_0, E_1の結果はまとまり次第改めて報告する予定である。

数学科教育法でルベーグ積分を導入した理由を述べる（佐伯,2001bc,2002ab）。一つは高校生に微積分を教えることを考えたとき，２０世紀に発達した積分の知識を与える必要があること，これはリーマン積分を外に立って見直す効果をもたらす。二つ目は確率論の指導のときに公理的扱いではコルモゴロフの定義に触れる必要からルベーグ積分がいる。そこで，アンケート調査の結果から得ていることだが対象の３年次学生はまだルベーグ積分は未履修ということで，大学数学でやるスタイルでなく比較的分かりやすい方法の必要から，ｙ軸の方の分割方法（吉田,1934;松浦他,1993）を利用した。

その結果は期末考査はやや効果的であった（佐伯,2001b）が，日常的レポートの結果はやや低いという結果であり(佐伯,2001c）分散的であった。次ぎに，本研究の目的を記す。

本稿の目的は

①数理系学生の授業S_1の中で，積分の知識の拡大をねらいルベーグ積分を指導することについて，授業S_0の結果の追試を行う

②数理系学生の数学科教育法の中でルベーグ積分の指導をすることの効果について記し今後の指導についても考察を試みる。

2．2001年度の授業S₁実施の要点

2001年度受講生の人数を表2に記す。高校数学教科書に基づいた数学それ自身の理解力を高める指導法の工夫がいる。このため2000年度のテキストはかなり大幅に改訂した。従来のテキストからかなりの部分を削除して，改めて「積分（ルベーグ積分）」，類比教材として「ヤコビの実変数楕円関数の類比としての三角関数」等を入れた。2001年度のテキストは前年のテキストを若干変えた。しかしルベーグ積分の部分は変えなかった。次に新テキスト（2001年度）の内容を章と節の見出し(目次)を示す。

表2　授業S_1の申告者数と期末試験受験者数

	申告者数			期末試験受験者数		
	3年次	過年度	計	3年次	過年度	計
男子	29	4	33	27	2	29
女子	8		8	8		8
計	37	4	41	35	2	37

1 序論：新旧指導要領の比較，簡単な数学教育の歴史等

2 児童生徒の数学学習モデルを求めて：低学年用数学的モデル，ブルーナーの翻案，スフォードの概念形成モデル

3 話しかけ法・テキスト法（講話法）：話しかけ法・テキスト法について，テキスト法の実際

4 類比教材について：類比教材の概念，類比教材と先行オーガナイザ

5 解析の内容から：高校数学教科書から，高校数学の背景となる数学 — 関数について
高校数学の背景となる数学 — 長さについて，演習と実習課題（数学Ⅱ）— その1
高校数学の背景となる数学 — 積分について，演習と実習課題（数学Ⅱ）— その2

6 類比教材の利用：ヤコビの実変数楕円関数の類比教材としての三角関数，類比教材としての三角関数と双曲線関数，演習と実習課題（数学Ⅲ）

7 高校数学の背景としての幾何（図形）について：ユークリッド幾何学の歴史，ヒルベルトの幾何学の基礎，非ユークリッド幾何学の例，演習と実習課題（数学A）— 幾何そのI，軌跡について，演習と実習課題（数学C）— 幾何その2，作図題について，演習と実習課題（数学A）— 幾何その3

(注)上の5の「積分について」その2，でルベーグ積分を扱っている。

3．ルベーグ積分の導入の実際

テキスト作成の参考にした主なる文献は矢野編『数学小辞典』(1968)，吉田洋一先生の本(1934)，松浦他(1993)等である。テキストの項目は（5.5）高校数学の背景となる数学 — 積分について，で見出し部分と要点のみをたどることにする。

(1)ディリクレ関数，(2)ジョルダン測度とリーマン積分，(3)ルベーグの測度：

区間［a, b］の長さをb－aとする。今測度を測りたい集合をGとする。区間を有限個または可算無限個の微小半開区間 $\varepsilon_i>0$（i=1, 2, •••）によって測りたい点集合を全部を被覆する。

（外測度の定義）有界集合は必ず有限個の区間で被覆できる（ハイネ・ボレルの被覆定理）。点集合を覆った区間の和を $G(\varepsilon)=\Sigma_i \varepsilon_i$ とすると $G(\varepsilon)>$(Gの長さ)であるから，覆い方をいろいろとり，この $G(\varepsilon)$ の下限を集合Gの外測度という。

（内測度の定義）点集合Gは有界であるから，それを含むあらかじめ測度の知られている区間（これをIとする）でGを囲んでおく。これを $[a, b]=I$ とし，区間の長さを $|I|$ としIに関してのGの補集合 $G^c=I-G$ を考える。G^c を再び微小半開区間で覆い，その和の下限を $G^c(\varepsilon)$ とする。そこで $|I|-G^c(\varepsilon)$ を作ると $|I|-G^c(\varepsilon)<G(\varepsilon)$，この左辺を集合Gの内測度という。明らかに（内測度）＜（外測度）であり，$\varepsilon_i\to 0$ のとき，（内測度）＝（外測度）ならば，集合Gはルベーグ可測であり，その値をGのルベーグ測度という。

(4)ルベーグ可測関数，ルベーグ積分の定義：f(x)は[a, b]で定義された有界な関数とする。まず，$f(x)\geqq 0$ とおく。[a, b]における $f(x)$ の下限をL，上限をMとして，区間[L, M]を分点

$$L=\alpha_0<\alpha_2<\cdots\cdots<\alpha_n=M$$

によってn個の小区間に分割する。$\alpha_i\leqq f(x)<\alpha_{i+1}$ となるようなxの集合のルベーグ測度を $m(\alpha_i, \alpha_{i+1})$ で表し，この分割をΔとして

$$s_{\Delta}=\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_i m(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \qquad \underline{s}_{\Delta}=\Sigma_{i=1}^{n}\alpha_{i-1} m(\alpha_{i-1}, \alpha_i)$$

とおくと，$\max(\alpha_i-\alpha_{i-1})\longrightarrow 0$ となるように分割を細かくするとき

$$s_{\Delta}\longrightarrow s \qquad \underline{s}_{\Delta}\longrightarrow \underline{s}$$

となる。特に $s=\underline{s}$ のときその値をSとすれば，Sをf(x)のaからbまでのルベーグ積分と言い

$$S=(L)\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$$

等で表し，f(x)はルベーグ積分可能と言う。

以上で吉田洋一先生流儀のy軸の方の分割方式のルベーグ積分の記述を終わる。

4．2001年度の授業 S_1 の結果

日常的な授業の中では演習と実習を行った。これらの評価はレポートを提出させて行った。レポートは4月20日より7月6日まで6回課し1週間後に提出させた。課題はテキストの「演習と実習課題」の中から出題した。これらのレポートはすべて応答の必要なカテゴリー項目を選び，それを記述してる個数で評価した。ルベーグ積分に関係する部分の課題を記す。

【日常的なレポートの課題】（4回目の課題 — 6月22日）

(1)テキスト問題［5.9］教科書数Ⅱp. 122の1行~14行の数学の事実を，リーマン積分の言葉で言い換えて見よ。また，ルベーグ積分でも試みよ。これは高校生に説明する問題ではない（教科書の問題は定積分の定義である）。

(2)教科書の同じ箇所の事実を，数学Ⅱを学習している生徒が理解可能な水準で，リーマン積分で言い換えて説明するための「テキスト法」のテキストを作成してみよ。

表3　日常的なレポートの関係部分の分析

解答区分	応答人数	コメント
(1)［数Ⅱ積分のリーマン積分での言い換え］		
大体良し	4(11.8)	ここでの問題点は学生のリーマン積分の定義が明確でないことである。これは理学部の積分の履修の問題である。
中ぐらい	21(61.8)	
不完全	9(26.4)	有界関数の意識，sup. infの理解にも問題がある。
計	34	授業効果　やや低い(−)
［定義で出て来た関数例］		
連続関数	10(29.4)	
有界関数	10(29.4)	
一様連続	1(2.9)	
指定なし	13(38.3)	高校の教科書は関数は連続と決まっているので指定しない
［ルベーグ積分で言い換え］		
大体良し	4(11.8)	受講生に聞くとルベーグ積分は学習してないと言うので必要な測度，ルベーグ測度，ルベーグ積分の指導をしたが，それだけではあまり効果はないように見える。
中ぐらい	21(61.8)	
不完全	6(17.6)	
解なし	3(8.8)	
計	34	授業効果　低い(−−)
(2)［リーマン積分で言え換え (2)］		
大体良し	8(23.5)	
中ぐらい	12(35.3)	
不完全	5(14.7)	
誤無答	9(26.5)	
計	34	授業効果　やや低い(−)

次に期末考査の問題を示しておく。

【期末考査の課題】（課題は3題で，テスト日時は7月27日 14:40~16:10，テキスト参考書類持ち込みは良いとした）

［1］リーマン積分とルベーグ積分の定義について，相違点を論ぜよ。

以下略す。

次に期末考査の結果を表4に記す。

表4 期末考査の分析

解答区分	応答人数(%)	応答のカテゴリーとコメント
[1]リーマン積分とルベーグ積分の相違点		
(1)定義の記述		
両者の定義	17(45.9%)	リーマン積分とルベーグ積分の定義が揃っている
不正確	16(42.2)	定義が一つだけとか，特にリーマン積分が不正確が多い
白紙	4(10.8)	･･･ 高木貞治解析概論p91の通りとする ･･･ という例あり
(2)測度明瞭	15(40.5)	ルベーク測度を正確に記す
不正確	17(45.9)	測度の定義が不正確
白紙	5(13.5)	
計	37	結果の判定 (1)(2)とも やや高い(+)

評価は応答のカテゴリー項目をきめそれが満たされているか否かの個数で数値化した，括弧内はその全応答数に対する%である。また，結果の判定では恣意的だが，一応応答率が高い方から，高い(++)，やや高い(+)，中間(±)，やや低い(-)，低い(--)とした。

5．考察

2000年度実施の「話しかけ法・テキスト法」の後を受けて，今年度(2001年度)大幅に改変した方法で授業を行った。今年度新規に実施した箇所の評価について記しておく。

ルベーグ積分のもとになったリーマン積分の定義が不正確であった。記述の方法も関数をきちっと決めていない解答が以外に多い。したがってルベーグ積分の述べ方も数学の授業で未学習のこともあり，ルベーク測度の意識もこれだけの授業では期待出来ないのも当然かも知れない。

レポートの部の評価の判定はやや低い(-)と低い(--)と出たが，期末テストの方は逆に(1),(2)ともにやや高い(+)となって，結果は分散的になった。これは期末考査の方が7月に行ったと言うことで学生は勉学の機会がそれだけ多くなったとも解される。

日常的なレポートの評価問題，期末考査の評価問題がともに少なくこれだけで結果についてはあまり明確なことを言うためにはかなりの無理があるように見える。ここが本研究の最大の限界になると考えられる。しかし，一つの実践例として捕らえればそれなりの情報を提供しているようである。そのような意味において，今後のルベーグ積分の指導に期待を持たせる結果かも知れない。

参考文献

松浦武信・高橋宣明・吉田正廣共著（1993）『物理・工学のためのルベーグ積分入門』，

東海大学出版会，東京
佐伯卓也（2000a）数理系学生のための数学科教育法の改善 ―― 話しかけ法とテキスト法(講話法)について，
佐伯卓也（2000b）数理系学生のための数学科教育法 ―― 3年間の経緯と問題，東北数学教育学会年報，31，42-45
佐伯卓也（2000c）数理系学生の高校数学「積分」の知識，日本科学教育学会年会論文集，24，3 DE，257-258
佐伯卓也（2001a）数理系学生の数学科教育法の研究 ―― 高校数学教師の知識技能を求めて，第34回数学教育論文発表会論文集，635-636
佐伯卓也（2001b）数理系学生の数学科教育法の研究 ―― 日常的レポートの結果，第33回東北数学教育学会年会発表資料（2001年12月2日，八戸工大）
佐伯卓也（2002a）数理系学生の数学科教育法の試み ―― 高校の数学教師養成を目指して，日本科学教育学会研究会研究報告，16巻6号，7-12
佐伯卓也（2002b）数理系学生の数学科教育法の改善（2） ―― 話しかけ法・テキスト法（講話法）と類比教材，東北数学教育年報，33，31-38
佐伯卓也（2003a）数理系学生の数学科教育法の改善（3） ―― 高校数学教材漸近線をめぐって，東北数学教育年報，34，
矢野健太郎編（1968）『数学小辞典』，共立出版，東京
吉田洋一（1934）『実変数関数論概要』，共立出版，東京

Reform of the Method of Teaching Mathematics for Students
at a Mathematics Course
in the Faculty of Science (4th Report)

―― About an Introduction of Lebesgue's Integral ――

SAEKI, Takuya (Yamagata University)

(Abstracted)

For the purpose of introducing of teaching mathematics for the students at a mathematics course in the faculty of science is training of mathematics teachers of the senior high school. It was the first semester in 2000 to introduce Lebesgue's integral in the mathematics course. Having felt some effects to introduce the Lebesgue's integral, we tried in 2001. In the present paper, we shall report the results of their effect, and discuss about them.