東北数学教育学会年報
2003,3,.31 第35号

新作業主義の勧め

―函数表の使い方、作り方を教えなくなった学校数学―

板垣芳雄（宮城教育大学名誉教授）

概要　工学部、教職免許用の選択科目「解析学」で、三角関数表を作ること、常用対数表を作ることをテーマに講義して、気付いたことを述べる。同講義の演習への学生の取り組み、解答ぶりから、高校・中学数学の知識に計算・作業の裏付けの無いことが観察され、原因はカリキュラムに求められると論ずる。その２では、計算重視の同講義・演習の、３年目、初めの５回分を話題にする。

キーワード：弧度法、逆三角関数、常用対数、教育課程、電卓、安島直円

その１．作業主義・序説

§１．はじめに

工学部の「解析学」「解析学演習」を担当して２年目になる。実数論、級数論、積分論などを内容とすると聞き、昨年度は、前年度のシラバスの項目に従って講義する方針で臨んだのであったが、２，３回、用意した問題の「演習」を課したところで、予定内容の大幅な変更を宣言することになった。

微積分を既習として近代解析に向う内容とするのではなく、むしろ、微積分を、数値計算を実行することを通して再学習するようなものへと軌道変更したのである。

「演習」では、全員が取り組めるような問題をさせたい。

後で知ったことであるが、「解析学」は３年生用の自由選択科目で、教職免許用にはその履修がほぼ欠かせない科目になっていて、大学カリキュラムの数学教程としての整合性には差し支えなかったようである。

前に担当のT先生も、シラバスに記した看板の通りには、為さっておられなかったように推測する。

「解析学演習」の２単位は教職免許の科目にはならない。「解析学」の４単位は取りたいが、「演習」は履修したくないという学生が出てきて、運用、指導上わずらわしいことになるが、「演習」付きということは、学生の、講義内容の受け取り方を知る機会になり、私は、

毎回何ごとかを学ぶことになった。

初めは、開平法などを筆算でやらせ、後には（プログラム方式でない）電卓を用いて計算する問題を課し、平方根はルート・キーで出すことになる。毎週、９０分用の演習問題を数題考え、１年間、学生たちがそれに取り組む様子を見て、大学の基礎教養で教えている「微分積分学」についていろいろ考えさせられることになった。考えは、あるときは高校数学の初等関数の教え方に及ぶ。

この論究はその教授体験から生まれたものである。この稿では、まず、「計算数学」の講義案・演習問題を手探りし、実行してみて気付いたことを二つ取り上げる。

話題の一つは、角度単位のラジアンはなぜ、何のために教えるのかということ、もう一つは、常用対数の教え方についてである。いずれも、高校・中学数学の内容分析に係わって、論究は現行カリキュラム批判へと向い、先の筆者のカリキュラム論[1][2]を補うものになっている。それが、この稿の目的の一つでもある。

最後に、私学・理工系学部学生の中等数学につき消化不良の症状を記し、「理科離れ」以上に、学生たちのこころの「数学離れ」が、深く、静かに進行していると説く。それへの対策を講じないで旧態のままでいては、他教科の教官が、数学科担当教官の「微分積分」や「線形代数」を、有害とまでは言わないまでも、無益で基礎教養にならないと考え出すのではないだろうか。

§２．三角関数表を作る

数学Ⅱで、直角を９０度と測る単位で、鋭角の正弦、余弦、正接を直角三角形について学習する。数学Ⅲ、新指導要領では数学Ⅱで、角の大きさを単位円の弧長で測る単位としてラジアンを習う。サイン・カーブを描くのにラジアン変数のサイン（正弦関数）を教えておく方がよいと、グラフ中心主義者は考えそうである。

始めから、座標平面上の単位円によって、回転弧長の一般角ラジアンで、角のサイン・コサインを教えるのがいいと考える人もいる。

だが、鋭角、鈍角の角度には、小学校、中学校と親しんできている。その学習の延長で、高等学校で、三角比として、３０°、４５°、６０°などのサインを覚える。４５°を、０．７８５（＝３．１４÷４）ラジアンと言うことはまず無い。

なのに、なぜ、ラジアンを教えなければならないのか。

数学の答えは、サインの導関数がコサインになるようにするためである。比 $\sin x/x$ が、x を０に近づけたとき、１に収束するようにするためである。

しかし、これは「後の都合のため」で、学ぶ側には後にならないと分からない、教える側の都合である。そこを、微積分学の理論上の要請から来るものであると説明する場合もあるであろうが、そうしたからといって、学ぶ者にとっては、単にもう一つの単位として押し付けられた知識に過ぎない。そのことを正視しておきたい。

知識は使うことによって身につくのであるから、われわれが「教えたのに、ちゃんと覚えてない。３０°が何ラジアンかも答えられない」とぼやく前に、３０°を、π÷６ラジアンとすることがどこでどう使われているかを考えてみたい。

私は、方向転換した講義「解析学」で、テーマの一つに取った「三角比の表を作る」ことを、ラジアンが本当に要るところまでは度だけでやるという方針で進めてみた。

トレミーが「弦の表」を作るのにそうしたように、正弦の表を作ることは、円に内接する正多角形の辺長を計算することであったといってよい。その計算では、平方根の計算に多大の労力を費やしたことであろう。だが、今は、トレミーの時代と違って、電卓のキーを押すだけで平方根を１０桁算出することができる。

1°のサインは、3°のサインの値を計算したら、その値を定数項とする３次方程式の解として、例えば、ニュートン法によって四則演算のみで計算できる。

ここで得た、1°のサインを１８０倍すれば、円周率の近似値が得られる。[補注１]

大学の微積分学でテーラー展開を学習すれば、どんな角度のサインも、サインのべき級数式で計算できると知る。3°のサインでも1°のサインでも、平方根の計算はしないで、同じ一つの式で算出できる。べき級数式の威力は絶大である。

しかし、ここで教科内容論として問題としたいのは、威力のところではなく、現今の「微積分学」では、べき級数式が強力な計算法としては語られなくなったという点である。サインのべき級数式は、「微積分学」テキストでは、概ね関数一般のテーラー展開の、単なる一つの例として扱われているに過ぎない。

「微積分学」テキストと違って、計算法を内容とし、電卓で加減乗除を実行する数学、「計算数学」から見れば、べき級数式それ自体が主役である。そして、ラジアンと度との差が、その式による計算でクローズアップされる。

記

ニュートン:Sir Issac,Newton(1642~1727)

トレミー:Klaudios Ptolemaios(Ptolemy) (150?)

アルキメデス:Archimedes(287~212 B.C.)

§３．数学の物語性

計算数学からすれば、三角比をべき級数によって精度高く算出するためには、相応の精度の円周率、πの値が分かっていなければならない。トレミーにとっては、三角比の細かい表を作ることが、πの近似値の精度を上げることになった。それが、べき級数を使う計算では、逆に、まずπの精しい値を計算しなければならない。べき級数による計算は、πの値が、アルキメデスやトレミーの計算法とは別の方法で直接計算されてこそ生きる。

πをべき級数式で計算する式はニュートンがいくつか導いた。今日われわれの言葉を使

えば、逆三角関数の展開式、を得てそれから導いた。ニュートンはその展開式を逆に解いて、サイン・コサインのべき級数式を導いている。

πの式を導くために、ニュートンは、角度の単位をラジアンに取り替えたわけではない。円周の弧長を、弦や接弦など、直線単位から計算する式として、逆三角関数の展開式を導いたのである。それを、角度変数の三角関数に結びつけようとすると、“角度単位”としての弧度法が生まれる。

逆三角関数やそのべき級数式がどう取り上げられているかを見ることで、今日の「微積分学」テキストの性格を知ることができる。

ともあれ、上のような計算法に伴う内容や発見の過程は、学校数学のテキストで語られなくなった。現在、それらの結果は「対応・関数」のサイン記号で書かれ、思考の向きの違いは公式の等号に埋没している。その公式では、度かラジアンかは単なる単位の違いで、概ね、どちらをとってもよいとして記憶される。

言い方を変えれば、学校数学が、計算手順の見えないような記述内容になっている。

このことを鮮明に、かつ強烈に印象付けられるようなことに、「解析学演習」で出合った。講義をちゃんと聞いていなかったということになるが、トレミーの弦の計算法の問題に、たとえば、円に内接する正１８０角形の辺は、円の直径が1なら、sin 1° であるからと、電卓のサイン・キーを押して計算している学生がいたのである。

考えてみると、私が講義で、内接正１５角形の辺から３０角形の辺、３０角形の辺から６０角形の辺を計算することは、要するに、sin 12° から sin 6° を計算し、次に、sin 6° の計算値 を使って sin 3° を計算することになるから、と言って、sin の半角の公式で導いたりしたからであろう。計算のアルゴリズムを読まず、「三角比の表を作る」という学習課題を意識していなければ、サイン・キーを押す「問題」にしかねない。

ともあれ、数学の物語や、「計算数学」、三角法(Trigonometry)の問題解決では、度とラジアンが、単なる測定単位の違いとして語られることはない。

§４．常用対数表を使う

常用対数表を作ることについても、数学を紡ぐ物語の筋が思い浮かぶ。

和算家、会田安明の作り方は、相乗平均を繰り返し計算し近似して行くものであった。そのようにして得た、２を底とする対数は「底の変換公式」で常用対数にされる[3]。

安島直円の方法は、対数が 0.1, 0.01, 0.0001, 0.00001,・・・になる真数を基数にして行われる[3][4]。いわば、逆対数表をもとにしているとみることができる。

それらの基数は、１０の平方根、その平方根の平方根、そのまた平方根、・・・を計算して、言い換えると、対数が 1/2, 1/4, 1/8,・・・になる真数ということになるが、それをもとにして求められる。

逆対数表を作るには、指数関数 exp(x)のべき級数式が威力を発揮する。もちろん、常用

対数の逆対数表を計算するには、変数に１０の自然対数を掛けて、いわば「単位の変換」をしなければならない。自然対数の底と呼ばれるオイラーの数のこの出現は、三角関数表の場合のπと同じではないが、「計算数学」の物語は、オイラーの数（Napier の数）の、簡明な定義式では見えない姿をクローズ・アップしてみせる。

さて、常用対数表の作り方の原理は、表の使い方のそれと表裏一体の関係にある。

掛け算を、表の対数の足し算で行うという使い方を真似て、近似計算する作業は中学生にも難しくはないであろう。(その作業は、１０の整数べきの考えに誘う。)

しかし、その表を作る作業は、抜きん出た和算家にして出来たことであった。

表を使うことと、作ることとの大きな違いは、現今の学校数学では分からない。作り方の原理も使い方の原理も、対数記号で書かれた同じ一つの関係式になって、表の使い方ではなくそういう関係式を使うことが学習内容になっている。

かって、対数表の使い方を習うところで、比例配分（一次補間）というのを習った。それを高校で教えないように指導要領が変えられたとき、それを惜しむ教師の意見を聞いたのが思い出される。その教師は、自分の体験をカリキュラム論として主張はできなかったが、比例配分の作業を含む、表の使い方を教えることの意義と、教材としての有用性を、長年使わせてきてよく知っていたのであろう。

記

ネイピア：John Napier(1550~1617)

オイラー：Leonhard Euler(1707~1783)

安島直円：(1739~1798)

会田安明：(1747~1817)

§５．電卓、パソコンの時代に

科学電卓の使える時代に、対数表の使い方や三角関数表でもあるまいと言われそうである。私も、上に書いたような考えをする前は、そういう気持ちだった。電卓があれば、掛け算をするのに、わざわざ対数表を使うようなことをする要はない。

むかし、よく対数尺を胸から取り出して、いろいろな数値を見積もる大先輩に敬意の念を抱いたものであるが、数式をそのまま打ち込んで計算できる電卓まで生まれ、計算尺など疾うに生産されなくなった。

３月に税務署に行っても、いつの頃からか、ソロバンを使っている人を見なくなった。

だが、と考える。そういう便利な道具である電卓を、数学教科の道具として使っているだろうか。

対数表が便利な道具でなくなって、表だけでなく、対数キーを使う計算問題まで数学教科から無くなってしまったのではないか。

対数の log キーだけでなく、hyperbolic キーはもちろんのこと、sin キーや cos キーを使うような問題は、大学の数学にも高校数学にも無くなったのではないか。電卓があるから表は使うまでもないとしてそういうことになった。

その結果、log や sin について教えていることは、そういう記号で表すものについての定義やそれら記号で書かれた諸関係式のことに重点が移った。思考の向きの違いが等号に埋没したと先に書いた、そういう諸「公式」を使いこなすことが、数学の勉強内容になった。手を動かして真似させ、学ばせたい内容は、教科書に探せなくなった。

計算に使う問題もなく、計算に使うこともしない、単なる関係式それ自体としての知識は頼りなく、あやうい。センター試験の数学を初め、入学試験の問題は、その知識を試す問題で彩られているようにみえる。

かくして、先に、内接多角形の辺を、サイン・キーを押して計算する学生をわらったが、似たようなことは、われわれ教師の側も、やりかねないと思う。

例えば、sin 1° を電卓のサイン・キーで出して、それを１８０倍し、「ほら、３．１４１４・・・と円周率の３．１４が出た。」という。

このおかしさは、角度の度を、ラジアンに変換するキーに例えると、もっとよく分かると思う。現実の電卓に算数の比例算を実行するような、そういうキーはないけれども。そのキーで、３０と置いた度の数を変換して得られたレジスターの数に、６を掛ける。そして、「ほら、円周率が計算できた。」という。

高校の「微分・積分」の教科書の章末に、この種のおかしな問題があった。［補注２］数学に、物語の筋が希薄になって、こういうことが分かり難くなた。

素朴な作業と関連ない、記号抽象的な内容編成になったとは、数学だけでなく、物理や化学、中学の理科についてもいえるのではないかと思う。それに、各教科を超えての時代変化を読み取ろうとすることは控えねばならないが、中学校の数学にも、作業的なものへの連関が薄くなったように考える。

それには、私たちの、「そんな計算は電卓に任せればいいから」という思いが、少なからず作用していたのではないだろうか。

あくまでも、数学教科で学ばせたい思考、態度、内容、表現に、電卓は、生徒各人に使わせる教具として有効か、どこでどのように有効か、と考えるようにしたい。電卓が生まれたから教科内容は変わらなければならないとは思いたくない。

算数で、紙と鉛筆の筆算を実行することで、あるいは、ソロバンを操作して、数の仕組みに気付いたり、計算のからくりが学ばれて行くように、生徒一人一人、表を作ったり、使ったりすることは、いろいろなことを意識し、考えさせることになると思う。

§６．むすびに

今年度の前半期、工業大学で１年生用の講義を担当し、久しぶりだった「微分積分学」

の期末試験の答案には愕然とした。講義しながら、薄々感知していたことであるが、また、いろいろなところで、諸先輩から話しに聞いて考えていたことではあるが、そう気にしてなかった。非常勤の勤めだけになって、私の診る目もずいぶん変わったと思う。自分のカリキュラム論と関わるところでも考えさせられることになった。

この稿に結びつくことで挙げれば、習ったはずの、log や sin を含んだ代数的な式を正しく「読めない」。中学校で習う一次式も、場面に応じてちゃんと処理できない。印象で言えば、消化不良を起こしているのは、教科の料理・提示法や、個人の消化力によるというより、材料・教科内容に原因が求められるような場合が多いと思う。学生の未消化の症状や材料から逆に考えてみると、高校の内容に、単純な繰り返し計算や、からだを動かして覚え身に付くような知識が少ない、概念的な解説が多い。大きな展開の流れや、語りの筋が分かりにくい、往々にして、上位レベルの演繹的理論の流れが筋にされている。

作業的な展開でなくなったということは、算数教科についても当てはまる[6]。

近年、消化不良の学生のために、前（ｐｒｅ－）微積分に当るような科目を新入生に履修させる大学が増えたようであるが、テキストが進学予備校の「要項まとめ」のような態をなしていては、ひたすら、念頭操作、暗誦を繰り返させるものになるのではないだろうかと心配である。

そういう科目を設けていても、ラジアンに馴染んでいるはずがなく、「微分積分学」の講義で、サインの微分の準備・都合上というのを、なるほどと感じてくれたとも思えない。ただし、講義では、そんな講釈はしなかった。

以上、私学・工学部の講義を引き合いに書いたが、工学部でなくとも、私立大学の学生でなくても、そういうことと関わりない問題を取り上げてきたつもりである。

ただ、「作業主義の勧め」といっても、相手に合わせた、その適切、有効な実行は、容易いことではなく、私の今年度の「解析学」についても、学年末の試験で、思い知ることになった。

計算手順について、的確な見本を案出しなかったし、上手に演出することも、出来なかったと反省している。

補注

[1] トレミーの「弦の表」から、円周率として、３．１４１６６６・・・という値が得られる。これは、６０進法では、３；　８，３０，であり、分数で書くと、$3\frac{17}{120}$ となる。これを、トレミーの円周率と記している書がある。アルキメデスが、内接、外接９６角形の周を計算して出した値は、$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ である。この２数の平均値を計算すると、３．１４１８・・・となる。

［２］「関数の極限」の章の演習問題のなかに、こんなのがあった。（昭和６２年発行「微分・積分」、数研出版）「半径 a の円に内接する正 n 角形の面積を S_n とする．$\lim S_n$ を求めよ．」

参照・参考資料

[1] 板垣芳雄：現代化カリキュラムの影響のかたち ―関数の考えの場合―、近畿数学教育学会会誌、第１４号、平成１３年２月

[2] 板垣芳雄：数学史で読む関数概念の諸相　―指導したい「関数」の姿を描くために―　第３２回近畿数学教育学会例会・発表資料、２００２、９月．

[3] 日本学士院日本科学史刊行会：明治前日本数学史 新訂版、第四巻、１９７９．（旧版、岩波書店、１９６０．）第２章§２－（４）ｐｐ．２２２～２２８　第６章§４ｐｐ．５２４～５２６

[4] 一松 信：教室に電卓を ―II―、海鳴社、１９８１、第３章

[5] 一松 信：近似式（現代応用数学双書）、竹内書店、１９６３．

[6] 板垣芳雄：円周率・パイにまつわるカリキュラム論、宮城教育大学紀要第３６巻、２００２、ｐｐ．６７～７４

[7] E.ハイラー/G.ワナー、蟹江幸博 訳：解析教程　上、シュプリンガー・フェアラーク、１９９７、第I章

[8] 板垣芳雄：塵劫記「検地の事」に在る面積計算をめぐって、全国数学教育学会第１５回研究発表会・発表資料、２００２、１月．

[9] 板垣芳雄：戦後、カリキュラムは果たして進歩したか ―円の計測、三角比、円関数の内容から考える―、全国数学教育学会第１１回研究発表会、２０００、２月．

[10] C.H.Edwards,Jr.: The Historical Development of the Calculus, Springer-Verlag, 1979.

その２．「解析学」「解析学演習」のこと

§１．演習の問題

工学部の「解析学」「解析学演習」を担当して３年目が始まった。５週目を終わった段階で、今年（平成１５年）は昨年よりやり易いように感じるのは、どこから来るのか。１人、２人の目立つ受講生の心象に影響されることも確かで、今年も、これから目にする予期せぬ一つの受講態度に心象が変化することもあるのでしょうが。

今年度の「演習」履修者は、ほぼ３０名、昨年度の最終合格者は１６名で、それが常時

出席者の人数です。初年度の一昨年は、「解析学」受講生のほとんどが指示に従い「演習」を履修してかなりの人数だったと思っていましたが、思い違いがあるようです。送付されて来た、１３年度「学生による授業評価アンケート」集計結果というのがすぐ見つかって、それによると、「演習」の回答者数は２５、「解析学」の回答者数は５３です。

「演習」では、全員が取り組めるような問題をさせよう、というのを方針にしました。「√２は無理数であることを示せ。」や、「次の漸化式で定まる数列の収束・発散を調べよ。」のような問題では、作業なし、計算なし、あたまも働かせることなしと観察しました。

筆算・開平法を例示し、「演習」の問題にしました。今年〈5月1日§4.〉のでは、
（1）　１９９９３９６（$=1414^2$）、（2）９９９８２４９（$=3162^2$、余り５。１０の平方根は、３．１６２２・・・）、（3）９．８５９６（$=3.14^2$）、
（4）３、（5）５、（6）７、の平方根を、少数点以下第2位まで、計算させました。

結果は、指名して板書させた。

作業量、作業速度、正確度、内容理解の深度は、個々ばらばらです。今年〈5月8日§5.〉の演習では、分数の四則計算について１３／１０を３．２５／２．５と書くような学生がいたり、予想の及ばぬことをいろいろやってくれます。作業を、計算という言葉で一様に測ることは出来ないことを知らされます。

作業主義といえば、算術・算数教育についてかつて使われた言葉になるでしょうから、教育史のそれではないという意味も込めて、新作業主義と題しました。

§２．４進数計算、開平算

開平法の計算演習ついでに、今年は、√２、√３の開平を４進法計算で行えという問題を課してみた。

$$\sqrt{2}=1.1222002\cdots$$

$$\sqrt{3}=1.2323121\cdots$$

となる。前者を１０進法になおすと

$$1+1/4+2/4^2+2/4^3+2/4^4+2/4^7=1.41418\cdots$$

である。誤差は、$1/4^7=0.00061\cdots$以下のはずである。

なお、４進法については、〈§２〉で、四魔方陣をからめて講義している。

４進数は、１，２，３，１０，１１，１２，１３，２０,,,という書き方で、“掛け算九九”の表は、９×９でなく、３×３の表になると話したら、その表をいちいち見ながら掛け算をしている子がいた。

〈§３〉では、分数の３／７は、４進小数では、３÷１３を計算して、０．１２３１２３・・・と算出したりした。そしたら、演習で、その割り算計算のなかの引き算、２１０−１３２＝１２がどうしても分からないという子が出てきた。“足し算九九”をちゃんと話さなかったことを反省し、次の回〈§４〉に、そこを補足、４進記数法について再述し、かくて、４進数の開平計算までやるようなことにしたという次第である。

〈§５〉では、古代バビロニア法による平方根の計算を講じ、演習では、バビロニア法を分数計算で進めた場合の、ある現象に着目しながら、分数計算の演習として数題を課した。

なお、〈§１〉では、分母増大で、某数への接近・近似分数列を探すというのを、演習題の一つにしている。

§３．無限等比級数の和

どんな循環小数も分数の分子を分母で割り算して得られるということをちゃんと習得していない、循環小数を無限等比級数であると認識していない学生がかなりいる、試験を採点して、そう感じていました。高校の教科書を参照して復習しておけと言っても、参照する学生は多分いないでしょう。そこで、無限等比級数について、一応説明して、和の公式を使うということになりますが、今年は、「一応説明して、」というのも止めました。和の公式は式として覚えていても、０．５１２３１２３１２３・・・$=0.5\dot{1}2\dot{3}$のような循環小数に使えないというのもおるでしょう。そこで、

$$0.5\dot{1}2\dot{3}=5／10+123／9990=5123-5／9990$$

のようになることを理解し、計算できることを第一に考えることにしました。

$0.\dot{1}2\dot{3}\times 1000$から$0.\dot{1}2\dot{3}$を引けば１２３である。

$$0.\dot{1}2\dot{3}=123／999=41／111$$

初項と等比の比から無限等比級数の和を計算する式は、循環小数を等比級数に書いて、分数に直す計算を文字にした式として（等比数列の和の極限として算出するのでなく）、怪く説明しました。

$$0.123／(1-0.0001)$$

こういう話し方をして考えたことに、循環小数のことは、無限等比級数のところで語っている高校数学の組み立てのことがあります。和の公式は、数列、等比数列の和、数列の収束・発散、数列の極限、という教程の最後に現れます。

循環小数を分数に直す方法では、収束しないかどうかを気にしなくていいはずだし、等比級数と観る要も、公比が１より小さいからと観察する必要もないのです。

いきなり、等比級数の和でさしつかえない。

「無限等比級数の和の公式を覚えていないのか。」「高校の教科書で復習せよ。」と一本調子に言ってはまずい。有機的に連結する知識、理解は、教科書の形のようであるはずがない。授けたい知識を一本調子で考えては、指導要領のまずいところを押し付けることにもなりかねない。

「無理数」という言葉は中学校で教えているけど、循環小数の計算はしていません。「有理数」「無理数」は、大学教養の数学でも問題解決の「作業」では働かない言葉です。

そういう基本概念と無縁のところに、いろいろ作業をして考えさせられることがある。

「０．１２３１２３・・・は、$0.1\dot{2}3\dot{1}$でもあり、$0.12\dot{3}1\dot{2}$でもある。それ

それの見方で分数に直してみよ。」

§４．常用対数表の作り方

たまたま知った、安島直円の常用対数表の作り方は、素朴に分かり易いものであった。それに、ネイピアのときから１００年以上の時代差を感じるとともに、平方根の計算が日本では、そろばんによって、繰り返し楽に行えたという違いがあったのではないかと思った。

昨年度早速、「解析学」で取り上げ、演習問題にしたら、学生たちは懸命に取り組んでくれた。

１０の第１，第２，第３,,,平方根、$\sqrt{10}$，$\sqrt{\sqrt{10}}$，$\sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}$,,,は電卓で出したものを使う。これらの値は、言い換えると、配数（対数）が、１／２，１／４，１／８,,,の真数である。

課題１．これら真数の値から、配数が、０．１，０．０１，０．００１,,,になる真数α_1，α_2，α_3,,,を計算しよう。

課題２．上の課題で得た基数α_1，α_2，α_3,,,によって、真数２，３，５，７，の配数を計算しよう。

このような演習を課してみて思ったことに、計算手順をうまく教えなかった、原理はよく分からなくとも真似て計算できるように手順を伝える工夫が足りなかった。目にみえない原理を伝えることは、二の次に考えることにしよう。

筆算・開平法のように、見本の計算を丁寧に示して伝えるのがいい。手続きは、手続きを実演して見せるのが一番。

また、対数計算を、課題２のように、基数α_1，α_2，α_3,,,によってと、素っ気無く課すのではなく、安島直円が作ったように、配数が、０．９，０．８，０．７,,,

，０．１；　０．０９，０．０８,,,　，０．０１；　０．００９,,,　；

の真数表を作らせて、それを原表（拡大基数表）として、０．０１きざみの真数について、例えば、２．３１，２．３２，２．３３，２．３４,,,　，２．３９

について、その配数（対数）を計算せよ、とすれば、作業の内容も違ったものになると考えた。

課題１の計算結果．１／１０は、２進小数で、０．０００１１００１１００１・・となるから、１／１０の真数（１０の１０乗根）は、$\alpha_4 \times \alpha_5 \times \alpha_8 \times \alpha_9 \times \alpha_{11}$・・として計算される。

１／１００は、２進小数で、０．０００００１０１０００１１１１０・・

§５．指数法則

むかしのことで細部は忘れましたが、生徒が、$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$　をうまく理解

してくれないという話を聞いて、私のたどり着いた方策は、a，bがともに平方数の場合について、左辺、右辺をそれぞれ計算して等しいことを確かめ納得するというものでした。

その後も、中学生に分かり難いところというのに、この関係を上げている研究発表を聞くことがありましたが、その方策を変える要を感じませんでした。

テキスト巻末の表で２，３，６の平方根を抜き出し、その数値で√２×√３を計算させることも考えられます。

教科書にある「証明」型の説明はしなくていいと思っています。

さて、図らずも今年、工業大学の、「数学への旅」という半期の講義を持つことになりました。「大学への数学」という冊子が作られていて、進学予備校の「要項まとめ」のようなのがきちんと書いてあり、例題・例解、練習問題が載せてあります。思いがけなくも、その冊子で、指数関数、対数関数を講義することになりました。

彼らは、分数指数について、指数法則をどのように納得しているのでしょう。９０分の１回の講義で、数学的に、厳密に、ゆっくりと再学習するというのは不可能です。

古代インドの書に次のような記述があるそうです。

一つの数の第１平方根と第２平方根の積は、第２平方根の３乗である。

$$\beta\ (1) \times \beta\ (2) = \beta^{3}\ (2)$$

第２平方根と第３平方根の積は、第３平方根の３乗である。

$$\beta\ (2) \times \beta\ (3) = \beta^{3}\ (3)$$

指数関数の講義を、これをルート記号で書いて始めてみました。

その後、初項１、公比√２の等比数列を書き、公比が２の３乗根の等比数列を書き、公比が２の４乗根、次には、５乗根の等比数列を並べて書きました。「等比数列」とは言わないで。いろいろに、指数関数の原風景を考えるうちに思い付いたものです。いや、「関数」ではなく、指数の、指数記号に書かれる前の原風景です。指数と別に「べき」という語を復活させたい気持ちになりました。分数べきの使用にいかに導くかが問題です。

いっそ、累乗根の"√という記号は止めて、分数べき記号で教えたら、と考える向きもあるように思いますが、それでは、形成したい原風景は描けません。分数べきを使っても、いまや、平方根の計算はせず、もっぱら、指数記号処理という「計算」練習でルールを勉強し、５乗根を見積もることもなく、ここだけにしか通用しない頭の体操に終始しているのですから。

３乗根や５乗根は、３次方程式や５次方程式の解と宣言するだけで済ましているのではないでしょうか。

１０の６乗根は、平方根√１０の立方根として計算されることを学生はどう納得し、どう理解しているのでしょう。

今年の「解析学」では、後期になりますが、次のような場面も、指数の風景に入れたいと思っています。

一つの数の５乗根は、その第ｎ平方根によって、

β（３）×β（４）×β（７）×β（８）×

と計算される。

１／５の２進小数は、０．００１１００１１００１１・・　である。

４進少数は、０．０３０３０３・・

§６．対数関数

指数の講義のとき書き並べた等比数列群を、縦２列の表にして板書し、こんどは真数と対数と呼んで対数の講義をして、常用対数の話をする方が、分数べきについて説くよりずっと楽に感じ、歴史上、一般指数やその記法より，対数表が先に考えられた事情が分かるような気がした。

掛け算、割り算に使う表について考えるうちに、負数指数の考えも自然に生まれる。ということは、対数表を使わせれば、負数指数の働きも納得できると思う。

さて、√１０の対数は１／２、√√１０の対数は１／４、xの対数はｌｏｇ xと書くと説明して、対数の性質をｌｏｇ記号の式にして、それを公式として使うようにしながらテキストの練習問題を解いていると奇妙な感慨をもようした。公式として使うというのは、対数表の性格が分かるというのと、頭脳を働かせるところが別のようである。

また、問題には、３とあったら、それは２７の３乗根と見るような、整数算がしっかり組み込まれている。

これを、対数関数の勉強というのだろうか。対数関数のグラフを描き、対数を微分する学習の準備の勉強になるだろうか。このことを、教育法のこと、教える側の指導内容についてのとらえ方の問題としたいが、ここでは、その先は論じない。論を、「関数」教育のことに戻す。

「関数」一般を定義し、比例の関係、その他を、関数の例と説明する愚かさについては度々訴えてきた。行き過ぎた「現代化」の、その負の遺産が徐々に認識され、このたびの要領改訂の中学数学・新教科書では、一種を見ただけであるが、かなり改良されていると思った。

しかし、高校の教材では、対数・指数など、整備された型は硬い構造を作って補修、改良の動きは緩慢にならざるを得ないであろう。新規に「数学基礎」を構想したのもそういう苛立ちがさせたのかと、精神を分析したくなる。

集合間の写像という「関数」一般で、「逆関数」を定義したからといって、指数関数の逆関数と定義すれば、対数関数のことは分かるというものではない。対数関数も指数関数も、逆三角関数もそれぞれ、一つ一つ別個のものとして学ばなければならない。

逆関数の間柄にあるということが、発見されるような学びの形こそ、学び甲斐がある内容かもしれず、そういう風に物語る教材展開を工夫したいように思う。

関数が違えば、学ばれることも違う。そもそも、個々の関数の記号は歴史の産物で、

測量に使う表のサインであったり、計算に使うロガリズムであったりする。それらが、関数記号の f の例に語られるのは、関数一般の微分や積分についての話の後なら抵抗感はない。個々が語られ学ばれるときは、「関数」という言葉では括り切れない内容と個性を含んでいる。

平方根、立方根にはいろいろな計算法、計算手続きがあった。そこでは、分数べきも、$\sqrt{x}$、$\sqrt[3]{x}$のような記号も無用であり、それぞれの作業が伴う。

ある量 v が時間変数 t について、t の平方根に比例する、という事象もあれば、t の立方根に比例するという事象もある。それらの関係は、根号記号で比例関係として書かれる。

$$v = a\sqrt{t}, \qquad v = b\sqrt[3]{x}$$

この２つの関数について、それぞれ、変数の２乗に比例する関数、３乗に比例する関数の逆関数という「作業」を伴わない見方は、事象の理解にどんな役に立つか。グラフを描くときは面白いが、式の変数を入れ替えた関係と見ればよいことで、わざわざ関数、逆関数ということはない。

注記

題名は同じであるが、その１は、作成・発表は、平成１５年１月、その２は、同年５月と違う。その後この２つに続く論究を３編、発表済みであることもあって、２つを、ほぼ原型のままで並べて、１編とした。その２では、第１，３，４節が講義風に「です」調で記してある。

Calculation Practicality

— Using functional tables is an important task in high school mathematics —

ITAGAKI Yoshio
(Miyagi University of Education)

We consider how to use a table, how to calculate the table of a function, which are not taught in school mathematics nowadays. Through the student's practice in Calculus it is proved that the secondary curriculum does not contain practical task. We gave the lecture for students how to make sine table and table of logarithms, which is explained and investigated in contrast with high school mathematics context.