

## 「大学における微分積分学の講義」

## —教員養成課程における講義及び私立工学系学部での講義—

武元 英夫

宮城教育大学数学教育講座

概要 ある小学校教員を目指す学生は「なぜ、級数のような難しいことを学ばなければならないのか」という疑問をもっている。また、ある中学校教員を目指す学生は「なぜ、微分積分学を学ばなければならないのか」ということを言ったりしている。これらの事柄が必要なのだろうか。10進法で0.9999・・・と1は異なるのであろうか。円周率はどのように定義されているのであろうか。小学校教員を目指す学生にも、中学校教員を目指す学生にも、これらの事柄が説明できるようになっておいて欲しいと考える。

キーワード：微分積分学，円周率，円の面積，クラスわけ

## 1. はじめに

微分積分学の講義をめぐる、大学での講義内容が如何なるものであったら良いかを経験から考え、実行した事柄について発表するものである。これらの事柄については、主として、教員養成課程における数学教育専攻等の数学教科の免許を取得することを希望している学生に対する微分積分学の講義、また、私立工学系学部での微分積分学の講義について、教養部での多くの専攻の学生を対象に数学の講義を実施してきた経験をも踏まえて考えられることの一部をまとめたものである。

## 2. 根底にある考え

少子化の時代であると言われて久しいが、その少子化の波は、現在、中学校の半ばまで到達し、まもなく高校へ、そして、大津波となり大学に押し寄せてくる。昨今の学生諸君が兼ね備えている数学の力、考え方については多く語られてきた。それで、大学に入ってきた学生への微分積分学に関する対応について議論することに対していまさらと言われるかもしれない。しかし、ちょっと考えてみたいと思う。

大学における数学の講義の対象は幾つかに分けられる。1. 理学部数学専攻、2. 教員養成課程数学専攻、3. 理学部物理学専攻、4. 工学部電気工学専攻・機械工学専攻・情報学専攻・電子工学専攻等、5. 医学部・理学部化学専攻・生物学専攻等、6. 工学部建築専攻・土木工学専攻・化学工学専攻等、7. 歯学部・農学部等、経済学部・経営学部、他の文科系学部等によって、独断ではあるが教養部での経験と教員養成課程での経験から考

えると、大学での数学の要求度、必要とする内容の重い順によって列記されるのではないと思われる。先に書かれた方が数学の内容を理論的に重要視すると考えている。ただし、これは入学試験の難易度をまったく考慮していないことを付け加えておきたい。

ここで述べた要求度については、理科系を中心にして考えたものである。文科系学部については最後に付け足した形となっている。しかし、昨今の新聞で時々見受けられるように、文科系学部での数学の考えを使う経済学部、経営学部、商学部の学部においても、小学校での算数の内容を理解していない学生が多いとのことであるが、ある意味で文科系とは考えたくないが、教員養成課程における小学校の教員を目指す学生に対する数学の内容についてこれから、さらに深く考えなければならないと思うし、必要があれば内容の変更等について数学の教員が考えなければならないのではないかと考える。これらについては、対象とする学生の知識（数学の常識と考えられること）が乏しくなっている気がしているので、別の機会に考えをまとめたと思っている。

私は、教員養成課程における数学専攻の学生には数学の内容において基礎的な事柄からの理解が充分になされるべきと考えている。また、国立・公立・私立を問わず、工学部での数学の講義は全国において、ほとんど変わらないカリキュラムで一様に開講されているのではないかと考える。

理学部数学科での本来の目的は数学の専門家を育成するものであると考えられ、ここを数学の内容の重要性を考えた専攻の頂点として、ほとんどの数学の内容を講義内容として網羅しているところである。それでは、他専攻の学生に対して、大学における4年間に於いて数学の内容が如何に選ばれて学生に講義されているのであろうか。教員養成課程では、数学教員を目指す学生の講義を担当している者は、数学の講義内容を如何に考えて講義をしているのであろうか。私は、敢えて、教員養成課程での数学専攻の学生に対する数学教科の内容は理学部数学専攻の学生を対象とした数学教科の内容について重要であると、考えている者である。重要と考えている理由の一つの考えとして思う事は、児童・生徒から教師に向けられるすべての質問に対応することが教師の義務であり、それらに答えるための教科内容に関する知識と教員生活をやって行く上で、教師はできるだけ多くの教養を身に付けておいた方がよいのではないかと、一般常識としてそう考えられるのでは、と私は思っている。そうだとすると、数学の広い内容からなるもので教養となる多くの事柄をも身につけるのも良いのではないだろうか。

たとえば、小学校では  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  の最大元（一番大きい数）は5であると教えるでしょう。また、小学校の教師もこれでしたら児童に何の困難もなしに教えることができるでしょう。区間  $[1, 5]$ （区間という名称は中学校では当然であるが高校でも定義されていなく、高校では区間  $[1, 5]$  の概念として集合  $\{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$  となっている）の最大元は5であることを学ぶでしょう。それでは、“区間  $[1, 5]$  の最大元は5（？）である”という生徒が問題として問い掛けてきたら教師はどうすればよいのであろうか。小学校、中学校での教師は、また、それを目指す数学専攻の学生諸君も、5がもつ性質を理解しておいてほし

いが、高等学校の教師には、教養として、これらの内容のことがらが説明できるようになっている事、すなわち、実数空間における集合に対して定義される上限の概念の考えを教養としても身につけておいて欲しいと考える。したがって、教員養成課程における数学専攻を卒業して教師になろうという学生には“上限の概念の理解”が必要なことではないかと考えている。

$\varepsilon - \delta$  論法の理解もこめて：

$5 = \sup [1, 5)$ ,  $5 \neq \max [1, 5)$ , それでは、5 と  $[1, 5)$  の関係はどうなっているのでしょうか。数学での言葉で表すと、

①  $\forall a \in [1, 5)$  に対して  $5 > a \geq 1$  であって、次の事柄が成立している

①  $\forall \varepsilon > 0$  に対して、 $\exists a \in [1, 5); 5 - \varepsilon < a$

または

②  $\exists \{x_n\} \subset [1, 5); x_n \rightarrow 5 (n \rightarrow \infty)$

また、高等学校における数学の教科書に現れる「中間値の定理」に対しては、その定理のもつ意味が次のように説明されることを教員養成課程における数学専攻で学ぶ学生に理解してもらい、大学卒業後において教師になった際には、生徒に高等学校での教科書で現れる「中間値の定理」の解説が実数の連続性という性質を含んだ内容の下でできていることが理解されていることを期待したいものである。

中間値の定理：

区間  $I$  上の連続関数  $f$  に対して、値域  $f(I)$  は区間である。

高等学校での積分法は区分求積法である。この区分求積法の考えの下で円周率  $\pi$  の導入と円の円周の長さ、円の面積、球の体積、球の表面積等の公式が簡単に求められることを知識としてもつことも教師を目指す学生に対しての教養であると考え。

教員養成課程で学ぶ学生のほとんどは教員を目指している学生であり、大学の卒業後は教員の職へと進むと考えても間違いがないであろう。本学での最近の傾向から、学生諸君の多くは中学校での教員を希望していると考えたとすれば（本学、宮城教育大学では特別教科（数学）教員養成課程が存在したときは、中学校教員養成課程数学専攻と特別教科（数学）教員養成課程に在籍した  $15 + 30 = 45$  名の学生の内、10名以上の学生が高等学校の教員を目指したもののだが、課程の改組以降については、高等学校の教員を目指す学生は少なくなった。平成14年度の数学教育専攻の卒業生では27名の卒業生の内、小学校教員の採用試験を受験したものは4名、高等学校の教員の採用試験を受験したものは2名、教員以外の就職をした学生は2名で、残りの19名の学生諸君は中学校の教員への採用試

験を受けた)我々教員養成課程における数学専攻の学生を担当する者としては、学生が教員養成課程を卒業して中学校の数学教員となるために、卒業生が数学の教員としての素養を充分兼ね備えていくような内容を考えて微分積分学の内容・指導方法を精選すべきであると考え(当然、代数学にかかわる数に関する内容、幾何学にかかわる図形に関する内容についても必要とされるが、ここでは微分積分学だけにかかわって論じることにする)。そこで、私ながらに精選した内容についての説明と学生の受け止め方、また、そのような内容の講義を聞いた一年後の状況について述べてみたいと思っている。それには先に解説した高等学校での内容に対する簡単なある種の内容(上限等)の必要性ともからむが、中学校での教科内容に絡んで解説しよう。

中学校の学習指導要領によると、中学校では図形を扱う項目で、三角形と円、立体の体積と表面積等がある。円の面積、円の円周の長さ、球の体積、球の表面積を対象にして考えただけでも、教師を目指す教員養成課程における数学教育専攻で学ぶ学生には円周率 $\pi$ の定義とそれに関わる性質を考えることは必須ではないかと考える。これから述べるように、円周率 $\pi$ について考えるうえにおいても、三角形、四角形、多角形の面積のみならず、等比級数、積分での区分求積法といったように、多種多才の知識が基本として必要になる。

たとえば、 $\pi$ について考えてみる：

$\pi$ の定義を ☆「直径が1である円の円周の長さを $\pi$ とする」

すると、次のことと同等である事を示す事が考えられる。

△「半径が1の円の面積は $\pi$ である」

さらに、二つの命題☆と△は同等であること、すなわち、このどちらをも $\pi$ の定義として考えられることを小学校、中学校の教師を目指す教員養成課程の学生には知っておいてもらいたい。ましてや、高等学校の数学教師を目指す学生に対しては教養として身につけておいてほしいと思う。また、この二つのどちらからも小学校、中学校で学ぶ円の面積、円の円周の長さを求める公式が成り立つ事を示す事ができるようになっておいてほしい。

◎半径が $r$ である円の円周の長さは $2\pi r$ である

◎半径が $r$ である円の面積は $\pi r^2$ である

同じく中学校の内容である四角形、三角形の面積等(三角形、四角形としなかったのは、長方形の面積を下に三角形の面積を定義したいからである)が必要となり、さらに、数列

の極限、級数の和、積分での区分求積法等が必要となってくる。自然と、教員養成課程における数学を専攻する学生には微分積分学における内容のうち、基本的な事柄から指導して行かなければならず、学生にも基本的な知識から十分に身につけてもらわないと、中学校の教師になった際には教科内容の理解においても、生徒からの質問に対しても十分な対応が難しくなるのではないかと考える。そして、大学で、私たちも微分積分学の内容を基礎から十分に時間をかけて講義をすべきであると考え、その考えにしたがって講義を進めていったらと思っている。しかし、全く残念なことではあるが、たとえ、このように基本的な事柄を懇切丁寧に講義したつもりであっても、一年後、二年後に別の数学の講義で対応した学生に、また相対したときにそれら学生諸君の多くは、その方法での指導の甲斐もなく、習った定義や、基本的な内容の事柄を、頭の中からすっぱり抜け去って、すっかり忘れてしまったという状態であることに気付いてしまうと、“ああ”と唸ってしまうという状況になる。あとは我慢強く、自分の信念の下で、数学を専攻する学生が出来る限り数学の教師への素養を身に付けられるよう努力をして行こうと考えている。また、学生には常に数学を頭の中にいれておいてほしいと思っている。これは、講義の時間か、試験の直前にしか数学を考えない学生が多いこと、自宅、図書館等で自学自習をする学生が少ないことが頭から離れなく残念な現象なので、学生に数学を学ぶ基本的な事柄を身につけて欲しいと考えている。

内容の対象が変わって、私立工学系学部での微分積分学の講義に対する教員の受け止め方・考え方についても解説したい。

数学以外の科目での講義内容において、特に物理学の講義内容において（たまには物理化学の講義内容において）大学一年次の学生を対象に偏微分の内容の事柄が必要であるからといって、数学での科目「微分積分学」の講義において遅くとも5月頃に偏微分の内容をやってほしいというような注文を出す物理学の担当者がある。大学に入学して一年次の5月に偏微分を行うとは、関数の基本的な性質も知らないうちに、連続、微分の内容をすませるようにという、何と云うことかと考えさせられる。また、私立工学系学部では、大学の2年次以降の物理学等を含む工学系の科目の講義で学生が微分、積分の基礎的な内容の理解がないので、数学、特に「微分積分学」を担当している数学の教員達に、諸君等の教え方は悪いのではないかと、講義の内容が難しいのではないかと、というような事柄を平気で言う人もいる。数学を担当する教員のすべてが講義の内容を、対象とする学生を考えて、十分に吟味して準備しているとはいえないが、これから述べるように、多くの教員の中でも自分達がどのような学生を対象としているのかを、“小学校、中学校での授業で教員が児童・生徒の理解を考えながら授業を進める”というような教える事の本質を、忘れて、ある意味では、勝手な議論を展開しているように思える。大学においては、数学の講義に關しては数学の教員ばかりを非難するのに見うけられるし、一時は数学担当の教員も、

もう少し学生のことを考えて講義の内容等を考えなければならないとも思ったが、最近では他の教科担当の人達とも話す機会を持つこともあり、それらの人たちとの話の内容から推し量ると、数学の教員以外での多くの人達にも同じ事が言えるのではないかと考えさせられている。“大学でも、今は、学生の理解度等を根本から考えないと授業が全く成り立たない”と考えている。

一般に、附属高校を併設している私立大学ではその附属高校から無試験で直接大学に入学するか、またはその附属高校からの推薦入学を認めていると考えて良いだろう。すると、私立工学系学部での学生は、附属の工業高校・普通高校からの無試験か推薦による入学者、公立工業高校からの推薦による入学者、一般推薦による入学者、センター試験受験による入学者、附属高校からの生徒をも含めた一般試験入試による入学者等、と多岐にわたると考えて良いだろう。大学での「微分積分学」の講義に対して、入学後における学生に対する「クラス分け」、ましてや「カリキュラム」について、高等学校時代において学んだ内容が異なる、また、入試の際にも大学が要求した数学の内容が異なる、これらの多岐にわたる入学してきた学生に対し、それぞれの入学までの要因を考えた「クラス分け」や「カリキュラムの設定」等に対する考慮（待遇、サービス等）が如何になっているのか、よそ者でありながら、数学の講義に関して考えなければならないので、気にかけているものである。日本では難しい面もあるが「習熟度別のクラス分け」を考えても良いのではないだろうか。最近、耳にしたことでは、関西の大学で「習熟度によるクラス分け」を実行して、良い効果を生んだ、ということであるが……。数学離れ（理科離れ）が引き継がれて入学してくる学生に対して、大学において「微分積分学」を講義するには、この科目を履修するこれらの学生が通過して身につけてきた、数学の科目における中学校・高等学校等での内容等をも考慮することが要求されるのではないかと、最近、とみに痛感させられている。

大学における「微分積分学」を講義で教える事は、学生の大学への入学までに学んだ事柄を把握することは困難な事柄であるが、それに立ち向かわなければならないと思われた経験をもつと、大学で数学を教えている一人として、他の工学系学部での話しであるからと済ませてよいものではないと考えさせられている。

一年生には微分の公式・操作をわかってほしい。多項式の微分、無理関数の微分、分数関数の微分、三角関数の微分、指数関数の微分、対数関数の微分、これで十分である。公式

$$(x^n)' = nx^{n-1}, (\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (e^x)' = e^x, (\log x)' = 1/x$$

を少なくとも理解して欲しく、何度も繰り返し演習問題を行うことにしている。合成関数の微分も、“こういうふうにおきかえて、これは基本的な微分のままで、次にこれを微分したもののかけるのだよ”というように何度も繰り返し、覚えてもらう事に専念する事にし



ている。しかし、学生はこれらの内容を講義では聞いてノートをとっているが、講義が終ってから、家に帰ればノートも教科書も開かない、図書館で復習も予習もしていない。宿題を出しても誰かの答えを、何も考えずに、写すだけであって、宿題を出しても意味が無い、それで、宿題を出すこともやめて、90分間の講義時間だけでできるだけ微分の公式を覚えてもらうこと、それにだけ専念する事にした。そして、後期の積分に関する講義においては基本的な関数の導関数を思い出して貰うように、何回も前期にやった微分についての内容を繰り返し、演習問題の解答をも示し、また、講義の中で学生に問題を与え、それについての解答を考えている間に机の間を見て周り、やっている問題に対応する段階を考えて、先の微分、積分に関する基本の段階の理解を求める質問を行なうことで、繰り返し、学生に、頭の中で今まで習った事柄を復習してもらう、ということで、講義内容の理解を求めている。微分法にしても積分法に関しても、それらのさらなる応用についても説明をしたいのであるが、応用への領域にはほとんどはっていないのと同じである。関数のテラー展開に関することについても踏み込まないことにしている。

このように懇切丁寧に（？と私は思っているが）講義をやっているつもりであるが、一年次における「微分積分学」の講義を1月末で終え、4月に新しく二年生になったこれらの学生を、「微分積分学」の講義に引き続く他の科目における講義を担当して、偏微分法や重積分法に関する内容に進んでいくと、驚く事ばかりの、あらゆる方面に関する事柄について思いもしなかった多くの経験をさせられる・・・。

### 3. おわりに

学生のことを真剣に考えて「微分積分学」の講義の内容、教授法を考えるべきである。しかし、限度もあるが！

文部科学省が平成16年1月23日に発表した高校生を対象にして2002年に実施した学力テスト（教育課程実施状況調査）の結果に関する解説によると、高等学校三年生の四割の生徒は家でほとんど勉強しないということである。今回の報告の中で、私が最近、学生から感じたことや危惧したことが現実になっている。本当に、他人事ではない、これからは教育を如何に考えていったらよいのであろうか。学生に自宅や図書館等で勉強する習慣を身につけて欲しいと、本当に、願っている者である。私にはそれに対しての良い方法を示す十分な力はない。しかし、少しでも現実に対応して、自分の考えていることを理解してもらえるように、数学について興味をもってもらえるように、努力したいと思っている。

最後に、ここでの内容は平成15年8月5日に開催された「第85回全国算数・数学教育研究（愛知）大会」・「日本数学教育学会第85回総会」における「高専・大学部会」での講演原稿に加筆したものである。

参 考 文 献

1. 武元 英夫,「大学での微分積分学の講義」—教員養成課程における講義及び私立工業大学での講義—, 日本数学教育学会誌, 第85巻, 臨時増刊, 第85回総会特集号(2003), 519。
2. 吾妻 一興・武元 英夫・長 宗雄・松本 紘司, 教育系のための「数学概説」, 培風館, 1993。

Lecture for Calculus at Teacher-Training Course and Private Engineering Faculty

Hideo Takemoto

Miyagi University of Education

Abstract. We hope that the students studying at the department of mathematics in teacher-training course will understand and be able to explain the mean of the relation  $0.999\cdots = 1$  and the definition of  $\pi$ .

Keywords. Calculus, Ratio of Circumference, Area of Circle, Class