東北数学教育学会年報
2003,3,.31 第35号

“数学を教えるという数学科教育法”の意味について

佐伯　卓也（岩手大学名誉教授）

概要 2003年7月に日数教の八十五周年記念誌が出版された。執筆を依頼された文の最後に“数学を教えるという数学科教育法”と記した（佐伯，2003b）。しかしそこでは文字の制限のため説明ができなかったので本稿で説明をした。さて，筆者は1997年以来山形大学理学部数理科学科において数学科教育法の授業を担当して来た。この授業はいつも自作の「テキスト」（印刷物）を利用している。初めからかなり数学を教える内容を含んでいるものであったが，毎年の授業経験に基づき書き改めるので，より高度な“数学を教えるという数学科教育法”の内容に変わっていった。

キーワード 数学科教育法，高校数学教師教育，理学部数理科学科学生

1．はじめに ―― “数学を教えるという数学科教育法”の由来

山形大学理学部数理科学科で担当している数学科教育法の内容だが，初めは意識しなかったが，自然に数学そのものも教える部分を含むようになり，その過程で“数学を教えるという数学科教育法”を考えるようになっていった。所で，2003年に初めて公に「日数教の未来を語るに寄せて」の拙稿（佐伯，2003b）の終わりの部分で“数学を教えるという数学科教育法”という用語を用いた。文字数の制限のため，この意味については何も説明出来なかった。そのため“数学を教えるという数学科教育法”の意味の説明を本稿を借りてすることにした。

普通数学科教育法（以下“教育法”と略す）の授業を試みるとき，その講義または授業の中で，ある種の「数学」を例として用いるのが普通である。その数学の例は，学校数学の中学と高校数学の中から採ってくることが多い。数学の授業で数学を説明するための引用の数学をどこから採って来たかの分類を試みる。まず，その数学の説明を学校数学の中の数学を用いて行うときの水準を第一水準の「数学を教える教育法」と呼ぶことにする。所で教師の数学の知識は，生徒よりも多くないといけない。こういう観点から，教育法で引用したり用いたりする数学の例を大学の数学の授業の内容から採ってくる水準がある。この水準は大きく分ければ，学校数学の内容に比べてその内容が関連する水準にある場合，つまり特に高校の微積分のとき，大学の水準の微積分を引用する例がこれである。このような水準の数学を例示して教えるような時は第二水準の「数学を教える教育法」と呼ぶことにする。普通はほぼこの第二水準で終わっていた。筆者のテキストも初期のうちはこの水準までであった。ところが，毎年改良を加えていくうち，自然にこの水準を大きく越え

て高度な数学の水準とか数学史上の高度な数学の水準の数学に変容していった。このような高度な専門的な数学の水準の数学に達している時，第三水準の「数学を教える教育法」と呼んで区別することにした。まさしく，2001年度のテキストは第三水準の「数学を教える教育法」であった。これらの暫定的な定義を用いると，筆者が山形大学理学部数理科学科で実施した教育法は第一水準の外，第二水準と第三水準の部分を含む教育法であったことになる。

これらの教育法を Method of teaching mathematics as Teaching Mathematics Itself と仮に呼び，略してＭＴＭＩということにする。

本稿の目的は，山形大学理学部数理科学科で行った教育法の授業で用いた“数学を教えるという数学科教育法”（ＭＴＭＩ）の内容を，用いたテキストの実例で記し，説明を加え考察をすることである。

本稿は本学会第35回年会の配布資料（佐伯，2003c）を論文化したものである。

2．教育法の変遷の経緯

(2.1) 初期のテキスト

教育法のテキストは1998年度から自作した。その最初のテキストを取り上げてその目次を示す。

表１　1998年度に用いたテキストの目次

となっている。この中で特にＭＴＭＩと判断される項目は，§５と§６の部分に発見される。しかしこれらはいずれも大学数学であっても高校教材に関連する内容なので第二水準のＭＴＭＩとなる。

(2.2) 2001年度のテキスト

前項に引き続き2001年度に用いたテキストの目次を表２で示す。

表２　平成13(2001)年度に用いたテキストの目次

となっている。この中で特にＭＴＭＩと見られる項目は，§５と§６の部分に見られる。（5.5）の積分の中身はルベーグ積分であり，筆者(佐伯, 2003a)が以前示した内容とほとんど同じであり，水準から見ると第三水準のＭＴＭＩとなっているので，次節で改めて示す。さらに§６でも，やはり第三水準のＭＴＭＩの「ヤコビの実変数楕円関数」を記しているのでこれも次節で示すことにする。

３．第３水準の「数学を教える教育法」の教材の実際

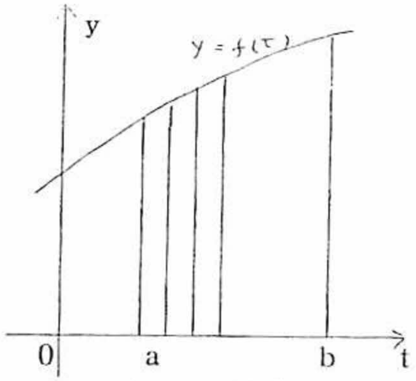
(3.1) ルベーグ積分

ルベーグ積分の一応の筋道については東北数学教育学会年報で報告（佐伯，2003b)済みであるが，ここではまだ報告していない部分を直接筆者の2001年度のテキストからの直接の引用を交えて記すことにする（修正，加筆を含む）。

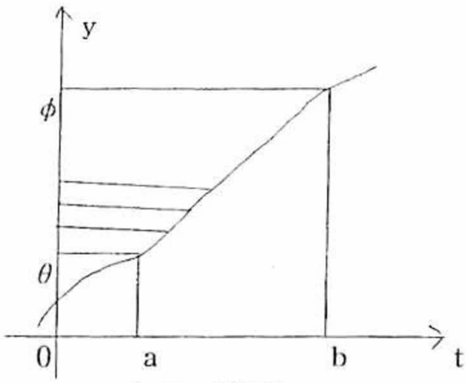
……

（注意）可測関数はルベーグ積分ができるが，普通の関数はすべて可測関数であり，可測関数でない関数を捜すのが殆ど不可能とさえ言われている。そのため，応用がし易い。

以下，ルベーグ積分を説明する。いま積分する可測関数 $y=f(t)$ とし，t の領域は



リーマン積分



ルベーグ積分

$a \leqq t \leqq b$，y の値域 $\theta \leqq f(t) \leqq \phi$ とする。リーマン積分の時は左図のように領域の t 軸の方で分割するが，ルベーグ積分では右図のように値域の方で分割する。区間［θ, ϕ］の中で n 個の分点を

$$\theta = f_0 < f_1 < f_2 < \cdots\cdots < f_n = \phi, \quad f_i = f(t_i) \quad (i=0,1,2,\cdots,n)$$

このとき

$f_0 \leqq f(t) \leqq f_1$　を満たす t の集合を ξ_0

$f_1 \leqq f(t) \leqq f_2$　を満たす t の集合を ξ_1

・・・・・・・・・・

$f_{n-1} \leqq f(t) \leqq f_n$　を満たす t の集合を ξ_{n-1}

なる集合 ξ_i $(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ のルベーグ測度を $m(\xi_i)=m_i$ とする。そこで,和：

$$\underline{s} = f_0 m_0 + f_1 m_1 + \cdots + f_{n-1} m_{n-1}$$

$$s = f_1 m_0 + f_2 m_1 + \cdots + f_n m_{n-1}$$

を作ると，$\underline{s}$ は $f(t)$ のこの積分値の小さい方の近似値，s は $f(t)$ は大きい方の近似値を与えている。一般に $s \geqq \underline{s}$ であるが，$f_{i+1} - f_i = \triangle_i \longrightarrow 0$ となるように分点の数を無限にしていったとき，分点の取り方に関係なく

$$s = \underline{s} = S$$

が成り立つとき，$f(t)$ はルベーグ積分可能であると言い，この S の値を $f(t)$ の区間［a, b］におけるルベーグ積分の値という。

・・・・・・

この説明は学生にも分かりやすく，しかも理学部で後にやるルベーグ積分の定義とも異なるので都合がよく学生にはいろいろなルベーグ積分の知識の提供になると考えている。

(3.2) ヤコビの楕円関数（実変数）

次にテキストのヤコビの実変数楕円関数の部分を詳しく記す（修正，加筆を含む）。

数学の歴史上よく知られているヤコビの楕円関数（実変数）について触れる。kを1より小さい正の数とし，ルジャンドル・ヤコビの第一種の楕円積分

$$u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad ①$$

を考える。$0\leqq x\leqq 1$なる変域におけるxに対してuは一価連続関数であり，uはxとともに単調に増加する関数である。特に$x=1$なるときのuの値をKおく。逆にxをuの関数と考えるとき，uが$0\leqq u\leqq K$なる変域にあればxはuの一価連続関数であり，かつ単調増加関数である。この事実を

$$x=\mathrm{sn}\ u$$

なる記号で表す。さらに，

$$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2u}=\mathrm{cn}\ u,\ \sqrt{1-k^2x^2}=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}=\mathrm{dn}\ u$$

とおく。このときkは母数と言われ，関数の周期に関係する量である。また，関数 sn, cn, dn は総称してヤコビの（実変数）楕円関数と言われ，数学史上特に有名な関数である。

この定義で重要なことはxは式①，つまりある種の初等関数では表されない無理関数の積分の逆関数になっているということである。式①で$k=0$とおけば，式①は

$$u=\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad ②$$

となる。uは良く知られている初等関数 $\sin^{-1}x$ に外ならない。しかし，ここでは②のxの関数uは知らないとして，楕円関数の時にならいuは変域$0\leqq x\leqq 1$において単調増加関数になり，$x=1$のときも定義されることが分かり，$\lim_{x\to 1-0} u$を$(\pi/2)$とおき，$x=1$のとき$u=(\pi/2)$と定義すれば，uは$0\leqq x\leqq 1$において一価単調増加関数となる。この逆関数xはやはり一価単調関数になる。これをもって

$$x=\sin\ u$$

とおき，uの正弦関数ということにする。さらに，$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2u}=\cos\ u$として余弦関数が定義される。またこの式より

$$\sin^2u+\cos^2u=1$$

も得られる。ここではこれ以上は触れないが，変域uを適切に広げていき，よく知られた三角関数の諸公式を導くことができる。

この方法は楕円関数の類似の方法で三角関数を導く方法であり，この場合は楕円関数がベースであり三角関数がターゲットとなっている例である。類比教材はベースとターゲットを入れ替えても良いから，三角関数がベースで楕円関数がターゲットと考えてもよい。数学史的にはこの方が起こったのでなかろうか。

4．ＭＴＭＩを取り入れた理由 —— 考察に代えて

本稿ではＭＴＭＩすなわち“数学を教えるという数学科教育法”の例となるテキストの２年分の目次と第三水準の教材例を直接テキストからの引用で示した。まず，平成10(1998)年度のテキストではこの中に第一水準のＭＴＭＩが含まれているが，さらに，§５，§６に第二水準のＭＴＭＩが含まれている。次いで，平成13(2001)年度のテキストでは§５で第二水準の，§６で第三水準のＭＴＭＩが含まれている。特に，第三水準のＭＴＭＩのうち，ルベーグ積分はわが国では初期のリーマン積分の類比の方法（吉田,1934;矢野,1968）で導入し，実楕円関数も歴史的な方法（竹内，1932）で導入した。

また，平成14(2002)年度のテキストの代わりに平成13(2001)年度の内容にした理由を記す。平成14(2002)年度のテキストの目次は平成13(2001)年度の目次と殆ど同じだが，新しい項目として Conradie and Frith (2000) の「理解テスト」を付け加えてあり，そのため「理解テスト」の部分がまじって見ずらいと考えてこのようにした。

次ぎに第三水準の数学，より専門的な数学を取り入れた理由について記す。理由はまさしく受講学生の数学の視野を広げ，興味を引くことをねらって導入したこと，さらに，受講生に数学自体の創造過程をもあわせて体験させるというねらいも入っていた（特に類比教材として）。実際このような第三水準のＭＴＭＩを指導すると，受講生の受講態度は急に変わり真剣になった。つまり，受講生は教職科目としての教育法とは異なる内容だと気づき，本来の数学に対する興味と同様な興味と態度を示した受講生が何人かいた。この事実は第三水準のＭＴＭＩの指導の効果と考えてよいであろう。

参 考 文 献

Conradie, J. and Frith, J. (2000) Comprehension tests in mathematics, Educ. studies in math., 42(No. 3), 225-235

松浦武伸・高橋宣明・吉田正廣共著（1993）『物理・工学のためのルベーグ積分入門』，東海大学出版会，東京

佐伯卓也（2000a）数理系学生のための数学科教育法 —— ３年間の経緯と問題，東北数学教育学会年報，31，42-45

佐伯卓也（2000b）数理系学生の高校数学「積分」の知識，日本科学教育学会年会論文集，24, 3 DE, 257-258

佐伯卓也（2001a）数理系学生の高校数学「積分」「指数・対数」の知識，第5回東北数学教育学会初夏研究発表会資料（2001年5月12日，福島市民会館）

佐伯卓也（2001b）数理系学生の数学科教育法の研究 —— 高校数学教師の知識技能を求めて，日数教34回論文発表会論文集，635-636

佐伯卓也（2002a）数理系学生の数学科教育法の試み —— 高校の数学教師養成を目指して，日本科学教育学会研究会研究報告，16, No. 6，7-12

佐伯卓也（2003a）数理系学生の数学科教育法ま改善（４）—— ルベーグ積分の導入を

めぐって，東北数学教育学会年報，34，9-14
佐伯卓也（2003b）日数教の未来を語るに寄せて，日数教会誌，85(7.8号),10
佐伯卓也（2003c）“数学を教えるという数学科教育法”の意味について，東北数学教育学会第35回年会発表資料（2003.11.29（土）山形市文翔館）
竹内端三（1932）『函数論』（下巻），裳華房，東京
矢野健太郎編（1968）『数学小辞典』，共立出版，東京
吉田洋一（1934）『実変数函数論概要』，共立出版，東京
Smith III, J.P.（1996）Efficacy and teaching mathematics by telling:A challenge for reform, J.R.M.E.,27(No.4), 387-402

On a Meaning about "Method of Teaching Mathematics as Teaching Mathematics Itself"

SAEKI, Takuya
Professor Emeritus, Iwate University

(Abstracted)

In teaching of mathematics, we usually use some mathematics itself as example to explain. If the mathematics of examples lies in range of school mathematics, we call the example as an MTMI(Method of teaching mathematics by Teaching Mathematics Itself) of the 1st level. If the mathematics of examples lies in range of usual level of university lectures, we call the example as an MTMI of the 2nd level. If the level of example mathematics lies in range of professional mathematics, we call the example as an MTMI of the 3rd level.

We have lectured for students at a mathematics course in the faculty of science in Yamagata university with some MTMIs of the 3rd level. In contents of MTMIs of the 3rd level, we can find out the Lebesgue's integral and the elliptic function of Jacobi with real variables.