東北数学教育学会年報
2003.3.31　第34号

数理系学生の数学科教育法の改善（３）

―― 高校数学教材漸近線をめぐって ――

佐伯　卓也（山形大学）

概要　平成11(1999)年に発表になった高校の学習指導要領では，数学Ｃの中に漸近線の項目が解説書レベルで入っている。ところが現在の大学の数理系学生が最初に履修する微分積分学では，漸近線の扱いは甚だ影が薄い。理学部で数学科教育法を担当した機会に調査を試みた。この結果漸近線に関する種々の問題が出て来た。この問題を報告し改善策を提案し考察を試みたい。

キーワード：大学数学教育，高校数学教師教育，学生の漸近線の理解

１．はじめに

筆者は1997年以来山形大学の数理系学生対象に高校数学科教師養成を目標に数学科教育法の授業を担当してきた。最初学生の数学文章の表現に問題があったのでその改善策として，Smith Ⅲ（1996）の telling method をもとにして「話しかけ法・テキスト法（合わせて講話法）」を試行的に開発し1999年に実践をした。その結果学生の数学の文章表現が目立って改善された（佐伯,2000）。ところが新しく学生の高校数学自体の理解の仕方に問題のあることが目立つようになった。筆者は2001年以来数学科教育法では，学生の高校数学自体の理解の仕方の改善の検討を試みている（佐伯,2002b）。今回の漸近線の課題の扱いも学生の高校数学自体の理解を強化する文脈の延長線上に位置付けられている

ところで，1980年代後半あたりから数理系初学者用の大学の微積分の教科書から「曲線の追跡」の題目がなくなり従って「漸近線」の項目もなくなって久しい。一方，1999年に公布された高等学校数学の新学習指導要領では，本文には漸近線の記述は無いが解説書には数学Ｃの内容として（選択部分であるが）記載されている。もし，高校の数学の教師を教育するならば，漸近線の指導法が必須となる。ここで，高校の数学教師教育のための漸近線の指導の問題が起こるので，これらを検討して見ることにした。

まず，本研究の目的について記す。

①数理系学生（３年次）の漸近線の専門数学としての知識について知る，

②数理系学生の漸近線の知識は，指導要領水準で考えて適切か否かを知る，

③大学でこの知識補充のための漸近線の指導の改善法の提案を試み，考察する，

を取り上げることにした。

２．指導要領の中での漸近線の扱い

平成１１（1999)年度のわが国の高等学校数学科新学習指導要領を見ると唯一「漸近線」に関係する部分は数学Ｃ（２）式と曲線（ア）二次曲線（イ）楕円と双曲線，になるようである。指導要領の本文には「漸近線」としては載ってはいないが，文部省（当時）（1999）の解説書では，

なお，漸近線の存在やその方程式を導く際には，直感的に扱う。例えば，双曲線がその中心から遠ざかるにつれて，次第に漸近線に接近していく状況をコンピュータ等を用いて確認させることが考えられる，

として掲載されている。また，解説書関係では吉田・飯高（2000）の記述は

双曲線については，コンピュータ等を活用して双曲線とその漸近線の関係が，｜ｘ｜あるいは｜ｙ｜の値が大きくなるにつれて，どのようになっているかを確認させるなどの指導の工夫が大切である。なお，漸近線の方程式を導く際には直感的な扱いでよい。

となっている。ところで，教師がこの内容を生徒に伝えようとしたら，教師自身は「漸近線」と二次曲線の知識を持った上，もっと広く一般的な，かつての曲線の追跡に出ている漸近線に匹敵する知識を持つ必要に迫られるのではなかろうか。

３．２００２年度の授業概要

授業対象の学生は山形大学理学部の主として３年次学生で，申告者は２８名で途中取り消しもあり，期末考査（2002年7月26日実施）受験者は２６名であった。詳しくは表１の通りである。表中「履修生」と略したが正式には「科目等履修生」のことである。

表１　申告者数と期末試験受験者数

	申告者数				期末試験受験者数			
	３年次	過年度	履修生	計	３年次	過年度	履修生	計
男子	２０	２	１	２３	１８	２	１	２１
女子	５			５	５			５
計	２５	２	１	２８	２３	２	１	２６

関係する部分の授業の概略を示す。一般論として，児童生徒の数学学習モデル，話しかけ法・テキスト法（講話法），類比教材と理解テストを示した後に，高校数学の水準よりかなり詳しく「関数」「長さ」「積分」の講義と平行して「演習と実習課題」のプリントと，対応する高校教科書のプリントを配布して，実践的な問題の遂行，レポートの提出，小テスト等を行った。演習と実習課題は「数学Ⅱその１」「数学Ⅱその２」「数学Ⅲ」「数学Ａ幾何その１」「数学Ｃ幾何その２」とした。この中で積分の中ではルベーグ測度と積分，類比教材としてはヤコビの実変数楕円関数の類比教材としての三角関数等，幾何としては，ヒルベルトの幾何学の基礎の初めの部分，非ユークリッド幾何のポアンカレモデル等の講義が含ませている。さらに，幾何では，Gödelの不完全性定理の解説でしめく

くった。積分や類比教材として高校数学よりレベルをあげた理由は，やや高度な立場から高校数学を展望させたかったからである。

4．学生の漸近線の知識の例

(4.1)小テストの結果

学生の漸近線に関係する評価場面は小テスト２と期末テスト［２］の二か所であった。まず小テストは７月１９日（金）に実施した。受験者は２４名で，問題は次の１題である。

［小テスト問題］高校数学の数学Ｃのコピー３９ページ１２行に［例］がある。例題に沿って双曲線の「漸近線」の要点を説明せよ。（文中の例題は次の通り）

［例］双曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ について，漸近線，頂点，焦点を求め概形をかけ。

以下略。

学生に要求した漸近線の知識は①漸近線の方程式，②曲線が漸近線に限りなく近づくの表現，③漸近線と曲線は接することも交わることもないの表現，の３点である。

評価区分は次のようした。①，②，③と揃ってる解答を正解Ａ，このうち一つ欠けてい

表２　解答の段階とその比率

段階（内容）	人数（比率）
段階Ａ（①②③が揃ってる）	3 (12.5 %)
段階Ｂ（上の一つを欠く）	16 (66.7)
段階Ｃ（二つ以上を欠く）	4 (16.7)
誤答	1 (4.1)
計	24

る解答をそれに次ぐ段階Ｂ，二つ以上欠けて解答を「書き足りない」として段階Ｃとした。段階Ｂは全部③が欠けていた。③は学生に意識されにくいのかも知れない。

解答中に③を含む解答例を具体的に示す。

（段階Ａの例）

（Ｔさん）例において，｜ｘ｜の値が大きくなればなるほど，その点ｘにおける双曲線のｙの値は，漸近線の値に近づくが，決して交わることはない。

これと同じ表現はもう一人いた。

（Ｈさん）双曲線が漸近線に接近していく。しかし，接することはない。

(4.2)期末考査の結果

期末考査は，7月26日（金）に実施した。漸近線に関係している部分の問題に触れる。

［2］双曲線についての次の問に答えよ。

(1) 曲線 $4x^2-y^2=-4$ の焦点と漸近線を求め，この曲線の概形を描け。

(2) 漸近線が $y=\pm 0.5x$ で，焦点の座標が $(\pm 2\sqrt{5},0)$ の双曲線の方程式を求めよ。

(3) 双曲線以外の曲線で漸近線を有する例をあげよ。

であった。

表3　問題［2］の解答の種類とその比率

問題番号	正　答	正答数	比率	誤答数	比率
(1)	焦点 $(0,\pm\sqrt{5})$	21	80.8%	5	19.2%
	漸近線 $y=\pm 2x$	23	88.5	3	11.5
	概形	20	76.9	6	23.1
(2)	方程式 $x^2-4y^2=16$	19	73.1	7	26.9
(3)	数学的に正しい	9	34.6	数学的に誤り 12	46.1
				双曲線をあげた 5	19.2

(1)焦点の座標，漸近線，概形の正答が76%～88%かなり多かった。反面若干の誤答も目立つ。特に，解釈に苦しむ例もあったのでそれを次ぎに示す。

（誤答例1）焦点 $(0,\pm\sqrt{17})$，漸近線は $x=\pm\frac{1}{2}y$，グラフは縦軸をx軸，横軸をy軸にしている。

（コメント）与式を $-x^2+(y^2/4)=1$ と変形したからこのようになったと思われるが，焦点を $(0,\pm\sqrt{17})$ で与えて，何も言及がなく第1座標をy座標，第2座標をx座標と見なせと要求する書き方は，数学のルール無視の要求であろう。また，$\sqrt{17}$ の由来は $4^2+1^2=16+1=17$ からと考えられる。

（誤答例2）漸近線 $y=\pm 2x$，頂点の座標 $(\pm i,0)$，焦点 $(\pm\sqrt{17},0)$

（コメント）頂点の座標として突然 i（虚数単位）が出て来た理由は，与式が $4x^2-y^2=-4$ で右辺が負数であったからと思われる。この学生は与式が $y^2-4x^2=4$ と変形され，x軸とy軸が入れ替わることに気づかなかったと思われる。ここでもう一つ数学に拘わるものとしてやってはいけないことは直交座標とガウス平面を混用していることである。また，焦点の座標を求めるとき負号を無視して $1^2+4^2=17$ としたと考えられる。ただし，漸近線の数値だけは正解である。

(2) 単なる誤答はあったが，(1)の誤答のようにに解釈に困るような例はなかった。

(3) 双曲線以外に漸近線を有する例としての正解例

（Kさん）

$y=\log_e x$　$x=0$ が漸近線になる。

数学的に誤りとした中に数学として舌足らず，つまり数学の文章にならないものが含まれている。以前から学生の数学の文章の表現力が足りなかったが，今回は目だって「数学の表現力」が落ちているように見える。ここで舌足らずの２例を示す。

（誤答例１）指数関数　対数関数

（コメント）これだけで説明等がなければ数学の解答にならないのは明らかである。

（誤答例２）ｙ＝tan ｘ

（コメント）これだけで説明等がなければ数学の解答にならないのは明らかである。

次ぎに，問題文の中に双曲線以外の例をあげよ，とあるのに双曲線をあげた意味について触れる。それは教科書のコピーの双曲線はすべて $ax^2-by^2=1$ の型のものだったせいもあって，分数関数のグラフは双曲線ではないという認識があるらしい。この種類の例は５例あった。

５．考察

大学理数系学生が最初に学習する微積分の教科書では一部の例外はあるが，通常書いてある漸近線と，一方高校数学の漸近線では当然独立に考えられているので内容が無関係であるのが当然である。このため，大学数理系学生のために行う高校数学教師を養成するためには独自の内容を補足して授業を行わなければならない。ここに高校教師養成のための数学科教育法が必要になってくることを最初に指摘したい。

さて，本研究の目的で①の漸近線の専門数学としての知識とは，かつての曲線の追跡水準以上の知識という意味である。また②の指導要領水準とは２節で記したようにコンピュータ等の活用を前提とした直感的な水準の意味である。この観点で小テスト（表２）を見れば，Ａ段階が，不十分であるが，専門数学としての知識と見ればよい。さらにＢ段階は指導要領の水準と見られる。また，ＡとＢを合わせて１９人（79%）が指導要領水準と見られることに触れておく。一方水準Ｂだけ見れば１６人（約67%）（表２）であるがこれらの学生は漸近線はもとの曲線と近づくだけでもとの曲線と交わったり接したりしないことを要点と見ていないことになる。期末考査（表３）では(1)，(2)が出来た水準がほぼ指導要領水準と見て良いだろう。また，(3)の問題は①の専門数学の水準と考えられる。この応答の正答率が73%から88%を占めたことは評価できる。

小テストの問題として指摘されることは，漸近線というときもとの曲線が漸近線には無限に近づくが決して交わったり接したりしないという事実の意識に乏しいことである。これの改善策は，やはり数理系学生に以前行っていた曲線の追跡の漸近線の定義とか性質の項目を指導しそれなりの演習を実施する必要を提案したい。これを数理系学生全員に無理であるなら，少なくとも数学科教育法の中で試みたら良いであろう。

期末考査の問題点に触れる。数少ない誤答例の中に焦点の座標に $(0, \pm\sqrt{17})$ が出たり，頂点の座標に $(\pm i, 0)$ が出現したことは唐突に見える。これは，その学生個人の問題と捕らえ，個別指導で対応すれば良いと考える。このためには演習時間にこの種の問題をやらせ，机間巡視で発見し改善していくと良いと考える。

また，全体的に見て数学の文章能力に問題がある。これへの対応は，以前から効果が確認されている話しかけ法やテキスト法等の演習の実施が適切な改善策と考えられる。また，今回のテストでは，学生の持つ知識の片鱗を知ったに過ぎないことが本研究の限界になる。

参考文献

福田安蔵・鈴木七緒・安岡善則・黒崎千代子共編（1960）『詳解微積分演習Ⅰ』，共立出版，東京

文部省（1999）『高等学校学習指導要領解説』，実教出版，東京

佐伯卓也（2000）数理系学生の数学科教育法の改善 ―― 話しかけ法とテキスト法（講話法）について，東北数学教育学会年報，31,29-34

佐伯卓也（2001a）数理系学生の高校数学「積分」「指数・対数」の知識，第5回東北数学教育学会初夏研究会発表資料（2001年5月12日，福島市民会館）

佐伯卓也（2001b）数理系学生の数学科教育法の研究 ―― 高校数学教師の知識技能を求めて，第３４回数学教育論文発表会論文集，635-636

佐伯卓也（2002a）数理系学生の数学科教育法の試み ―― 高校の数学教師養成を目指して，日本科学教育学会研究会研究報告，16，No.6，7-12

佐伯卓也（2002b）数理系学生の数学科教育法の改善（２）―― 話しかけ法・テキスト法（講話法）と類比教材，東北数学教育学会年報，33，31-38

Smith Ⅲ, J.P.(1996) Efficacy and teaching mathematics by telling : A challenge for reform, J.R.M.E., 27(No.4), 387-402

吉田明史・飯高　茂（2000）『改定高等学校学習指導要領の展開　数学科編』，明治図書，東京

Reform of the Method of Teaching Mathematics for Students at a Mathematics Course in the Faculty of Science(3rd Report)
―― About Asymptotic Lines in Senior High School Mathematics ――

SAEKI, Takuya (Yamagata University)

(Abstracted)

The asymptotic lines are containd in Japanese course of studies in the senior high school announced in 1999. On the other hand, the students at a mathematics course in the faculty of science are not taught the asymptotic lines systimaticaly in calculus lately. There exists a gap between the course of study and knowledge of students. In the present paper, we shall clarify the knowledge of students about asymptotic lines.