

教育学部における確率論の授業例

—— ルベーク積分の導入とコルモゴロフの公理 ——

佐伯 卓也（岩手大学名誉教授）

概要 教育学部学生対象に2000年には集中講義、2001年後期に普通講義として、毎週火曜日7、8校時に確率論の授業を行った。授業は2000年に作成したテキストを用いて行った。さて、確率論のコルモゴロフの公理を入れるためにはルベーク積分の知識がいる。ところが理学部数理科学科では2000年度以来数学科教育法の中でルベーク積分の講義をした結果、成果が得られたので、日数教の34回論文発表会その他で一部報告をした（佐伯, 2001ab）。導入法は以前の吉田（1934）の著書に見るy軸の方の分割による方法による。この経験のもと、教育学部の学生を対象に実施を考えた。だが、教育学部の学生対象ではルベーク積分の講義の経験がなく、全くの試行として実施した。2001年度の授業の結果は予想以上の成功の例となった。

キーワード : 確率論, 大学数学教育, ルベーク積分, コルモゴロフの公理

1. はじめに

2000年と2001年に、教育学部の一般学生対象の確率論・統計学の授業を担当した。2000年度は9月下旬に集中講義形式で行い、2001年度は後期に毎週火曜日の7・8校時に普通スタイルの授業として行った。受講した学生は、2000年度は44名、途中4名取り消して最終テストでは40名受験した。2001年度は14名申告したが最後は3名減って11名になった。2年間で人数が大きく変動した理由は、集中講義では受講できた教育学部総合教育学科29名が時間割の関係で受講出来ずに、学校教育学科（数学科）だけになったからと考えられる。この部分をみると、集中講義の時も14名で人数的にはあまり変わらない。

確率論というと、コルモゴロフの公理が浮上する。ところがこれの導入にはルベーク積分を用いなければならない。ところが、たまたま、理学部の数理科学科で担当している数学科教育法の中で、2001年前期以来ルベーク積分の指導を行い成功していた（佐伯, 2001ab）。その方法は吉田（1934）の著書にみるy軸の方の分割による方法だったので、早速教育学部学生対象に導入を試みることにした。次に本研究の目的を記す。

本研究の目的として

- ①ルベーク積分, コルモゴロフの公理について学生の理解の度合いを確かめ、この題目の講義を取り入れる妥当性を見る,
- ②確率・統計の授業の内容と授業時間数の適切性の確認をする、
を取り上げることにした。

2. 授業の概要

(2.1)作成したテキストの内容

集中講義の時からテキストを用いたが、ここでは2001年度の一部改定したテキストの項目について記す。これらの項目で授業の内容がある程度分かるに違いない。

0. 確率の始まり

1. 確率：算術的確率，一般の確率概念
2. 基本定理：命題算，確率の基本性質，ラプラスの算術的確率，条件付確率，壺と球の問題・重複試行，確率に関する諸定理と例題
3. 確率変数：確率変数，平均値・分散，共分散・相関係数，歴史的な問題2題（ビュフォンの針の問題，モンテカルロ法）
4. 確率論のコルモゴロフの公理：リーマン積分の主なる欠点，ディリクレ関数，ジョルダン測度とリーマン積分，ルベーグの測度，ルベーグ測度の性質，ルベーグ積分の定義，コルモゴロフの公理による確率の定義
5. 確率変数と分布：確率変数の定める分布，チェビシェフの不等式，確率変数の独立
6. 大数の（弱）法則と中心極限定理：大数の法則，二項分布，中心極限定理
7. 分布：ポアソン分布，連続分布，正規分布
（確率論演習問題）
8. 統計的推測：統計的仮説の検定，既約，正規分布， χ^2 分布，スチューデントのt分布，フィッシャーのF分布

演習問題は上述の演習問題のほか随所に挿入してあり，随時のレポートの課題，小テストに利用した。

次に表1で，受講生の人数を示す。

表1 2000年度2001年度の受講者数と最終試験受験者数

2000年度	申告者数			最終試験受験者数		
	3年次	過年度	計	3年次	過年度	計
男子	21(7)	6(3)	27(10)	19(7)	4(1)	23(8)
女子	17(4)	0(0)	17(4)	17(4)	0(0)	17(4)
計	38(11)	6(3)	44(14)	36(11)	4(1)	40(12)
2001年度	申告者数			最終試験受験者数		
	3年次	過年度	計	3年次	過年度	計
男子	8	2	10	6	1	7
女子	3	1	4	3	1	4
計	11	3	14	9	2	11

()内は中学校数学コースの内数

(2.2) 2か年の受講生

2000年度は9月25日(月) - 28日(木)に実施した集中講義であり、2001年度は後期毎週の火曜7-8校時の授業である。

2000年度は集中講義でしかも休暇中に実施したこともあり、多くの学科コースの受講者が履修した。それに反して、2001年度は毎週の授業で出席者が制限されて数学科の中学校課程に限られた形になった。表の中の2000年度の部分に中学校数学コースの人数は()に内数として示した。これを見ると2000年度も2001年度もほぼ同数となっているのが分かる。

(2.3) 2001年度の授業の経過

2000年度は集中講義という特殊な事情で標準にはならない。そこで2001年度の授業を記しておく。

大体の経過は、テキストに従ってその内容を説明し、足りない部分は補説を加えた。必要があればアンケート(小テスト)で学生の実態を確かめ、慣れてくるに従ってレポートを課した。レポートは回収した時に必ず解答を示しできるだけ詳しく説明した。このため予定よりも多くの時間がかかり、レポートを課す回数が2回少なくなった。そのためレポートの配点に不揃いが出てしまった。次節で実際のレポート課題と配点を示す。

3. レポート課題と期末考査課題

(3.1) レポート課題

[1回] 毎回の試行にある事象が起こる確率を p , 起こらない確率を q とする。 n 回の試行中丁度 r 回だけこの事象が起こる確率を求めよ。(10点)(回収日:10月30日)

[2回] テキスト p. 13 で示したディリクレの関数がリーマンの意味で積分出来ないことを示せ。(4点)(回収日:11月13日)

[3回] A, B二人がA Bの順で交互にコインを投げ、先に表を投げた方を勝ちとして勝負を始めた。それぞれA, Bが勝つ確率を求めよ。(4点)(回収日:11月20日)

(ヒント: この解は無限等比数列の和の極限になる)

[4回] $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ とおく。任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$p\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| > \varepsilon\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

この式が成り立つとき、 $\{S_n/n\}_{n=1}$ は m に確率収束すると言う。このことを証明せよ。この命題を大数の(弱)法則という。(12点)(回収日:12月11日)

(ヒント: 参考書鈴木 武『確率入門』)

以上がレポート課題であり、各問題の末尾に得点を記している。レポートはもう2回程予定していたが、日程が取れずに4回で打ち切ったために得点に不揃いが出た。レポートは最初から合計で30点になるように計画してあったのでそこは計画に従った。

(3.2) 2001年度の期末考査問題

- [1] n 本の福引中に m 本の当たり籤があるとき、最初に引く人と、2番目に引く人との損益はどうか。(15点)
- [2] 与えられた線分 AB (長さ $a + b + c$) 上に長さ a なる線分 PQ および長さ b なる線分 RS を取るとき PQ と RS が共通部分を有する確率を求めよ。(15点)
- [3] テキストp.13 で示したディリクレの関数がリーマンの意味で積分出来ないことを示せ。(10点)
- [4] テキストp.29 の問、「この解にならぬ、5回中3回6の目が出た場合、仮説が棄てられるか否かを、危険率 0.01 で計算して見よ」を解け。(10点)

期末考査は2002年1月29日(火)に行った。ちなみに成績判定は出席20点、レポート30点、期末考査50点、合計100点として、その得点で判定した。

4. 結果

レポートは良く制御できない(参考書や友人に聞く)、結果は参考程度にしかならぬので省略する。ただ、レポートは4回とも揃って提出しているが、期末考査になり、急に3人減り、11名になった。次ぎに期末考査の結果を表2に記す。

表2 期末考査の結果

問題番号	問題内容	配点	平均点	正答率(%)
[1]	福引の最初に引く人と次の人との損益	15	13.636	90.91
[2]	面積で表される確率	15	13.181	87.78
[3]	ディリクレの関数のリーマン積分不能	10	8.636	86.36
[4]	統計的仮説検定の問題	10	7.727	77.27
総点		50	43.182	86.64

(考査の条件は、いわゆるノート試験で、自分のノートや参考書類を見させた。)

ところで、レポートと期末考査の問題の内容は一緒に考えなければならない。レポートの2回目のディリクレの関数は期末考査の[3]と同じ問題であったことは、学生に確実にこれらを理解させる意図による。しかし、何はともあれこの部分の正答率が86.38%だったことは成功したと考えて良いだろう。この結果はルベグ積分を学生に覚えさせたかったと言う当初の目標はほぼ達せられたものと考えて良いだろう。レポートの3回目の無限級数になる問題や、4回目の大数の(弱)法則の問題も、同様に確率論のトピックとして学生に履修させたい内容の理解を目的として出題している。

5. 考察

本研究の目的と関連させる前に、理学部数理科学科でのルベーク積分の授業を見ておく。理学部数理科学科では2000年度からルベーク積分を数学科教育法の中で試みている。これは筆者の考えとして数学を教える数学科教育法の立場である(佐伯, 2003b)。その方法は、松浦他(1993)で表れたが、それは以前用いた方法(吉田, 1934)の著書にあるルベーク積分の定義の仕方、つまりy軸の方の分割による方法であった。数理科学科ではいずれルベーク積分の授業は、専門コースとして行われるはずであるが、それとは別に、学生に第二の方法として、この吉田流儀のリーマン積分の定義と似た方法で学生に教えておいても良いだろうと思っている。この理学部での実施の結果がある程度成功であったので、同年9月に実施した教育学部の集中講義でテキストに採用(評価はしていない)、2001年度に再び採用し、評価の結果、予想以上の成功を収めた。

さて、本研究の目的①であるが、教育学部の学生に対しては確率論のコルモゴロフの公理の記述のためにルベーク積分を導入したので積分そのものは目的ではなかった。しかし、レポートや期末考査の関連部分を見る限り確率論としてのコルモゴロフの公理の指導のための、ルベーク積分を導入すると言う目的は達せられてるように見える。しかもそれが予想以上の成功の結果となったことは意外な結果だが、これは残った学生が中学校課程の数学科の学生であったと言う理由によると考えられる。従ってこの成功例は一般化はできないが、このような成功例も存在すると主張することは可能である。

次に②の確率論・統計学の授業の内容と授業時間数であるが、今回の試行では全くの時間不足であった。特に、推測統計部分は目的に全く達せず、ただ軽く触れた程度に過ぎない。この辺を十分に行うには、単位数を現行の2単位から4単位くらいにする必要がある。しかし、それは他の教科とのバランスから見ると、確率・統計だけ強化するわけにはいかない。従って2単位のまま確率・統計で扱う内容を大幅に精選の方がより現実的であろう。

ここで問題になるのはルベーク積分の扱いかたである。ルベーク積分とコルモゴロフの公理が今回の試行のポイントなので、これを何とか残したいと言うことで検討して見よう。筆者はかねてから20世紀の解析学はルベーク積分の発展に負うと考えているので、19世紀的なリーマン積分だけでは不足と考えていた。ただ、今回の試行では人数が大幅に減り、しかも残ったのが数学科の中学課程の学生であったのが幸運であった。そこで、ある程度ルベーク積分の指導とコルモゴロフの公理の指導が成果をあげることができた原因となったことはそのためかも知れない。ひるがえって、2000年の時は評価は十分しなかったが、その時の学生対象では、数学科の中学課程だけでなかったもので、成功しなかったと思われる。ここは今回の試行の限界でもであろう。

参 考 文 献

河田敬義・丸山文行(1951)『基礎課程数理統計』, 裳華房, 東京

- 国沢清典編(1996)『確率統計演習1 確率』, 培風館, 東京
- 松浦武信・高橋宣明・吉田正廣共著(1993)『物理・工学のためのルベーク積分入門』, 東海大学出版会, 東京
- 佐伯卓也(2000)数理系学生の数学科教育法の改善 — 話しかけ法とテキスト法(講話法)について, 東北数学教育学会年報, 31, 29-34
- 佐伯卓也(2001a)数理系学生の数学科教育法の研究 — 高校数学教師の知識技能を求めて, 日数教第34回数学教育論文発表会論文集, 635-636
- 佐伯卓也(2001b)数理系学生の数学科教育法の研究(2) — 日常的レポートの結果, 第33回東北数学教育学会年会発表資料(2001年12月2日(土)八戸工大)
- 佐伯卓也(2002a)数理系学生の数学科教育法の試み — 高校の数学教師養成を目指して, 日本科学教育学会研究会研究報告, 16巻6号, 7-12
- 佐伯卓也(2002b)数理系学生の数学科教育法の改善(2) — 話しかけ法・テキスト法(講話法)と類比教材, 東北数学教育学会年報, 33, 31-38
- 佐伯卓也(2003a)数理系学生の数学科教育法の改善(3) — 高校数学教材漸近線をめぐって, 東北数学教育学会年報, 34, 3-8
- 佐伯卓也(2003b)日数教の未来を語るに寄せて, 日本数学教育学会誌(日本数学教育学会八十五周年記念誌), 85(7・8号)10ページ
- 鈴木 武(1997)『確率入門 [モデルで学ぶ]』, 培風館, 東京
- 渡邊孫一郎(1934)『確率論』, 共立出版, 東京
- 吉原健一・佐藤昭治・根岸洸・高畑弘共著(1984)『演習 確率・統計』, 培風館, 東京
- 吉田洋一(1934)『実変数関数論概要』, 共立出版, 東京

An Example of Lectures about Probability Theory for Students
in Faculty of Education

— An Introduction of Lebesgue's Integral and Axioms of Kolmogoroff —

SAEKI, Takuya (Professor Emeritus, Iwate University)

(Abstracted)

In 2000, we lectured probability theory for four days as intensive lecture with 2-units. On the other hand, in 2001, we lectured once a week the same lesson. In the lecture, we used the own texts. The remarkable subjects in the lecture are Lebesgue's integrals and the axioms of Kolmogoroff in probability theory. In study of Lebesgue's integrals, students in Faculty of Education finished with noteworthy success than we expected.